JAHRBUCH ÜBER DIE FORTSCHRITTE DER MATHEMATIK

Jahrbuch

über die

Fortschritte der Mathematik

im Verein mit anderen Mathematikern

und unter besonderer Mitwirkung der Herren

Felix Müller und **Albert Wangerin**

herausgegeben

von

Carl Ohrtmann.

Elfter Band.

Jahrgang 1879.

Berlin.
Druck und Verlag von G. Reimer.
1881.

Erklärung der Citate.

Eine eingeklammerte (arabische) Zahl vor der (römischen) Bandzahl bezeichnet die Reihe (Serie), zu der der Band gehört.

Abh. St. Petersb.: Abhandlungen der Kais. Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg. (Russisch). Petersburg.

Acc. P. N. L.: Atti della Accademia Pontificia dei Nuovi Lincei. Roma. 4°.

Acc. R. d. L.: Atti della Accademia Reale dei Lincei. Roma 4°.

Almeida J.: Journal de physique théorique et appliquée, publié par J. Ch. d'Almeida. Paris. 8°.

Am. J.: American Journal of mathematics pure and applied. Editor in chief: J. J. Sylvester, Associate Editor in charge: W. E. Story. Published under the auspices of the Johns Hopkins University. Baltimore. Murphy. 4°.

Amer. J.: American Journal of sciences and arts.

Analyst: The Analyst, a monthly journal of pure and applied mathematics. Edited and published by J. E. Hendricks. Des Moines, Jowa. gr. 8°.

Ann. de l'Éc. N.: Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, publiées sous les auspices du Ministre de l'instruction publique par M. Le Pasteur. Paris. Gauthier-Villars. 4°.

Ann. de Belg.: Annuaire de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Bruxelles. F. Hayez.

Ann. d. Chim. et Phys.: Annales de Chimie et de Physique par MM. Chevreul, Dumas, Boussingault etc. Paris. Masson. 8°.

Ann. d'Ist. Tecn. di Roma: Annali dell' Istituto Tecnico di Roma.

Ann. d. Mines: Annales des Mines ou Recueil de mémoires sur l'exploitation des mines et sur les sciences et les arts qui s'y rapportent, rédigées par les Ingénieurs des Mines et publiées sous l'autorisation du Ministre des travaux publics. Paris. 8°.

Ann. d. l'obs. de Brux.: Annuaire de l'Observatoire royal de Bruxelles. Bruxelles. 8°.

Ann de l'obs. r. de Brux.: Annales de l'Observatoire royal de Bruxelles publiées aux frais de l'État. Astronomie. Bruxelles. F. Hayez. 4°.

Ann. d. P. et d. Ch.: Annales des ponts et des chaussées. Mémoires et documents relatifs à l'art de construction et en service de l'ingénieur. Paris. 8°.

Andresen Tidsskr.: Den tekniske Forenings Tidsskrift udgivet af A. Andresen. Kopenhagen.

Ann. Soc. scient. Brux.: Annales de la société scientifique de Bruxelles. Bruxelles. F. Hayez. (Mit doppelter Paginirung, unterschieden durch die Buchstaben A und B.)

Ann. scient.: Annuario scientifico ed industriale, fondato da F. Grispigni, L. Trevellini ed E. Trèves, compilato dal G. V. Schiaparelli, G. Celoria, F. Denza, R. Ferrini, F. Delpino, L. Gabba etc. Milano. Fratelli Trèves.

Ann. de l'Ac. de Belg.: Annales de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Bruxelles.

Ann. di Torino: Annuario dell' Accademia Reale di scienze e di lettere di Torino. Torino.

Arch. f. Math. og Nat.: Archiv for Mathematik og Naturvidenskab. Christiania. 8⁰.

Arch. Néerl.: Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles, publiées par la Société Hollandaise des sciences à Harlem. La Haye. 8⁰.

Ass. Fr.: Association Française pour l'avancement des sciences naturelles.

Astr. Nachr.: Astronomische Nachrichten, begründet von H. C. Schumacher, herausgegeben von C. A. F. Peters. Altona. 4⁰.

Astr. Viert.: Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft. Herausgegeben von E. Schoenfeld in Bonn, A. Winnecke in Strassburg. 8⁰. Leipzig. W. Engelmann.

Atti d. Aten. Ven.: Atti dell' Ateneo Veneto. Venezia. Cecchini. 8⁰.

Atti d. Ist. Ven.: Atti del Reale Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. Venezia. 8⁰.

Atti di Padova: Atti della Reale Accademia di scienze, lettere ed arti di Padova. Padova.

Atti di Torino: Atti della Reale Accademia di Torino. Torino. 8⁰.

Battaglini G.: Giornale matematiche ad uso degli studenti delle università italiane pubblicato per cura del Prof. G. Battaglini. Napoli. gr. 8⁰.

Bair. Bl.: Blätter für das bairische Gymnasial- und Realschulwesen, redigirt von W. Bauer und A. Kurz. München. 8⁰.

Ber. d. Techn. Inst. zu St. Petersb.: Nachrichten des St. Petersburger Technologischen Instituts. St. Petersburg.

Berl. Abh.: Mathematisch-physikalische Abhandlungen der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Berlin. 4⁰.

Berl. Monatsber.: Monatsberichte der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Berlin. 8⁰.

Bibl. univ.: Bibliothèque universelle et revue suisse. Archives des sciences physiques et naturelles. Lausanne. Bridel.

Boncompagni Bull.: Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche pubblicato da B. Boncompagni. Roma. 4⁰.

Borchardt J.: Journal für reine und angewandte Mathematik. Als Fortsetzung des von A. L. Crelle gegründeten Journals, herausgegeben unter Mitwirkung der Herren Schellbach, Kummer, Kronecker, Weierstrass von C. W. Borchardt. Berlin. G. Reimer. 4⁰.

Brioschi Ann.: Annali di matematica pura ed applicata diretti da F. Brioschi e L. Cremona in continuazione degli Annali già pubblicati in Roma da Prof. Tortolini. Milano. 4⁰.

Bull. de Belg.: Bulletin de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Bruxelles. 8⁰.

Bull. de St. Pétersb.: Bulletin de l'Académie impériale de St. Pétersbourg. Pétersbourg et Leipzig. Folio.

Bull. S. M. F.: Bulletin de la Société Mathématique de France publié par les secrétaires. Paris. 8⁰.

Carl Repert.: Repertorium für Experimental-Physik herausgegeben von Ph. Carl. München. gr. 8⁰.

Časopis: Zeitschrift zur Pflege der Mathematik und Physik, redigirt mit besonderer Rücksicht auf Studirende der Mittel- und Hochschulen von F. J. Studnička, herausgegeben vom Vereine böhmischer Mathematiker in Prag. Prag. 8°.

Christ. Forh.: Forhandlingar i Videnskabs-Selskabet i Christiania. 8°.

Civiling.: Der Civilingenieur. Herausgegeben von K. R. Bornemann.

Clebsch Ann.: Mathematische Annalen. In Verbindung mit C. Neumann begründet durch R. F. A. Clebsch. Unter Mitwirkung der Herren P. Gordan, C. Neumann, K. v. d. Mühll gegenwärtig herausgegeben von F. Klein und A. Mayer. Leipzig. Teubner. 8°.

Conn. d. temps: Connaissance des temps ou des mouvements célestes. Paris. Gauthier-Villars. 8°.

C. R.: Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. Paris. 4°.

Cron. cient.: Cronica cientifica revista international de ciencias fundador proprietario y director D. Rafael Roig y Torres. Barcelona. 8°.

Darboux Bull.: Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, rédigé par MM. G. Darboux et J. Hoüel avec la collaboration des MM. André, Lespiault, Painvin et Radau, sous la direction de la commission des Hautes Études. Paris. Gauthier-Villars. 8°.

D. Uhrm. Z.: Deutsche Uhrmacherzeitung. Verlag und Expedition von R. Stäckel. Berlin.

Educ. Times: Mathematical questions, with their solutions from the „Educational Times" with many papers and solutions not published in the „Educational Times." Edited by W. J. C. Miller. London. 8°. C. F. Hodgson and Son.

Erl. Ber.: Sitzungsberichte der physikalisch-medicinischen Societät zu Erlangen. Erlangen. 8°.

Freib. Ber.: Berichte der naturforschenden Gesellschaft zu Freiburg. Freiburg i. Breisgau.

Gött. Anz.: Göttingische gelehrte Anzeigen. Unter der Aufsicht der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Göttingen. 12°.

Gött. Nachr.: Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-August-Universität zu Göttingen. Göttingen. 12°.

Grunert Arch.: Archiv der Mathematik und Physik mit besonderer Berücksichtigung der Bedürfnisse der Lehrer an den höheren Unterrichtsanstalten gegründet von J. A. Grunert, fortgesetzt von R. Hoppe. Leipzig. C. A. Koch. 8°.

Hamb. math. Ges.: Mittheilungen der mathematischen Gesellschaft in Hamburg. Hamburg.

Helsingf. Afh.: Akademiens Afhandlingar Helsingfors.

Herm.: Hermathena, a series of papers on literature, science and philosophy, by members of Trinity College. Dublin. Edw. Ponsonby. 8°.

Hoffmann Z.: Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. Unter Mitwirkung von Fachlehrern herausgegeben von J. C. V. Hoffmann. Leipzig. 8°.

Jaarb. v. Amst.: Jaarbook van de koninklijke akademie van Wetenschapen. Amsterdam.

J. d. Act. fr.: Journal des Actuaires français. Paris. Gauthiers-Villars. 8°.

J. of the Franklin Inst.: Journal of the Franklin Institution. Amerika.

Ing.: L'ingegneria civile e le arti industriali. Torino. Camillo e Bertolero.

Innsbr. Ber.: Bericht des naturwissenschaftlichen und medicinischen Vereins zu Innsbruck. Innsbruck. 8°.

Inst.: L'Institut, Journal universel des sciences et des sociétés savantes en France et à l'étranger. Première section. Sciences mathématiques, physiques et naturelles. Paris. gr. 4°.

Jorn. d. sc. m. e astr.: Jornal de sciencias mathematicas physicas e naturales publicados sob os auspicios da academia real das sciencias de Lisboa. Lisboa typographia da academia. 8°.

Journ. Asiat.: Journal de la Société Asiatique. Paris.

Journ. of Act.: Journal of the Institute of Actuaries.

J. de l'Éc. Pol.: Journal de l'École Polytechnique, publié par le conseil d'instruction de cet établissement. Paris. Gauthier-Villars. 4°.

Isis: Sitzungsberichte der naturwissenschaftlichen Gesellschaft Isis.

Kjbhvn. Forh.: Forhandlingar af Videnskabs Selskab i Kjöbnhavn.

Königsb. Schriften: Schriften der physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg i. Pr. Königsberg i. Pr. 4°.

Krak. Denkschr.: Denkschriften der Krak. Akademie der Wissenschaften Krakau. (Polnisch.)

Leipz. Abh.: Abhandlungen der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Leipzig. Hirzel.

Leipz. Ber.: Berichte über die Verhandlungen der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-physikalische Klasse. Leipzig. Hirzel. 8°.

Leopold.: Abhandlungen der Leopoldinischen Akademie.

Liouville J.: Journal de mathématiques pures et appliquées fondé en 1836 et publié jusqu'en 1874 par J. Liouville. Publié par H. Résal avec la collaboration de plusieurs savants. Paris. 4°.

Lund. Act. Un.: Acta universitatis Lundensis. Lund.

Lund. Ak. Afh.: Lunds Akademiens Afhandlingar. Lund.

Lund Arsskr.: Lunds Universitets Arsskrift. Lund.

Marb. Ber.: Sitzungsberichte der Gesellschaft zur Beförderung der gesammten Naturwissenschaften zu Marburg. Marburg. 8°.

Mél. math. de St. Pétersb.: Mélanges mathématiques et astronomiques tirés du Bulletin de l'Académie impériale de St. Pétersbourg. Leipzig. Petersburg. 8°.

Mém. in 8° de Belg.: Mémoires couronnés et mémoires des savants étrangers publiés par l'Académie royale des sciences de Belgique. Bruxelles. 8°.

Mem. di Bologna: Memorie dell' Accademia Reale di scienze dell' Istituto di Bologna. Bologna. 4°.

Mém. de Bord.: Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles à Bordeaux. Bordeaux. Paris. 8°.

Mém. cour. de Belg.: Mémoires couronnés de l'Académie Royale de Belgique. Bruxelles. 4°.

Mém. de l'Ac. Inscript.: Mémoires de l'Académie des Inscriptions. Paris.

Mem. Ist. Ven.: Memorie del Reale Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. Venezia.

Mém. de Liège: Mémoires de la Société royale des sciences de Liège. Liège.

Mem. di Modena: Memorie della Accademia Reale di Modena. Modena.

Mém. prés. de Paris: Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences de l'Institut de France. Paris.

Mem. of R. Astr. Soc.: Memoirs of the Royal Astronomical Society. London. 4°.

Mem. di Torino: Memorie dell' Accademia di scienze di Torino. Torino.

Mém. de Toul.: Mémoire de l'Académie des sciences, inscriptions et belles-lettres de Toulouse. Toulouse. Duladoure.

Messenger: The Messenger of mathematics, edited by M. Allen Whitworth, C. Taylor, R. Pendlebury, J. W. L. Glaisher. London and Cambridge. Macmillan. 8°.

Mondes: Les Mondes, revue hebdomadaire des sciences et de leur application aux arts et à l'industrie par l'Abbé Moigno. Paris. 8°.

Monthl. Not.: Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. London. 4°.

Mosk. Math. Samml.: Mathematische Sammlung, herausgegeben von der Moskauer mathematischen Gesellschaft. Moskau. Salvoréff.

Münch. Abh.: Abhandlungen der Kgl. Bairischen Akademie der Wissenschaften zu München. Zweite Klasse. München.

Münch. Ber.: Sitzungsberichte der Kgl. Bairischen Akademie der Wissenschaften zu München. München. 8°.

Nachr. v. Kiew: Nachrichten der Kaiserlichen Universität zu Kiew. Kiew.

Nachr. v. Odessa: Nachrichten der neurussischen Universität Odessa.

Nachr. d. St. Petersb. Techn. Inst.: Nachrichten des St. Petersburger Technologischen Instituts. St. Petersburg.

N. Act. Ups.: Nova Acta Regiae Societatis Scientiarum Upsaliensis. Upsala. 4°.

N. C. M.: Nouvelle correspondance de mathématiques, publiée par E. Catalan et P. Mansion. Mons. Manceaux. Paris. Gauthier-Villars. 8°.

N. Cim.: Il nuovo Cimento. Giornale fondato per la fisica e la chimica da C. Matteucci e R. Piria continuato per la fisica sperimentale e matematica da E. Betti e R. Félix. Pisa.

Nieuw Arch.: Nieuw Archief voor wiskunde. Amsterdam. 8°.

Nouv. Ann.: Nouvelles Annales de mathématiques. Journal des candidats aux écoles Polytechnique et Normale, rédigé par MM. Gerono et Ch. Brisse. Paris. 8°.

Nouv. Mém. de Belg.: Nouveaux Mémoires de l'Académie de Belgique. Bruxelles. 4°.

Observatory: The Observatory, a monthly review of astronomy. Edited by W. N. M. Christie. M. A. London.

Oesterreich. Vers. Ztg.: Oesterreichische Zeitung für Versicherungswesen.

Öfv. v. Stockh.: Öfversigt af Kongl. Svenks Wetenskabs Akademiens Forhandlingar. Stockholm.

Overs. v. Kopenh.: Oversigt over Videnskabs Selskabet Forhandlingar. Kopenhagen.

Par. Denkschr.: Denkschriften der Pariser Gesellschaft der exacten Wissenschaften. (Polnisch). Paris. 4°.

Phil. Mag.: The London, Edinburgh and Dublin philosophical Magazine and journal of science, by Brewster, Kane, Francis. London. 8°.

Phil. Trans.: Philosophical Transactions of the Royal Society of London. London. 4°.

Pogg. Ann.: Annalen der Physik und Chemie. Unter Mitwirkung der physikalischen Gesellschaft zu Berlin und insbesondere des Herrn H. Helmholtz herausgegeben von G. Wiedemann. Leipzig. Barth. 8°.

Poln. Arb.: Arbeiten der polnischen Jugend. Lemberg.

Prag. Abh.: Abhandlungen der Königl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Prag. Selbstverlag der Königl. Böhmischen Gesellschaft. 4°.

Prag. Ber.: Sitzungsberichte der Kgl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Prag. 8°.

Prag. techn. Blätter: Prager technische Blätter. Prag.

Proc. Am. Acad.: Proc. of the American Academy of arts and sciences. Cambridge. (Amerika.)

Proc. of Cambr.: Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Cambridge.

Proc. of Edinb.: Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Edinburgh. 8°.

Proc. L. M. S.: Proceedings of the London Mathematical Society. London. 8°.

Proc. of London: Proceedings of the Royal Society of London. London. 8°.
Proc. of Manch.: Proceedings of the litterary and philosophical Society of Manchester. Manchester.
Proc. of R. S. Victoria: Proceedings of the Royal Society of sciences. Victoria.
Quart. J.: The Quarterly Journal of pure and applied mathematics. Edited by Sylvester and Ferrers. London. 8°.
Quart. J. of Science: The Quarterly Journal of Science and Annales of Mining, Metallurgy, Engineering, Industrial Arts and Technology. Edited by William Crookes. London. 8°.
Rend. di Bol.: Rendiconti dell' Accademia Reale di scienze dell' Istituto di Bologna. Bologna.
Rend. Ist. Lomb.: Reale Istituto Lombardo di scienze e lettere. Rendiconti. Milano. 8°.
Rend. di Napoli: Rendiconti dell' Accademia delle scienze fisiche e matematiche di Napoli. Napoli. 4°.
Rep. Brit. Ass.: Reports of the meeting of the British Association for the advancement of science. London. gr. 8°.
Rev. d'Art.: Revue d'Artillerie paraissant le 15. de chaque mois. Paris.
Rev. de l'instr. publ.: Revue de l'instruction publique de Belgique. Gand. 8°.
Riv. Eur.: Rivista Europea. Rivista internazionale. Firenze. 8°.
Riv. Mar.: Rivista Maritima. Roma. Tipografia Barbera. 8°.
Riv. per.: Rivista periodica dei lavori della R. Accademia di scienze, lettere ed arti in Padova. Redattore G. Orsolato. Padova. Randi. 8°.
Riv. scient. ind.: Rivista scientifico-industriale delle principali scoperte ed invenzioni fatte nelle scienze e nelle industrie, compilata da G. Vimercati. Firenze. 8°.
R. Q. S.: Revue des questions scientifiques. Bruxelles.
Rundsch. d. Vers.: Rundschau des Versicherungswesens. Leipzig.
Schlömilch Z.: Zeitschrift für Mathematik und Physik, herausgegeben unter verantwortlicher Redaction von Schlömilch, Kahl und Cantor. Leipzig. Teubner. 8°.
Hl. A.: Historisch-literarische Abtheilung (besonders paginirt).
Soc. dei XL.: Memorie di matematica e fisica della Società Italiana (dei XL.). Firenze. 4°.
Soc. Phil. Paris: Bulletin de la Société Philomatique de Paris. Paris. 8°.
Tagebl. d. Naturforschervers.: Tageblatt der Versammlungen der deutschen Naturforscher und Aerzte.
Trans. of Cambr.: Transactions of the Philosophical Society of Cambridge. Cambridge.
Trans. of Conn.: Transactions of the Connecticut Academy of arts and sciences. New-Haven.
Trans. of Dublin: Transactions of the Royal Irish Academy. Dublin.
Trans. of Edinb.: Transactions of the Royal Society of Edinburgh. Edinburgh. 4°.
Upsala Afh.: Akademiens Afhandlingar. Upsala.
Ungar. Ak.: Berichte der Ungarischen Akademie der Wissenschaften.
Ups. Arsskr: Upsala Universitets Årsskrift. Upsala. 8°.
Verh. v. Amst.: Verhandlingen der Koninklijke Akademie van Wetenschapen Amsterdam.
Verh. d. naturf. Ver. zu Karlsruhe: Verhandlungen des naturforschenden Vereins zu Karlsruhe. Karlsruhe.
Verh. d. naturf. Ver. d. pr. Rheinl. u. Westph.: Verhandlungen des naturforschenden Vereins der preussischen Rheinlande und Westphalens.

Versl. en Mededeel.: Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschapen. Afdeeling Natuurkunde. Amsterdam.

Vidensk. Selskab. i Kjbhn.: Videnskabs Selskabs Skrifter, naturvidenskabelig og mathematisk Afdeling. Kopenhagen.

Warsch. Jahrb.: Jahrbuch wissenschaftlicher Arbeiten von Warschauer Studenten. Warschau.

Wien. Anz.: Anzeigen der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien. Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse. Wien. 8⁰.

Wien. Ber.: Sitzungsberichte der mathem.-naturwissenschaftlichen Klasse der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu Wien. Zweite Abtheilung. Wien. 8⁰.

Wien. Denkschr.: Denkschriften der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse. Wien. 4⁰.

Wolf Z.: Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich von R. Wolf. Zürich. 8⁰.

Z. dtsch. Ing.: Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, herausgegeben von Ziebarth. Berlin. 4⁰.

Zeitschr. f. d. Realsch.: Zeitschrift für das Realschulwesen in Oesterreich.

Z. f. Verm.: Zeitschrift für Vermessungswesen, herausgegeben von W. Jordan.

Zeuthen Tidsskr.: Tidsskrift for Mathematik. Udgivet af Zeuthen. Kopenhagen. 8⁰.

Inhaltsverzeichnis.

(Die mit einem † versehenen Arbeiten sind ohne Referate.)

Erster Abschnitt. Geschichte und Philosophie.

Capitel 1. Geschichte.

A. Biographisch-Literarisches.

B. Geschichte einzelner Disciplinen.

Capitel 2. Philosophie (Methodik, Pädagogik).

Zweiter Abschnitt. Algebra.

Capitel 1. Gleichungen. (Allgemeine Theorie. Besondere algebraische und transcendente Gleichungen.)

Capitel 2. Theorie der Formen.

Capitel 3. Elimination und Substitution, Determinanten, symmetrische Functionen.

Dritter Abschnitt. Zahlentheorie.

Capitel 1. Allgemeines.

Fünfter Abschnitt. Reihen.

Capitel 1. Allgemeines.

Capitel 2. Besondere Reihen.

Seite

Sechster Abschnitt. Differential- und Integralrechnung.

Capitel 1. Allgemeines (Lehrbücher etc.).

Capitel 2. Differentialrechnung. (Differentiale, Functionen von Differentialen, Maxima und Minima).

Capitel 3. Integralrechnung.

Capitel 4. Bestimmte Integrale.

Capitel 5. Gewöhnliche Differentialgleichungen.

Capitel 6. Partielle Differentialgleichungen.

Capitel 2. Besondere Functionen.

Achter Abschnitt. Reine, elementare und synthetische Geometrie.

Capitel 1. Principien der Geometrie.

Capitel 2. Continuitätsbetrachtungen (Analysis situs).

Capitel 3. Elementare Geometrie. (Planimetrie. Trigonometrie. Stereometrie.)

Capitel 4. Darstellende Geometrie.

Capitel 5. Neuere synthetische Geometrie.

A. Ebene Gebilde.

B. Räumliche Gebilde.

C. Abzählende Geometrie.

Neunter Abschnitt. Analytische Geometrie.

Capitel 1. Coordinaten.

Capitel 2. Analytische Geometrie der Ebene.

A. Allgemeine Theorie der ebenen Curven.

B. Theorie der algebraischen Curven.

C. Gerade Linie und Kegelschnitte.

D. Andere specielle Curven.

Capitel 3. Analytische Geometrie des Raumes.

A. Allgemeine Theorie der Flächen und Raumcurven.

Capitel 2. Kinematik.

Capitel 3. Statik.

A. Statik fester Körper.

B. Hydrostatik.

Capitel 4. Dynamik.

A. Dynamik fester Körper.

B. Hydrodynamik.

Capitel 5. Potentialtheorie.

Elfter Abschnitt. Mathematische Physik.

Capitel 1. Molecularphysik, Elasticität und Capillarität.

Capitel 2. Akustik und Optik.

Capitel 3. Elektricität und Magnetismus.

Capitel 4. Wärmelehre.

Zwölfter Abschnitt. Geodäsie und Astronomie.

Capitel 1. Geodäsie.

Capitel 2. Astronomie.

Seite

Anhang.

Verzeichnis

der Herren, welche für den elften Band Referate geliefert haben.

(Die Verantwortlichkeit für den Inhalt der Referate tragen die Herren Referenten. Die in Klammern gesetzten Chiffern bezeichnen die Uebersetzer der in fremder Sprache eingesandten Referate).

A.	Herr	Prof. August in Berlin.
B.	-	Prof. Bruns in Berlin.
Bcki.	-	Prof. Baraniecki in Warschau.
Bg.	-	Prof. Björling in Lund.
Bj.	-	Prof. Bjerknes in Christiania.
B. K.	-	Dr. B. Klein in Giessen.
Bl.	-	Prof. Brill in München.
Bn.	-	Dr. Biermann in Berlin.
Bw.	-	Prof. Bobylew in Petersburg.
Cly.	-	Prof. Cayley in Cambridge.
Csy.	-	Prof. Casey in Dublin.
Dn.	-	Dickstein in Warschau.
G.	-	Prof. v. Geer in Leiden.
Glr.	-	Prof. Glaisher in Cambridge.
Gm.	-	Dr. Gram in Kopenhagen.
Gr.	-	Prof. Günther in Ansbach.
H.	-	Prof. Hoppe in Berlin.
Hr.	-	Dr. Hamburger in Berlin.
H.St.	-	H. Stahl in Berlin.
L.	-	Prof. Lie in Christiania.
Ls.	-	Lazarus in Hamburg.
M.	-	Dr. F. Müller in Berlin.
Mi.	Herr	Dr. Michaelis in Berlin.
M-L.	-	Prof. Mittag-Leffler in Stockholm.
Mn.	-	Prof. Mansion in Gent.
Mz.	-	Dr. Maynz in Ludwigslust.
No.	-	Prof. Netto in Strassburg.
Nr.	-	Prof. Nöther in Erlangen.
O.	-	Dr. Ohrtmann in Berlin.
Ok.	-	Prof. Oberbeck in Halle a. S.
P.	-	Dr. v. Posse in Petersburg.
Rs.	-	Dr. Rosochatius in Berlin.
Sch.	-	Prof. Schering in Göttingen.
Schg.	-	Dr. Schlegel in Waren.
Schl.	-	Dr. Schemmel in Berlin.
Schn.	-	Dr. Schumann in Berlin.
Scht.	-	Dr. Schubert in Hamburg.
Sm.	-	Prof. Sturm in Münster i. W.
St.	-	Prof. Stolz in Innsbruck.
Std.	-	Prof. Studnička in Prag.
T.	-	Dr. Toeplitz in Breslau.
V.	-	Prof. Voss in Dresden.
Wn.	-	Prof. Wangerin in Berlin.

Briefe und Zusendungen erbitten wir entweder durch Vermittelung der Verlagshandlung oder unter der Adresse:

Dr. C. Ohrtmann, Berlin SW, Markgrafenstr. 78. III.

Berichtigungen.

Band IX.

Seite 848 Zeile 10 von oben lies 224 statt 229.

Band X.

„ 5	„ 3	„ unten	„	in der Formel im Zähler $+i$ statt $+h$.
„ 49	„ 15	„ oben	„	$\Sigma \frac{u_n}{y^n}$ statt $\Sigma \frac{u^n}{y^n}$.
„ 130	„ 17	„ „	„	Primtalraekken statt Primtalrokken.
„ 192	„ 5	„ unten	„	$2^{196} = 10^{59}\ldots$ statt $2^{196} = 10^{59}$.
„ 370	„ 13	„ „	„	Amorim statt Amarim.
„ 370	„ 13	„ „	„	demonstração statt demonstracao.
„ 370	„ 12	„ „	„	sobre a tóro statt solue a toro.
„ 377	„ 1	„ oben	„	Determinação statt Determinacao.
„ 377	„ 2	„ „	„	da projecção statt du projeccas.
„ 504	„ 10	„ unten	„	das statt dos.
„ 610	„ 7	„ oben	„	T. C. Lewis statt J. C. Lewis.

Band XI.

„ 214	„ 4	„ oben	„	$\frac{1}{5^{2n+1}} + \frac{1}{7^{2n+1}}$ statt $\frac{1}{5^{2n+2}} + \frac{1}{7^{2n+2}}$.
„ 217	„ 14	„ „	„	θ_n statt θ.
„ 412	„ 4	„ „	„	$\binom{2n}{n-1}$ statt $\binom{n-1}{2n}$.
„ 414	„ 13	„ „	„	Höhenpunkte statt Höhenschnitte.
„ 414	„ 15	„ „	„	erfüllen statt umhüllen.
„ 425	„ 2	„ „	„	dasselbe statt derselbe.
„ 426	„ 10	„ „	„	aus den Ecken statt die Ecken.
„ 426	„ 4	„ unten	„	zweiter statt zwölfter.
„ 429	„ 10	„ oben	„	wenn statt weil.
„ 429	„ 14	„ unten	„	von G statt von P.
„ 434	„ 7	„ „	„	H. Vogt statt A. Voigt.
„ 440	„ 15	„ oben	„	die Centralebene statt der Centralebene.
„ 442	„ 2	„ unten	„	desselben statt derselben.
„ 446	„ 16	„ oben	„	einfache statt einfachste.
„ 486	„ 2	„ unten	„	vier statt neun.
„ 487	„ 18	„ oben	„	Rosanes statt Reye.

Inhaltsverzeichniss.

Seite

Sechster Abschnitt. Differential- und Integralrechnung.

Siebenter Abschnitt. Functionentheorie.

Ausführliches Inhaltsverzeichniss und Namenregister folgen am Schlusse des Bandes.

Briefe und Zusendungen erbitten wir entweder durch Vermittelung der Verlagshandlung oder unter der Adresse:

Dr. C. Ohrtmann, Berlin S.W., Markgrafenstr. 78. III.

Erster Abschnitt.

Geschichte und Philosophie.

Capitel 1.

Geschichte.

A. Biographisch-Literarisches.

A. Favaro. Sulla interpretazione matematica del Papiro Rhind pubblicato ed illustrato dal Prof. Augusto Eisenlohr. Modena. Società tipografica.

Eingehender Bericht über die treffliche deutsche Ausgabe des berühmten mathematischen Papyrus. Der Verfasser behandelt die Zerlegung in Stammbrüche, die Auflösung linearer Gleichungen, das stereometrische Problem der Inhaltsbestimmung, die Kreisquadratur, die falsche Flächenformel für das Viereck, die Anfänge trigonometrischen Calculs, welche bei der Discussion der Pyramide auftreten, und endlich die Summation der arithmetischen Reihen. Sehr angenehm ist, dass der Verfasser sich nicht auf eine blosse Inhaltsangabe beschränkt, sondern auch die Arbeiten anderer Gelehrten über altägyptische Mathematik sorgfältig berücksichtigt. Gr.

G. B. Halsted. Note on the first english Euclid.
Am. J. II. 46-48.

Nachrichten über ein in Princeton College gefundenes Exemplar des Euclid, nebst literarischen Notizen über die ältesten Uebersetzungen desselben. O.

J. L. Heiberg. Quaestiones Archimedeae.
Hauniae. Rudolph Klein.

Während die Geometer der neueren Zeit schon längst den Mathematikern des Alterthums die verdiente Aufmerksamkeit gewidmet haben, sind dieselben dagegen von den Philologen sehr vernachlässigt worden. In Rücksicht auf Correctheit lassen die Texte der berühmten griechischen Verfasser deshalb auch viel zu wünschen, und jeder Versuch, dieselben einer kritischen Bearbeitung zu unterwerfen, verdient deshalb die volle Aufmerksamkeit der Mathematiker. Die vorliegende Abhandlung ist eine Arbeit in dieser Richtung. Sie ist als Doctordissertation erschienen und zunächst als eine Einleitung zu einer beabsichtigten neuen Ausgabe von Archimedes' Werken zu betrachten. Als Probe einer solchen ist am Schlusse des Buches der Text der Abhandlung *ψαμμίτης*, mit kritischen Noten versehen, beigefügt. Die eigentliche Abhandlung theilt sich in sechs Kapitel. I. De vita Archimedis. II. De scriptis Archimedis. III. De machinis Archimedis. IV. De arithmeticis Archimedis. V. De dialecto Archimedis. VI. De re critica. Der unter diesen in mathematischer Beziehung besonders bemerkenswerthe Abschnitt ist der vierte, in welchem der Verfasser eine sehr interessante Uebersicht über die von Archimedes angewandten arithmetischen Methoden mittheilt. So werden erwähnt die Gleichheiten oder Ungleichheiten aus der Proportionslehre, welche Archimedes in seinen verschiedenen Schriften benutzt hat, ferner seine Behandlung von Reihen, sowohl arithmetischen als geometrischen. Seiner Berechnung von π wird besondere Aufmerksamkeit gewidmet, insbesondere interessirt hier die Frage nach der Berechnung von $\sqrt{3}$, über welche mehrere Hypothesen aufgestellt worden sind, welche vom Verfasser angeführt

werden. Danach wird das bekannte Problem von den Ochsen des Helios erwähnt, dessen Lösung doch sicher die Kräfte des Archimedes überstieg. Als Hauptresultat dieser interessanten Darstellung ergiebt sich, dass Archimedes ausser den von Euklides mitgetheilten arithmetischen Sätzen auch noch im Besitz anderer Methoden gewesen ist, bei welchen er ein Verfahren benutzt haben mag, das gewissermassen unserer heutigen Arithmetik ähnlich war. Gm.

J. L. Heiberg. Einige von Archimedes vorausgesetzte elementare Sätze. Schlömilch Z. XXIV. Hl. A. 177-182.

Es werden hier alle diejenigen geometrischen Theoreme zusammengestellt, welche bei Archimedes, nicht aber bei Euklides vorkommen und dabei von Ersterem nicht ausdrücklich als geistiges Eigenthum bezeichnet werden. Es sind sechszehn planimetrische und vier stereometrische Sätze, wesentlich elementarer Natur, die zum Theil wohl ein ziemlich hohes Alter besitzen. Andere freilich, wie jene über die von Euklides noch gar nicht behandelten Mittellinien des Dreiecks, gehören vermuthlich der archimedischen Periode selber an. Gr.

H. G. Zeuthen. Nogle Hypotheser om Arkhimedes Kvadratrodsberegning. Zeuthen Tidsskr. (4) III. 145-155.

Bei der mündlichen Verhandlung über die oben besprochene Abhandlung von Heiberg entspann sich unter den Mathematikern eine lebhafte Discussion über die Frage, wie Archimedes zu den Näherungswerthen $\frac{1351}{780} > \sqrt{3} > \frac{265}{153}$ gelangt sei. Neben den von Heiberg angeführten drei Hypothesen von de Lagny (Mém. de l'acad. d. Sc. 1723), Mollweide (Commentatio mathematica philologica, Leipzig 1808, von Gauss recensirt in Gött. gel. Anz. 1808), und Oppermann (Vidensk. Selsk. Forh. 1875, s. F. d. M. VII. 253) wurden noch zwei neue Hypothesen von Steen und Zeuthen mitgetheilt. Alle diese fünf Hypothesen sind in dem Artikel

zusammengestellt. Prof. Steen nimmt an, dass Archimedes zur Einschaltung neuer Näherungsbrüche zwischen zwei bekannte den Satz $\frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+d} > \frac{c}{d}$ benutzt habe, verbunden mit einer Probe, ob die so erhaltene neue Grenze eine obere oder untere sei. Geht man davon aus, dass $\frac{2}{1} > \sqrt{3} > \frac{1}{1}$, so kann man auf diese Weise die von Archimedes angegebenen Grenzen bekommen, ebenso wie diese Methode auch zu den richtigen Werthen von anderen Quadratwurzeln führt. Die Hypothese von Zeuthen beruht auf der folgenden Betrachtung. Da die Auflösung der Gleichung $x^2 - 3y^2 = 0$ in ganzen Zahlen unmöglich ist, könnte man sich Näherungsbrüche bei der Auflösung der unbestimmten Gleichungen $x^2 - 3y^2 = 1$ und $3y^2 - x^2 = 2$ verschaffen. Bei Euklides findet sich aber eine Methode zur Ableitung von neuen Lösungen der Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ aus einer bekannten derselben, und es scheint nicht unwahrscheinlich, dass ebenfalls das sehr nahe liegende Verfahren, durch die Substitution $a = 3m^2$, $b = n^2$ in der Identität

$$ab + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

sich aus einer Lösung der Gleichung: $3m^2 - n^2 = 2$ Lösungen der ersten Gleichung zu verschaffen, dem Archimedes bekannt gewesen ist. Eine ähnliche Substitution giebt die summativen Lösungen der Gleichung $m^2 - 3n^2 = 1$. Bei solchem Verfahren gelangt man fast unmittelbar zu den von Archimedes angeführten Grenzen. Diese Hypothese, welche nur Methoden fordert, die allerdings zur Verfügung des Archimedes gestanden haben können, gewinnt an Wahrscheinlichkeit dadurch, dass die erwähnten Gleichungen zu der Klasse von unbestimmten Gleichungen gehören, welche von Diophantus behandelt sind.

Gm.

F. Hultsch. Pappi Alexandrini collectiones quae supersunt e libris manu scriptis edidit latina interpreta-

tione et commentariis instruxit F. H. Vol. I., II., III., IV. (Vorrede zu diesen vier Bänden, in's Lateinische übertragen von A. Sparagna). Boncompagni Bull. XII. 333-344.

Diese Einleitungen enthalten Notizen über ältere Pappus-Ausgaben, sowie über die bei der neuen Bearbeitung benutzten handschriftlichen Materialien. Auch wird der Inhalt jedes einzelnen Buches in sehr übersichtlicher Weise angegeben.

Gr.

C. Henry. Opusculum de multiplicatione et divisione sexagesimalibus Diophanto vel Pappo attribuendum primum edidit et notis illustravit C. H. Halis Saxonum.

In Schlömilch Z. XXIV. Hl. A. 199-203 befindet sich eine Besprechung des Pariser Codex, den Herr Henry hier zum Abdruck gebracht hat. Der Verfasser derselben, Herr F. Hultsch, macht auf die grosse Unzuverlässigkeit dieser Pariser Handschrift aufmerksam.

O.

P. Tannery. A quelle époque vivait Diophante? Darboux Bull. (2) II. 261-269.

Die Thatsache, dass durch Usener und Hultsch die Lebenszeit des Pappus aus dem fünften nachchristlichen Jahrhundert in das bisher für sehr capacitätenarm gehaltene dritte verlegt ward, regte den Verfasser an, auch das Zeitalter Diophant's einer neuen Untersuchung zu unterwerfen. Er erblickt in diesem Mann nicht sowohl den genialen und originellen Zahlentheoretiker, für welchen ihn die Meisten bisher hielten, sondern mehr einen gelehrten Sammler, der sein Werk compilirt und nicht aus Einem Gusse geschaffen habe. Es handelt sich nun darum, die fragliche Epoche zwischen zwei Grenzen einzuschränken. Da Diophant den Hypsikles citirt, so lebte er jedenfalls nach 200 v. Chr. G.; andererseits wird er von Theon Alexandrinus (365-390 n. Chr. G.) citirt, und damit wäre die untere Grenze gegeben. Das bekannte

Epigramm der griechischen Anthologie ist für eine genaue Zeitbestimmung unbrauchbar. Auch Montucla's Hypothese, Diophant habe zur Zeit Julian's des Apostaten gelebt, nicht minder die Bachet's, er sei Astrolog und Zeitgenosse Nero's gewesen, ist zu verwerfen. Ramus verlegte ihn in die Zeit des Antoninus Pius, allein dafür ist als einziger Grund anzuführen, dass in einer griechischen Handschrift über Musik ein gewisser *Λεόφαντος* — und das ist allerdings zweifellos eine Verketzerung von *Διόφαντος* — nach Nicomachus und vor Didymus genannt wird. Wer jedoch bürgt dafür, dass diese Reihenfolge eine chronologische ist? Einen neuen Gesichtspunkt endlich hat man dieser Abhandlung selbst zu danken. Herr Tannery betont nämlich, dass nur eine einzige Aufgabe des diophantischen Werkes an Verhältnisse des praktischen Lebens, Preise verschiedener Weinsorten u. s. w., anknüpfe; diese Preis- und Massverhältnisse passen nun am besten auf die Regierungsperiode des Diocletian, und so würde die Blüthezeit des grossen Arithmetikers etwa in die zweite Hälfte des dritten Jahrhunderts unserer Aera fallen; Pappus und Diophant wären Coaetanen.

Gr.

H. Weissenborn. Die Boetius-Frage. Schlömilch Z. XXIV. Suppl. Hl. A. 187-240.

Man findet in dieser Abhandlung eine sorgfältige Zusammenstellung aller Gründe, welche, im Einklang mit der von Friedlein und im Gegensatz zu der von Cantor vertretenen Ansicht, für die Unechtheit der dem Boetius zugeschriebenen Geometrie sprechen. Es wird zugestanden, dass Boetius ein solches Buch schreiben wollte, wogegen aus den Quellen keine volle Sicherheit darüber zu erlangen ist, ob er diese seine Absicht auch wirklich ausführte. Weiter wird darzuthun versucht, dass der Inhalt, welchen man in einer echten Geometrie aus den nachweislich echten Schriften über Arithmetik und Musik nach Analogiegründen zu finden erwarten dürfte, von dem thatsächlichen Inhalt beträchtlich abweiche. Die sehr eingehende und streng sachliche Kritik, mit deren Einzelnheiten Referent nicht überall einverstanden ist, kann

hier natürlich nicht reproducirt werden, vielmehr müssen wir uns begnügen, deren Resultat mitzutheilen, welches folgendermassen lautet: Wir haben in dieser Schrift nicht ein Werk des Boetius, sondern dasjenige eines, wie der Inhalt zeigt, unwissenden und, wie die Form beweist, in der Darstellung ungeschickten Fälschers vor uns. Anzuerkennen ist, dass, während Friedlein's Argumentation wesentlich blos an den Abakus und dessen eigenthümliche Zahlzeichen anknüpfte, diejenige von Weissenborn alle Momente umsichtig zu verwerthen bestrebt ist. Gr.

A. Hochheim. Al Kâfî fîl Hisâb (Genügendes über Arithmetik) des Abu Bekr Muhammed Ben Alhusein Alkarkhî nach der auf der herzoglich-gothaischen Schlossbibliothek befindlichen Handschrift bearbeitet. I. 1879. II. 1879. III. 1880. Pr. Magdeburg. Halle a. S. Louis Nebert.

Das algebraische Lehrbuch des Alkarkhî, den Fakhrî, hat bereits früher Wöpcke uns zugänglich gemacht, und es ist schon damals der Wunsch nach einer Bearbeitung der Arithmetik laut geworden. Es ist deshalb sehr dankenswerth, dass Herr Hochheim uns mit der Uebersetzung dieses einleitenden Werkes beschenkte. Diese Uebersetzung selbst ist eine wortgetreue, indess helfen zahlreiche erläuternde Noten unter dem Texte dem Verständniss in vollkommen genügender Weise nach.

In der ersten der drei Abtheilungen, in welche das Ganze zerfällt, ist besonders der Abschnitt über die astronomische Logistik (Thierkreisrechnung) und über die Auflösung von Brüchen in eine Summe von Einheits- oder Stammbrüchen von Interesse. Die Technik dieser Stammbrüche und ihre Transformation in den vier Species erfüllt die erste Hälfte der zweiten Abtheilung; daran schliesst sich die Ausziehung der Quadratwurzel, welche wesentlich an das griechische Vorbild (Ptolemaeus, Theon) sich anlehnt, und die Rechnung mit Proportionen. Es folgen die Grundzüge der rechnenden Geometrie, welche sich auf Rechteck, Trapez, Dreieck — Heron'scher Lehrsatz — und Kreis

erstrecken. Auch das ptolemäische Theorem vom Sehnenviereck ist dem arabischen Autor bekannt; nicht minder werden die wichtigsten Körperformen, inclusive Kegelstumpf, kubirt. Die Schlussabtheilung verharrt noch kurz bei der Körperberechnung und giebt dann einen kurzen Abriss der Nivellirkunde. Hierauf aber beginnt die Algebra, in welcher Alkarkhî mit Recht die Krönung des Gebäudes betrachtet. Er lehrt unter der Ueberschrift „die sechs algebraischen Formen“ die Rechnung mit Polynomen, und zwar nicht blos mit rationalen, sondern auch mit irrationalen; so kommt z. B. auch die sogenannte Transformation des surdischen Binomens

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{a + b \pm \sqrt{4ba}}$$

vor. Die eigentlich so genannte „Aldschabr“ hält sich bei den linearen Gleichungen nur kurz auf, behandelt aber sehr eingehend die quadratischen, unter denen u. a. auch das für die arabischen Algebraiker traditionelle Beispiel $x^2 + 10x = 39$ erscheint. Hieran schliessen sich zahlreiche Textaufgaben, grossentheils der Theilungs- und Mischungsrechnung entnommen. Schliesslich giebt der Autor noch einige verwickelte geometrische Probleme, welche mit Hülfe der Algebra gelöst werden; es sind zum Theil dieselben, denen man schon bei den Indern begegnet. Herr Hochheim erörtert in einem kurzen Begleitwort den wissenschaftlichen Werth der von ihm übersetzten Schrift und weist nach, dass die Materialien zu jener sowohl griechischen als auch indischen Quellen entnommen sind. In dieser ihrer gemischten Abstammung liegt auch wesentlich die Bedeutung, welche Alkarkhi's Arithmetik für die vergleichend-geschichtliche Forschung der Neuzeit besitzt (vergl. Cantor's Recension im literarischen Centralblatt).

Gr.

E. Wiedemann. Zur Geschichte Abû'l Wefâ's.
Schlömilch Z. XXIV. Hl. A. 121-122.

Wöpcke hatte in seinen biographischen Notizen über Abû'l Wefâ, den bekannten Entdecker der Mond-Variation, des Umstandes erwähnt, dass zwei seiner Oheime sich von ihm „in

praktischer und spekulativer Arithmetik“ hätten unterweisen lassen. Dies ist, wie hier gezeigt wird, nicht richtig, vielmehr ist das Umgekehrte der Fall. Der Genannte war der Schüler je eines Oheims von väterlicher und mütterlicher Seite. Gr.

T. Zebrawski. Quelques mots au sujet de la note de M. Maximilien Curtze sur l'orthographie du nom et la patrie de Witelo. Boncompagni Bull. XII. 315-317.

Die Note ist gegen die im Bd. III. der F. d. M. p. 4 besprochene Arbeit Curtze's gerichtet. Herr Zebrawski hält für richtig die Schreibart Witek und plaidirt für die polnische Nationalität desselben. O.

A. Favaro. Intorno alla vita ed alle opere di Prosdocimo de' Beldomandi, matematico Padovano del secolo XV. Boncompagni Bull. XII. 1-74, 115-251.

Die Arbeit ist in 6 Abschnitte getheilt. Abschn. I. p. 4-40 beschäftigt sich mit der Familie und mit anderen äusseren Verhältnissen des Prosdocimo de' Beldomandi. Danach ist er zwischen 1370 und 1380 in Padua geboren und 1428 gestorben. Er studirte wahrscheinlich in Padua, und wird auch dort als Lehrer der Astrologie, Astronomie und Mathematik bezeichnet. Abschn. II. p. 41-74, 115-166 behandelt in eingehendster Weise den „Tractatus algorismi.“ In Abschn. III. p. 167-170, IV. p. 171-221 finden sich dann weitere Schriften über Geometrie, Astronomie (De motibus corporum supercoelestium) besprochen. Abschn. V. endlich bespricht die Leistungen des Prosdocimo auf dem Gebiete der Musik. Die äusserst umfangreiche Arbeit ist voll literarisch-culturhistorischer Notizen, auf die hier näher einzugehen uns der Zweck des Jahrbuchs verbietet. O.

M. Steinschneider. Intorno a Johannes de Lineriis (de Liveriis) e Johannes Siculus. Boncompagni Bull. XII. 345-351.

Professor Favaro hatte in seiner grossen Monographie über den Paduaner Mathematiker Prosdocimo de' Beldomandi auch der Arbeiten eines gewissen Johannes de Lineriis zu erwähnen gehabt; da ihm aber Zweifel über den Ursprung derselben erwuchsen, glaubte er zwei Personen dieses Namens annehmen zu müssen. Diese Hypothese scheint Herrn Steinschneider nicht sicher. Er glaubt constatiren zu können, dass Johann de Ligneriis (so lautet der Name eigentlich) im ersten Drittel des vierzehnten Jahrhunderts gelebt und eine Bearbeitung der alphonsinischen Tafeln (reducirt auf den Meridian von Paris) veröffentlicht habe. Nach Rico de Sinobas habe er im Jahre 1263 bei der Uebertragung arabischer Werke mitgewirkt, allein diese Ansicht ist unhaltbar. Nun wird auch von einem Johannes de Liveriis oder Johannes Siculus berichtet; ob derselbe aber wirklich eine Person für sich gewesen oder ob nur eine Verketzerung des „Lineriis“ in „Liveriis“ stattgefunden, das erscheint eben dem Verfasser zweifelhaft, und persönlich entscheidet er sich für Letzteres. In einem Postscript werden noch weitere Nachweisungen über Johannes beigebracht, von denen besonders diejenige Beachtung verdient, nach welcher der belgische Astronom Wendelin im siebzehnten Jahrhundert die Blüthezeit des Magister Joannes de Linerijs Picardus Ambianensis Dioecesis in das Jahr 1350 verlegte. Weitere Bemerkungen über Favaro's Schrift beschliessen die Abhandlung. Gr.

B. Boncompagni. Intorno alle vite inedite di tre matematici (Giovanni Danck di Sassonia, Giovanni di Lineriis e Fra Luca Pacioli da Borgo San Sepolcro), scritte da Bernardino Baldi. Boncompagni Bull. XII. 352-420, 863-873.

B. Baldi. Vite inedite di tre matematici (Giovanni Danck di Sassonia, Giovanni di Lineriis e Fra Luca Pacioli da Borgo San Sepolcro). Boncompagni Bull. XII. 420-428.

Appendice di documenti inediti relativi a Fra Luca Pacioli. Boncompagni Bull. XII. 428-439.

Unter den Handschriften, die sich im Besitze des Fürsten Boncompagni befinden, sind drei, welche Lebensbeschreibungen von Mathematikern enthalten. Darunter sind auch die im Titel genannten. Herr Boncompagni theilt in den erst citirten Arbeiten die nöthigen literarischen Notizen, sowie die sonst über jene drei Mathematiker bekannten Nachrichten mit. Die zweite Arbeit ist ein Abdruck der drei Lebensbeschreibungen von B. Baldi. Endlich sind in der dritten citirten Arbeit bis dahin unedirte Documente abgedruckt. O.

DÖDERLEIN. Sebastian Münster, ein Wiedererwecker des Ptolemaeus. Bair. Bl. XV. 396-400, 433-441.

Die erste Abtheilung dieses Aufsatzes beschäftigt sich mit dem mathematischen und kartographischen Theile der Münster'schen Kosmographie. Es wird gezeigt, dass Münster sich in allen Hauptsachen nach den guten ptolemäischen Vorbildern richtete und nur in der Orientirung der einzelnen Karten, nicht grade zum Vortheil seines Werkes, von jenen abwich. Das geographische Gerippe der Erdtheile ist verhältnissmässig richtig gegeben, auch das Detail ist sehr vollständig, und nur die landläufige sonderbare Zeichnung der Flusssysteme wirkt störend. Die Fortsetzung Döderlein's ist wesentlich der Schilderung von Münster's politischer Geographie gewidmet, indess wird man auch nicht ohne Interesse von den Ansichten Kenntniss nehmen, welche sich der deutsche Kosmograph über die Erdbeben (Explosion comprimirter Erdluft), über die angeblichen Magnetinseln, über Gletscherbildung u. s. w. erworben hatte. Auch die Art und Weise seiner Mappirung wird kurz beschrieben.

Gr.

S. GÜNTHER. Malagola's und Curtze's neue Forschungen über Copernicus, sein Leben und seine Lehre. Dresden. E. Blochmann und Sohn. Leopold. 1879.

A. Favaro. Intorno ad alcune notizie inedite relative a Niccolo Coppernico raccolte e pubblicate del Prof. Massimiliano Curtze. Boncompagni Bull. XII. 775-807.

Bericht über die letzten Copernicus betreffenden Publicationen Curtze's, über die früher im Jahrbuch berichtet worden ist.

O.

Nicolaus Coppernicus aus Thorn über die Kreisbewegungen der Weltenkörper. Uebersetzt und mit Anmerkungen versehen von C. L. Menzzer. Durchgesehen und mit einem Vorwort von M. Cantor. Herausgegeben von dem Coppernicusverein für Wissenschaft und Kunst zu Thorn. Thorn. Lambeck. 8°.

C. v. Gebler. Galileo Galilei e la curia Romana. Traduzione di G. Prato. Firenze. Successori Le Monnier. 8°.

F. H. Reusch. Der Process Galilei's und die Jesuiten. Bonn. Weber.

E. Wohlwill. Der Original-Wortlaut des päpstlichen Urtheils gegen Galilei. Schlömilch Z. XXIV. Hl. A. 1-26.

Die vorliegende Arbeit enthält weitere Untersuchungen über den Process Galilei's auf Grund neuerer Mittheilungen von Gherardi und anderer früher in diesem Jahrbuch besprochener Publicationen. Herr Wohlwill fasst das Resultat in Beziehung auf die Torturfrage in folgenden Worten zusammen: „Es ist den Enthüllungen von Silvester Gherardi mit voller Sicherheit zu entnehmen, dass am 16. Juni 1633 vom Papst und von der Congregation der Beschluss gefasst worden, Galilei unter Androhung der Tortur dem *Examen de intentione* zu unterwerfen und ihn, falls er dabei bliebe, die Copernicanische Gesinnung zu verleugnen, zu weiterem Verfahren in die Folterkammer abzuführen. Es ist durch die Sentenz verbürgt, dass diesem Beschluss gemäss

seine Abführung in die Folterkammer stattgefunden hat. Die Actenstücke des Vaticanmanuscripts, die in vollem Widerspruche mit dem Originaldekret und dem Bericht der Sentenz behaupten, dass am 16. Juni befohlen worden, sich unter allen Umständen auf die Bedrohung mit der Tortur zu beschränken, und dass am 21. Juni demgemäss verfahren sei, sind aus inneren und äusseren Gründen einer in neuerer Zeit erfolgten Fälschung dringend verdächtig. Die Mittheilungen Gherardi's deuten an, dass für die systematische Bearbeitung des Vaticanmanuscripts in allen die Torturfrage berührenden Theilen die Umgestaltung des Originaldecrets vom 16. Juni durch Streichungen den Ausgangspunkt gebildet hat." O.

P. Riccardi. Nuovi materiali per la storia della facoltà matematica nell' antica università di Bologna.
Boncompagni Bull. XII. 299-312.

Der Verfasser prüft, auf Grund von Briefen an Galilei, Cavalieri's Meinung über das copernicanische System. In einem Anhang findet sich eine Uebersicht von Vorlesungen Cavalieri's in Bologna während der Jahre 1642 bis 1645. O.

Feestgave van het wiskundig genootschap te Amsterdam onder de zinspreuk: „een onvermoeide arbeid komt alles te boven", ter gelegenheid der viering van zijn honderdjarig bestaan. Haarlem Joh. Enschedé en Zonen.

J. C. Matthes. Feestrede ter gelegenheid van het honderdjarig bestaan van het wiskundig genootschap onder de zinspreuk: „een onvermoeide arbeid komt alles te boven" gehouden den 3. Mei 1879.
Amsterdam, Weyting und Brave.

Die genannte mathematische Gesellschaft hat ihren Sitz in Amsterdam, hat jedoch Mitglieder in allen Theilen der Niederlande und giebt auch eine eigene Zeitschrift (Archief voor Wis-

kunde) heraus. Sie feierte am 3. Mai ihr hundertjähriges Bestehen. Als Festgabe erschien das zuerst genannte Buch. Es enthält einen Wiederabdruck zweier merkwürdiger und seltener Schriften aus dem siebzehnten Jahrhundert, und ist ganz in Facsimile, sowohl was Format, Buchstaben, als auch was die Druckfehler betrifft, hergestellt. Der erste Schriftführer der Gesellschaft, Prof. D. Bierens de Haan, hat die Herausgabe besorgt und sich dadurch grosse Verdienste erworben.

Die erste dieser Schriften ist dem städtischen Archiv zu Leiden entnommen und hat den folgenden Titel: „Corte Onderrichtinghe, dienende tot het maacken van de reductien van de taexcustingen tot gereede penningen, om dien volgende te eysschen en ontvangen den veertichsten penning op alle vercochte of vervreemde onroerende goeden, volgende 't placaet der Heeren Staten van den 22. December 1598. Gedruct opt raedhuys der Stadt Leyden in den Jare 1598." Sie behandelt die Zinsreductionen von Hypotheken und enthält Tafeln, um diese leicht auszuführen; hierbei sind bereits die Decimalbrüche benutzt, welche erst kurze Zeit vorher von Simon Stevin eingeführt waren. Der Commission von fünf Mathematikern, welcher die Ausführung dieser Arbeit aufgetragen war, gehörte auch der bekannte Ludolph van Ceulen an.

Die zweite Schrift führt den Titel: „Waerdye van Lyfrenten near proportie van Losrenten. In 's Gravenhage. Anno 1671." Sie ist herausgegeben von dem berühmten Rathspensionar Johan de Wit, der auch ein für seine Zeit vorzüglicher Mathematiker war. Diese Schrift handelt von der Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Lebensrenten, welche damals schon von den Staaten gezahlt wurden; sie enthält auch eine erste, wenn auch rohe Skizze eines Sterblichkeitsgesetzes. Diese Schrift, welche den Beschlüssen der General-Staaten von Holland beigegeben wurde, ist nur in sehr wenigen Exemplaren abgedruckt worden. Sie ist so selten, dass sie Montucla für verloren hielt; Jacob Bernoulli konnte schon 1704 kein Exemplar mehr bekommen; Leibniz meinte eines zu besitzen, doch konnte er es nicht wiederfinden und strebte auch umsonst danach, ein zweites

zu erhalten. Dem Herausgeber aber gelang es, ein Exemplar in einer Privat-Bibliothek zu entdecken.

Die Festrede, vom Vorsitzenden der Gesellschaft Professor Matthes zu Amsterdam gehalten, handelt nur von der Geschichte und nutzbringenden Thätigkeit der Gesellschaft während ihres hundertjährigen Bestehens. G.

D. Bierens de Haan. Bouwstoffen voor de geschiedenis der wis-en natuurkundige wetenschappen in de Nederlanden. No. XVIII. Versl. en Mededeel. XIV. 180-187.

Nach der Veröffentlichung des im vorigen Jahrgange der F. d. M. bereits erwähnten Buches, beginnt der Verfasser mit obengenanntem Aufsatze eine neue Serie historischer Untersuchungen. Es wird darin über Martinus Carolus Cressfeldt gehandelt. Dieser schrieb 1557 ein Rechenbüchlein, in welchem die alte Methode des deutschen Rechenmeisters Adam Riese — geboren 1492 zu Staffelshein, gestorben zu Annaberg 1559 — befolgt ist. Diese Art, auf Linien oder auf Streifen zu rechnen, sollte dazu dienen, den Schülern einen deutlichen Begriff der einfachen Rechenoperationen zu geben, und ebenso um den in der Wissenschaft Unerfahrenen die Mühe vielen Nachdenkens zu ersparen und an Stelle desselben mechanisches Arbeiten zu setzen. In späteren Zeiten ist daraus nach vielen Abänderungen der Rechenrahmen entstanden, welcher auch jetzt noch auf den Schulen benutzt wird. Das genannte Rechenbuch ist das einzige holländische, welches diese Methode enthält und wird darum hier eingehend besprochen. Es wird ihm nachgerühmt, dass es für seine Zeit ein sehr verdienstliches Werk gewesen sei, und muss es deshalb mancherlei Nutzen gestiftet haben.

G.

Döderlein. Gerhard Kremer, genannt Mercator, der deutsche Geograph. Bair. Bl. XV. 193-199.

Eine gute Zusammenstellung des Wissenswürdigsten über die Lebensumstände und Leistungen des Neubegründers der wissen-

schaftlichen Kartographie, im Anschlusse an Breusing. Sachlich wird zuerst auf die grossen Unvollkommenheiten der im Mittelalter üblichen Kompasskarten hingewiesen, alsdann wird der Brief Mercator's an Perrenot besprochen, in welchem zuerst die Nichtübereinstimmung des magnetischen Poles mit dem Weltpole zur Sprache kam, endlich wird das grosse Verdienst hervorgehoben, welches sich Mercator durch seine Construction cylindrischer Weltkarten und die damit in Verbindung stehende Rectification der loxodromischen Curve erwarb. Auch wird es ihm zum Ruhme angerechnet, dass er zur Gewinnung exacter geographischer Ortsbestimmungen möglichst auf Ptolemäus zurückzugehen suchte.
Gr.

C. Henry. Recherches sur les manuscripts de Pierre de Fermat suivies de fragments inédits de Bachet et de Malebranche. Boncompagni Bull. XII. 477-568, 619-740.

Theil I. Im ersten Abschnitt giebt der Verfasser eine Schilderung des Characters Fermat's gegenüber der, die Libri von ihm gegeben. Diese fällt allerdings recht ungünstig aus, denn der Verfasser stellt eine Reihe von ungünstigen Thatsachen zusammen, die er nirgends durch Entgegenstellung günstiger zu mildern sucht. Abschnitt II. untersucht die Frage, ob Fermat Beweise der von ihm aufgestellten Sätze abgefasst habe. Der Verfasser gelangt zu dem Resultat, dass Fermat die wichtigsten Beweise wohl im Kopf entworfen, aber nicht zu Papier gebracht habe. Abschnitt III. verbreitet sich eingehend über die Correspondenz Fermat's und den Verbleib derselben.

Theil II. enthält in 29 Abschnitten eine Reihe von Abdrücken von Manuscripten und sonstigen Notizen, unter denen hier folgende angeführt werden mögen. Nr. 1 ist ein Brief des französischen Gesandten in Stockholm, in dem er von Descartes' Tode Mittheilung macht. Nr. 4 und 6, Briefe von Fermat an verschiedene Personen, wie Segrier, Huygens. Nr. 9 enthält: Essai de démonstration par Malebranche du théorème $x^n + y^n \gtrless z^n (n < 2)$, Nr. 10 ein unedirtes Manuscript Bachet's de Méziriac. Nr. 11

Sätze von Malebranche über Quadrate. Nr. 13, Malebranche's Versuch zur Lösung der Gleichung $Ax^2+1=y^2$. Nr. 14, 15, 16, Briefe von Fermat. Nr. 17, 18, 19, Fermat's Methode der Maxima und Minima. Nr. 20, 21, Des parties aliquotes par Descartes et par Fermat. Nr. 28, Recherches de Fermat sur le problème d'Adrien Romain. O.

R. Baltzer. Anmerkung über einen Satz von Fermat. Borchardt J. LXXXVII. 172.

Herr Baltzer citirt eine Stelle aus einem Fermat'schen Briefe, worin Fermat selbst bereits Zweifel an der Richtigkeit seines früher aufgestellten Satzes äussert, dass 2^m+1 eine Primzahl sei, wenn m Potenz von 2. O.

A. Marre. Lettre inédite du Marquis de l'Hospital. C. R. LXXXVIII. 76-77.

Der Brief bezieht sich auf die Lösung der von Fermat aufgestellten Gleichung $Ax^2+1=y^2$, die später von Lagrange und Legendre gelöst worden ist. L'Hospital selbst hat das Problem nicht gelöst, stellt aber neben anderen Bemerkungen in seinem Briefe folgenden Satz auf: „Wenn man eine erste Lösung $x=\alpha$, $y=\beta$ hat, so hat man auch eine zweite $x=2\alpha\beta$, $y=2A\alpha^2+1$; daraus ergeben sich dann weitere." O.

A. Marre. Deux mathématiciens de l'Oratoire. Boncompagni Bull. XII., 886-894.

Der erste derselben ist Père Claude Jaquemet, der zweite Père Bizance. Ersterer ist wenig bekannt: es haben sich unter den Manuscripten Arbeiten gefunden, die es ausser Zweifel stellen, dass er ein äusserst tüchtiger Mathematiker gewesen sei; namentlich finden sich darunter noch Stücke aus der Zahlentheorie etc. Dahin gehört auch die Aufstellung des im vorigen Referat erwähnten Satzes, die nicht Malebranche, sondern Jaquemet zukommt. O.

J. Cäsar. Christian Wolff in Marburg. Rede. Marburg. Elwert.

Die Rede schildert die Verhältnisse Marburgs zur Zeit der Berufung von Christian Wolff. Sie giebt ein Bild der Verhältnisse, durch die Wolff nach Marburg gekommen, wie er sie dort gefunden und wie er sie verlassen habe. Der mathematischen Wirksamkeit Wolff's wird nur nebenher bei seiner Lehrthätigkeit gedacht.

O.

B. Hansted. Deux pièces peu connues de la correspondance d'Euler (Lettre d'Erik Pontoppidan à L. Euler et réponse d'Euler.) Darboux Bull. (2) III 26-32.

Nach den einleitenden Worten des Herrn Hansted war Herr Pontoppidan ein Däne, der sich eifrig damit beschäftigte, die Naturerscheinungen in Einklang mit den Worten der Bibel zu setzen. Der erste Brief ist von ihm an Euler gerichtet und legt 6 Fragen zur Beantwortung vor. Diese Fragen betreffen den Einfluss des Lichtäthers auf die Bewegung der Erde, die Natur des Lichtes etc. Euler beantwortet diese Fragen unterm 11. Mai 1754 von Berlin aus eingehend, namentlich giebt er auf die erste Frage, sowie auf die letzte, ob er an eine Verkürzung des Jahres glaube, eingehende Antworten, für deren Veröffentlichung man nur dankbar sein kann.

O.

G. Eneström. Trois lettres inédites de Jean 1er Bernoulli à Léonard Euler tirées de la correspondance de Jean 1er Bernoulli gardée dans la bibliothèque de l'académie royale des sciences de Stockholm. Stockholm Handl. Bihang. V. Nr. 21; Boncompagni Bull. XII. 313-314.

Der Herausgeber giebt folgende Uebersicht über den Inhalt dieser Briefe:

I. (1729, Nov. 18.). Quelques réflexions sur les logarithmes des quantités imaginaires. Sur l'équation

$$y^2 \frac{d^2y}{dx^2} = x$$

et sur une autre équation différentielle du second degré, proposée par Euler. La détermination des lignes les plus courtes, qu'on puisse tracer sur une surface donnée.

II. (1729, Déc. 17.). Solution des équations

$$y^m \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = qx^m \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^{2-p},$$

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} = q \cdot y.$$

Sur l'équation proposée par Euler et mentionnée dans la première lettre. Sur les courbes tautochrones et isochrones. Sommation de la suite

$$1,\ 1.2,\ 1.2.3,\ 1.2.3.4,\ \text{etc.}$$

III. (1737, Nov. 6.). Le mémoire de Jean II. Bernoulli sur la lumière. Quelques observations sur la Mechanica d'Euler, la Phoronomia de Hermann, et les Principia de Newton. Sur le mémoire de Jean II. et Daniel I. Bernoulli sur les ancres. Sommation des suites dont les termes généraux sont $\frac{1}{x^2}$ et

$$\frac{2.4.6\ldots(2x-2)}{1.3.5\ldots(2x-1).2x}.$$

Observations sur les suites des sinus et des arcustangens. Sur une nouvelle partie du calcul infinitésimal, cultivée par Euler.

M. L.

C. Tychsen. Lagrange. Traduit du Danois par M. H. G. Zeuthen. Boncompagni Bull. XII. 815-827.

Uebersetzung der Arbeit, über die F. d. M. IX. p. 8 referirt worden ist.

O.

A. Favaro. Sopra due lettere inedite di Giuseppe Luigi Lagrange pubblicate da D. Baldassare Boncompagni. Riv. per. XXIX. 163-184, 193-201.

Lettres inédites de Lagrange. Journal des savants. 1879. 572-574.

A. Genocchi. Sopra due lettere inedite del celebre fondatore dell' Accademia, Giuseppe Luigi Lagrange. Atti di Torino XIV. 459-463.

A. Favaro. Sopra due lettere inedite di Giuseppe Luigi Lagrange pubblicate da D. B. Boncompagni. Padova. Randi.

A. Favaro. Sopra una lettera inedita di Guiseppe Luigi Lagrange pubblicata da D. B. Boncompagni. Padova. Randi.

M. Cantor. Drei Briefe von Lagrange. Schlömilch Z. Hl. A. XXIV. 182-184.

Mittheilungen über 3 neue, in der Berliner und der Bologneser Bibliothek aufgefundene und vom Fürsten Boncompagni veröffentlichte Briefe Lagrange's. Der erste Brief datirt vom 15. Januar 1801 und ist wahrscheinlich an Franz Theodor de la Garde, Buchhändler in Berlin, gerichtet. Es handelt sich darin nur um die Besorgung von Büchern; die einzige mathematisch-interessante Notiz betrifft Montucla's grosses Geschichtswerk. Im zweiten Briefe dankt Lagrange Laplace für die Uebersendung der Abhandlung „Mémoire sur les approximations etc. Hist. d. l'Ac. 1782“ und übersendet die zweite Abhandlung „Théorie des variations séculaires Berl. Akad. 1783, 1784. Der dritte Brief ist ein an die Bologneser Akademie gerichtetes Dankschreiben für die Ernennung zum Mitgliede derselben. M.

A. Genocchi. Presentazione di un facsimile. Atti di Torino XIV. 1178-1179.

Es handelt sich um einen Brief Lagrange's vom 6. April 1773 aus Berlin an Sebastian Canterzani, Secretair der Akademie

von Bologna, worin Lagrange für seine Wahl zum Mitgliede der Akademie dankt. Die Notiz giebt zugleich Nachrichten über Canterzani. O.

G. Eneström. Lettres inédites de Joseph-Louis Lagrange à Léonard Euler publiées par B. Boncompagni, Saint-Pétersbourg 1877. Zeuthen Tidsskr. (4) III. 33-45.

Traduit du Danois par MM. L. Leouzon Le Duc et Aristide Marre. Boncompagni Bull. XII. 828-838.

Herr Eneström giebt eine summarische Uebersicht über den Briefwechsel zwischen Lagrange und Euler, über welchen F. d. M. IX. 8-10 berichtet worden ist. Gm.

G. Darboux. Lettres de divers mathématiciens. Darboux Bull. (2) III. 206-228.

Enthält eine Reihe von Briefen bekannter Mathematiker. Die beiden ersten sind aus dem Jahre 1771 von Laplace an Condorcet gerichtet und beziehen sich auf die Integration linearer Gleichungen. Ihnen ist eine Note von G. Darboux über denselben Gegenstand angefügt, so dass über den Inhalt derselben in den Differentialgleichungen zu berichten sein wird. Es folgen 2 Briefe von Laplace an d'Alembert; der erste derselben ist vom 15. November 1777 und theilt d'Alembert einen Zusatz mit, den Laplace einer Notiz über d'Alembert's „Réflexions sur la cause des vents" hinzufügen wollte. Der zweite, vom 10. März 1782, bezieht sich auf das Problem vibrirender Saiten. Weiter folgt ein Brief von Borda an Condorcet, in dem sich die Antworten auf Ansichten (Professions de foi de M. de Condorcet) Condorcet's immer Nummer für Nummer gegenübergestellt finden. Der Inhalt betrifft die Theorie der Bewegung von Flüssigkeiten. Der dann folgende Brief von Fuss (15/26. Mai 1778 aus Petersburg) bezieht sich auf einen Preis, den Fuss von der Pariser Akademie erhalten. Eine dazu gehörende Nachschrift spricht von Euler's

Substitution zur Rationalisirung von

$$\int \frac{dx\sqrt{1+x^4}}{1-x^4} \left(\text{durch } x = \frac{\sqrt{1+p^2}+\sqrt{1-p^2}}{p\sqrt{2}}\right).$$

Den Schluss bildet ein Schreiben von Johann Albert Euler an Condorcet, das sich ebenfalls auf den von Fuss gewonnenen Preis bezieht. Sämmtliche Briefe stammen aus dem Nachlass Condorcet's.

O.

B. Boncompagni. Intorno a due scritti di Leonardo Euler. Boncompagni Bull. XII. 808-811.

Die zweite Schrift Euler's, von der in vorliegender Notiz die Rede ist, betrifft die oben bemerkte Nachschrift in dem Briefe von Fuss. Herr Boncompagni bemerkt, dass dieselbe Substitution sich von Euler in einer Schrift angewandt finde, die er am 1. September 1776 der Akademie von Petersburg überreicht habe. Die erste der beiden Schriften ist die Arbeit: „Recherches sur une nouvelle espèce de quarrés magiques", auf die sich Herr Lucas in seiner Arbeit: „Un problème traité par Euler" N. C. M. V. 169, siehe Abschn. III. Cap. 1, berufen hatte.

O.

E. Schering. Nella solennità del centenario della nascità di C. F. Gauss. Brioschi Ann. (2) IX. 210-239.

Schilderung der Feier von Gauss' hundertjährigem Geburtstag (siehe F. d. M. IX. p. 12). Im Anhang wird eine Reihe von Briefen von Gauss an Bolyai, von Sophie Germain an Gauss u. s. w. mitgetheilt.

O.

B. Boncompagni. Lettera inedita di Carolo Federico Gauss a Sofia Germain. Firenze. Achille Paris.

E. Schering. Bemerkungen über Gauss' Brief vom 30. April 1807 an Sophie Germain. Gött. Nachr. 1879. 381-384.

Es handelt sich um einen Brief von Gauss vom 30. April 1807, den ersten, den er an Sophie Germain geschrieben, nachdem er von ihren Bemühungen zur Erleichterung seiner Lage gehört und darüber aufgeklärt war, dass der M. Le Blanc, mit dem er in Correspondenz gestanden, eben jene Sophie Germain sei. Die erste Arbeit enthält einen Abdruck des Briefes, den wiederaufzufinden dem Fürsten Boncompagni gelungen war, die zweite Bemerkungen dazu. Der Brief von Gauss an Sophie Germain findet sich auch abgedruckt in Grunert Arch. LXV. Lit.-Ber. CCLVII. 5-9. O.

E. Hunyady. Zum Gedächtnis an J. V. Poncelet. Ungar. Ak. 1877.

Diese am 29. October 1877 gehaltene Rede giebt in ihrem ersten Theile ein Bild des äusseren Lebensganges Poncelet's. Der zweite Theil (p. 10 beginnend) beschäftigt sich mit Poncelet's Leistungen als Mathematiker. Der Verfasser entwickelt zunächst die Grundgedanken Poncelet's bei der Untersuchung der projectivischen Eigenschaften geometrischer Figuren und das Princip der homologen Figuren, wie er sie in seinen Hauptwerken, den „Applications d'analyse et de géométrie,…“ und dem „Traité des propriétés projectives des figures…“ niedergelegt hat. Zu Einzelnheiten übergehend, hebt der Verfasser namentlich die Punkte hervor, an welche sich weitere Entwickelungen für die moderne Mathematik geknüpft haben. Dahin gehören namentlich seine Auffassung der Kegelschnittbrennpunkte, der Sätze aus der Theorie der Curven dritter Ordnung und andere. O.

E. Holst. Om Poncelet's Betydning for Geometrien. Et Bidrag till de modern geometriske ideers udviklings historie. Christiania. Universitätsprogr. 1879.

Eingehende Würdigung der Leistungen Poncelet's auf dem Gebiete der Geometrie. O.

H. Résal. Notice nécrologique sur Edmond Bour.
Ann. d. Mines (7) XVI. 275-283.

Jacques Edmond Émile Bour ist geboren am 19. Mai 1832 zu Gray (Dep. Haute Saône), besuchte von 1850 an die École Polytechnique, wurde 1855 Lehrer an der École des mineurs zu St. Etienne, 1859 an der École Polytechnique und starb den 8. März 1866. Die Notiz enthält eine kurze Schilderung seiner Arbeiten.

O.

Léon Foucault. Recueil de ses travaux scientifiques, publié par Mad. veuve Foucault, sa mère, mis en ordre par C. M. Gariel et précédé d'une notice sur les oeuvres de L. Foucault par J. Bertrand.
Darboux Bull. (2) III. 353-380.

Das Vorliegende enthält die kurze einleitende Notiz Bertrand's nebst einer Anmerkung, welche die äusseren Daten über den Lebensgang Foucault's giebt. Daran schliesst sich auf pag. 357 ein Artikel mit dem Titel: „Des progrès de la mécanique. M. Léon Foucault", der der „Revue des deux Mondes" vom 1. Mai 1864 entnommen ist und eine Darstellung der Entdeckungen und Arbeiten Foucault's auf den Gebieten der Mechanik und Physik enthält.

O.

J. M. de Tilly. Notice sur la vie et les travaux de A. H. E. Lamarle, associé de l'Académie, né à Calais le 16. sept. 1806, mort à Douai, le 14. mars 1875.
Ann. de Belg. XLV. 205-253.

Anatole Henri Ernest Lamarle, geboren zu Calais am 16. Sept. 1806, gestorben zu Douai am 14. März 1875, war Professor des Hochbaus an der École du génie civil zu Gent. Er hat namentlich in den Publicationen der Belgischen Akademie, der er seit 1847 angehörte, zahlreiche Abhandlungen veröffentlicht, deren grössere Zahl eine kinematische Theorie der Curven und Flächen zum Gegenstand hat, gegründet auf folgendem Gedanken: „Eine Curve ist die Bahn eines Punktes, der sich auf einer Geraden

(Tangente zu der Curve) bewegt, während die Gerade sich um den Punkt dreht." Die meisten von ihm in der kinematischen Geometrie erhaltenen Resultate finden sich in seinem Werke: „Exposé géométrique du calcul différentiel et intégral," 1861 und 1863, Paris, Gauthier-Villars. Nichts destoweniger mögen hier noch folgende Arbeiten erwähnt werden: 1) Étude approfondie sur deux équations fondamentales du calcul différentiel, 1855. (Mém. de Belg. XXIX.). In dieser Arbeit zeigt er, indem er die Existenz der Derivirten continuirlicher Functionen nachzuweisen sucht, das Ungenügende in den früheren Beweisen und gelangt zu interessanten Resultaten über die Oscillationsgrenzen des Verhältnisses $\Delta Fx:\Delta x$. 2) Un essai de démonstration du postulatum d'Euclide, 1856 (Bull. de Belg. XXXIII). Darin führt er einen neuen Begriff ein, den der äquidistanten Linie der Geraden, deren Wichtigkeit Tilly gezeigt hat. 3) In einer kleinen Abhandlung im Bd. XIX. des Bull. de l'Ac. de Brux. hat er zuerst (vor Foucault) auf den Gebrauch des Gyroscops zum Beweise der Drehung der Erde aufmerksam gemacht. 4) Zwei Abhandlungen: „Sur la stabilité des systèmes liquides en lames minces (Mém. de l'Acad. de Brux. XXXV., XXXVI.) 1865 und 1867. Darin zeigt er die Haupteigenschaften der Plateau'schen laminaren Systeme in höchst beachtenswerther Weise. Mn. (O.)

Giambattista Biadego. Pietro Maggi, Matematico e Poeta Veronese. Verona. H. F. Münster. 12°.

Das vorliegende Büchlein ist in drei Theile getheilt. Der erste Theil giebt eine Biographie Maggi's. Pietro Luigi Maria Maggi ist geboren zu Verona am 30ten April 1809. Er bezog 1827 die Universität Padua, nachdem er in seiner Vaterstadt seine Schulbildung erhalten. Später studirte er (1830) in Pavia, nahm jedoch die Stellung, die ihm dort als Assistent bei Bordoni angeboten wurde, nicht an und zog sich nach dem Tode seiner Mutter auf das Land zurück, wurde dann 1835 Mitglied der Akademie zu Verona, 1850 supplirender, 1853 ordentlicher Professor zu Padua. Er starb am 17ten März 1854. Der zweite

Theil beschäftigt sich mit den gelehrten Leistungen Maggi's. Seine Arbeiten haben sich theils auf dem Gebiete der mathematischen und experimentellen Physik bewegt, theils haben sie sich mit Gegenständen der reinen Mathematik beschäftigt. Der dritte Theil endlich, von Giuseppe Biadego, schildert Maggi als Dichter. Den Schluss bildet ein Verzeichnis seiner publicirten, wie im Nachlasse gefundenen Schriften.

O.

GIAMBATTISTA BIADEGO. Sulla memoria inedita di Pietro Maggi intorno ai principii di meccanica molecolare di Ambrogio Fusinieri. Boncompagni Bull. XII. 839-846.

P. MAGGI. Intorno ai principii di meccanica molecolare di Dottore Ambrogio Fusinieri. Boncompagni Bull. XII. 847-862.

Unter den unedirten Schriften Maggi's fand sich eine Jugendarbeit: „Trattato sulle sezioni coniche“, deren Vorrede in dem oben besprochenen Buche publicirt ist. Eine zweite unedirte Arbeit ist die in zweiter Stelle im Titel genannte. Sie war in der „Accademia di Agricoltura, Arti e Commercio di Verona“ am 3. März 1842 gelesen worden, aber wegen ihrer scharfen Kritik auf Wunsch des Vorsitzenden der Akademie nicht gedruckt worden. Sie ist gegen A. Fusinieri gerichtet, der in einer Arbeit gegen die atomistische Theorie aufgetreten war. Im Vorliegenden werden die nöthigen historischen Daten gegeben und die Arbeit selbst publicirt.

O.

S. DICKSTEIN. Herrmann Grassmann. Sein Leben und Wirken. Niwa. Warschau. 1878. (Polnisch).

Dn.

G. C. J. Ulrich. Gött. Nachr. 1879. 339-341.

Nachruf für den verstorbenen Professor der Mathematik. Georg Carl Justus Ulrich, geboren zu Göttingen den 29. April 1798, hat sein ganzes Leben in seiner Geburtsstadt verlebt. Bis

1814 Gymnasiast, dann Student, Privatdocent, ausserordentlicher Professor, wurde er 1831 ordentlicher Professor und starb am 30. Mai des Jahres 1879. O.

L. Cremona. Commemorazione di Domenico Chelini.
Acc. R. d. L. (3) III. 54-58, Darboux Bull. (2) III. 228-238.

Die zweiterwähnte Arbeit ist eine Uebersetzung der ersten.

Domenico Chelini wurde geboren den 18. Oktober 1802 zu Gragnano, kam 1818 nach Rom, wo er von 1819 bis 1826 das Collegium von Nazareth besuchte. 1827 zum Priester geweiht, war er an verschiedenen Stellen Lehrer, bis er 1831 am Collegium von Nazareth den Lehrstuhl der Mathematik erhielt. 1851 ging er als Professor nach Bologna. Dort blieb er bis zum Jahre 1864, wo er seines Amtes wegen Eidverweigerung entsetzt wurde. Er zog sich zunächst nach Lucca zurück. 1865 bis 1867 war er dann an der Universität zu Rom angestellt. Da traf ihn dasselbe Schicksal, wie 1864, nochmals. Er widmete sich dann dem Privatunterricht, bis er am 16. November 1878 starb. Der Schilderung seines Lebens ist an beiden Stellen ein Verzeichnis seiner Arbeiten angefügt. O.

G. Foglini. Intorno alla vita del P. Domenico Chelini.
Acc. P. N. L. XXXII. 152-165.

Nachruf für D. Chelini. Am Schluss ist ein Verzeichnis seiner Schriften angefügt. Siehe das vorige Referat. O.

Regel. Gedächtnisrede auf Carl Anton Bretschneider.
Pr. Gotha.

Alfred Bretschneider. Carl Anton Bretschneider. Ein Gedenkblatt für seine Freunde und Schüler.
Schlömilch Z. XXIV. Hl. A. 79-91.

Carl Anton Bretschneider ist geboren am 27. Mai 1808 zu Schneeberg im sächsischen Erzgebirge. Er erhielt seine Schulbildung in Gotha, studirte von 1826 an in Leipzig auf Wunsch des

Vaters Jurisprudenz, habilitirte sich dort 1830 in der juristischen Facultät, wie er auch bis 1835 sich in Gotha praktisch damit beschäftigte. Mathematik hatte er bis dahin nur privatim treiben können. 1835 jedoch gab er die Jurisprudenz auf, um als Lehrer der Mathematik in Gotha am Gymnasium einzutreten. Dort blieb er bis zu seinem Tode October 1878 als Lehrer thätig. Der Schilderung von Bretschneider's Leben ist ein Verzeichnis seiner Schriften angefügt. O.

J. Bertrand. Éloge historique de Urbain Jean Joseph Leverrier, lu dans la séance publique annuelle de l'Académie des sciences de l'Institut de France. Paris. Typographie de Firmin-Didot et Cie. 4°.

J. W. L. Glaisher. James Booth. Monthl. Not. XXXIX. 219-225.

Leben des Mathematikers James Booth. Er ist geboren 1816 und gestorben 1878. Er publicirte in zwei Bänden: „A treatise on some new geometrical methods". Der erste Band erschien 1873, der zweite 1877. Glr. (O.)

B. Geschichte einzelner Disciplinen.

G. F. Montucla. Storia delle matematiche nella quale si racconta la loro origine ed il successivo loro progresso fino ai nostri giorni, si espone lo sviluppo delle principali scoperte in tutti i rami delle matematiche le contestazioni che avvenero fra i matematici ed i tratti principali della vita dei più celebri. Traduzione di A. A. Fabris sull' ultima edizione dell' autore. Tomo primo. Torino. Candeletti.

Bröckerhoff. Geschichtlicher Entwickelungsgang der mathematischen Wissenschaften. Theil I. Pr. Beuthen O.-S.

Die Arbeit scheint nicht für wissenschaftliche Kreise berechnet, sondern bezweckt wohl für ältere Schüler und gebildete Laien einen Ueberblick über die Entwickelung der Mathematik in grossen Umrissen zu geben. Im ersten Theil bespricht sie das Rechnen und die Ziffersysteme. Der zweite Abschnitt giebt ein Bild der Mathematik bei den Griechen und ihren Vorgängern. Namentlich ist es hier Pythagoras und Plato, denen dann die alexandrinische Schule, besonders Euklid, Archimedes, Appollonius etc. folgen, während die Besprechung der Leistungen Diophant's den Schluss dieses Abschnitts bildet. Der dritte und letzte Abschnitt dieses Theiles endlich hat die Mathematik der Inder zum Gegenstand. Diesem sollen in einem zweiten Theile die Araber folgen. O.

Liagre. Rapport sur le concours quinquenial des sciences mathématique et physique. Bull. de Belg. (2) XLVIII. 835-880.

Kurze Uebersicht über die Arbeiten belgischer Gelehrter über Mathematik und Physik in den Jahren 1874, 1875, 1876, 1877, 1878. Mn. (O.)

Fr. Hultsch. Zur Terminologie der griechischen Mathematiker. Schlömilch Z. XXIV. Hl. A. 41-42.

Herr Hultsch deutet einige paläographische Zeichen in älteren Handschriften des Serenus (Cylinderschnitte) und Theon (Astronomie) anders als Henri Martin und gelangt hierdurch zu einer concinneren Interpretation gewisser geometrischer Sätze. Gr.

Beier. Die Mathematik im Unterricht der höheren Schulen von der Reformation bis zur Mitte des 18. Jahrhunderts. Pr. Crimmitschau.

Der Anfang des ernsten Studiums der Mathematik in Deutschland wird auf die Gründung der Universitäten, zuerst der Universität Wien zurückgeführt, wohin Professoren aus Paris berufen wurden, die Anfangsgründe zu lehren. Auf die Universitäten blieb die Doctrin beschränkt bis zur Reformation, und umfasste auch hier nur „Arithmetica et Sphaera“ (Species und Progressionen und Vorkenntnisse zur Astronomie). In gleichem Umfange findet sich die Mathematik im 16. Jahrhundert in 24 Schulordnungen aufgenommen, von Luther zugleich mit der Musik befürwortet, während Melanchthon selbstthätig sehr dafür wirkte. Ueberall aber war der Unterricht nur den Schülern freigestellt. Mehrere solcher Schulordnungen, und zwar für Gymnasien, Lateinschulen und Ritterakademien, werden aufgeführt aus dem 17. Jahrhundert; weiter wird die Vertheilung des Unterrichts in die Classen, das Wirken von Feuerlein, Sturm u. A., deren Schriften uud pädagogische Grundsätze speciell besprochen. Hier tritt zuerst Geometrie mit auf. Das 18. Jahrhundert beginnt mit der Francke'schen Stiftung, auf welcher der Mathematik eine wesentlich höhere Stellung eingeräumt ward. Von hier an werden die Schuleinrichtungen, die mathematisch-didaktischen Schriften und dann die Lehrzweige einzeln nach statistischen und pädagogischen Gesichtspunkten eingehend behandelt. Auch die Stiftung der Realschulen, zuerst in Berlin, fällt in die erste Hälfte des 18. Jahrhunderts. Die Autoren der ausführlicher citirten Werke sind: Francke und Wolff in Halle, Steinbrecher in Hirschberg, Gesner in Göttingen, Hecker in Berlin, Schulz in Braunschweig, Reinbeck, Sibeth und Hahn in Bergen, Gemma Frisius, Peurbach, Hederich in Grossenhain.

H.

G. Eneström. Spridda bidrag till matematikens historia. Zeuthen Tidsskr. (4) III. 161-165.

In dieser zweiten Note (s. p. 39) handelt es sich um die Frage, wer zuerst gewöhnliche Buchstaben, mit verschiedenen Nebenzeichen versehen, benutzt hat, um damit eine unbekannte Grösse und deren verschiedene Potenzen zu bezeichnen. Es ist in dieser Richtung bekannt, dass Stifel als Bezeichnung für Potenzen die Zeichen $1k$, $1A$, $1B$, $1C$ u. s. w. benutzt hat; es ergiebt sich jedoch, dass die Buchstaben A, B, C hier zunächst nur als Indices zu betrachten sind. Es scheint aber nicht bemerkt worden zu sein, dass derselbe Verfasser in einer von ihm besorgten Ausgabe von Rudolff's, „Die Coss" von 1543 zu demselben Zwecke die Zeichen

$$1,\ 1A,\ 1AA,\ 1AAA\ \ldots$$

verwendet habe. Im Gegensatz zu der Ansicht Treutlein's meint der Verfasser, dass Stifel dieser Bezeichnungsweise eine besondere Bedeutung beigelegt habe, weil er sie überall anwendet, wo mehr als eine unbekannte Grösse vorkommt, obwohl freilich auch nur dann, wenn dieses der Fall ist. Als vorbereitender Schritt zu der von Vieta eingeführten Bezeichnungsweise verdient dieserhalb die von Stifel sehr wohl beachtet zu werden.

Gm.

J. Giesing. Stifel's arithmetica integra. Ein Beitrag zur Geschichte der Arithmetik des 16. Jahrhunderts. Döbeln. C. Schmidt.

Eine kurze Einleitung schildert den niedrigen Stand des mathematischen Wissens zu Beginn des 16. Jahrhunderts, besonders mit Rücksicht auf die damaligen Schulverhältnisse. Sodann wird Stifel's Leben beschrieben, und dabei seinen persönlichen Beziehungen zu Martin Luther besondere Beachtung geschenkt. Es wird weiter gezeigt, wie Stifel wesentlich durch seine mystischen Zahlenspeculationen auch zur Beschäftigung mit der wissenschaftlichen Zahlenlehre geführt ward; eingehend und gründlich wird die Entstehungsgeschichte seines Hauptwerkes erzählt. Von dem eigentlichen Wesen der biblischen Zahlenspielereien, die ein

Biograph Stifel's wahrlich nicht mit Stillschweigen übergehen darf, erhält der Leser eine recht gute Vorstellung. Den weitaus grössten Theil des Programmes endlich nimmt die detaillirte Inhaltsbeschreibung der „Arithmetica integra" ein. Wir freuen uns, dass der Verfasser (S. 56 ff.) auch Stifel's schönen Untersuchungen über die magischen Quadrate gerecht geworden ist, indess wurde dieser Gegenstand bereits früher in grösserer Vollständigkeit in des Referenten „Verm. Unters. z. Gesch. d. math. Wissensch." S. 220 ff. abgehandelt. Zur Orientirung über eine der hervorragendsten mathematischen Schöpfungen, die je auf Deutschland's Boden entstanden, ist die kleine Schrift wohl zu empfehlen. Gr.

P. Treutlein. Die deutsche Coss. Schlömilch Z. XXIV. Suppl. Hl. A. 1-124.

Diese inhaltreiche Arbeit zerfällt in 6 Unterabtheilungen, über welche im Folgenden gesondert berichtet werden soll.

1) Einleitender Theil. Hier präcisirt der Verfasser seine Aufgabe, charakterisirt die nicht zahlreichen Vorarbeiten, an welche er anknüpfen konnte, verbreitet sich kurz über die Entwickelungsgeschichte der Algebra bis zu dem Punkte, wo er selbst einzusetzen gedenkt, und giebt einen generellen Ueberblick über die Werke jener Autoren, aus welchen er seine eigene Darstellung geschöpft hat. Peurbach, Regiomontan, Widman von Eger, Bernecker, Conrad, Grammateus, Adam Riese, Christof Rudolff, Apian, Stifel, Scheubel, Peletier und Clavius (letzterer in einem neuen Lichte als ungenirter Plagiarius), Faulhaber, Bürgi, Junge und Raymarus Ursus werden ihren wissenschaftlichen Eigenthümlichkeiten nach erwähnt und geschildert. Auch wird gezeigt, dass sich das Gesammtmaterial, welches die deutschen Algebraiker vor Erfindung der Buchstabenrechnung behandeln, nach vier Gruppen klassificiren lässt; jede derselben liefert den Stoff für die nachfolgenden vier Abschnitte der Abhandlung.

2) Von den cossischen Benennungen und Zeichen. Es wird nachgewiesen, dass die Zeichen $\pm$ schon in Handschriften des

15. Jahrhunderts vorkommen, sodann werden die verschiedenen Kunstwörter und Symbole vorgeführt, welche nach griechisch-indischem Muster auch in Deutschland für die verschiedenen Potenzen der Unbekannten im Gebrauche waren, und endlich wird gezeigt, welcher Hülfsmittel man von den ältesten Zeiten her bis auf Bürgi zur Repräsentation der ganzen rationalen Functionen von x sich bediente. Des letzteren Schreibweise kommt der modernen am nächsten.

3) Vom Algorithmus der Coss. Uebersichtliche, auf praktische Fälle gestützte Schilderung des Verfahrens verschiedener Cossisten beim Rechnen mit den vier Species und beim Wurzelausziehen. Auch der damals für sehr wichtig gehaltenen „Proben“ wird gedacht.

4) Von dem Rechnen mit Irrationalen. Hierfür gab besonders Rudolff die nöthigen Regeln, der u. a. bereits die Transformation kennt, welche in der identischen Gleichung:

$$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{a+b+3\sqrt[3]{a^2}\sqrt[3]{b}+3\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b^2}}$$

enthalten ist. Auch Apian, der u. a. bis zur Ausziehung fünfter Wurzeln emporstieg, dürfte sich um diesen Theil der Coss verdient gemacht haben. Den eigentlichen Codex für die Lehre vom Irrationalen bildet jedoch Stifel's „Arithmetica integra“; das bezügliche Kapitel ist eine durchweg bedeutende Leistung, wenn schon Stifel sich bei dem Versuch, das Problem der Würfelverdoppelung zu lösen, einen sonderbaren Fehler zu Schulden kommen lässt, wie Herr Treutlein nachweist.

5) Von den Regeln der Coss. Wir erfahren hier, wie man sich in jenen Zeiten bei der Auflösung linearer, quadratischer und solcher höheren Gleichungen verhielt, welche einer Reduction auf quadratische fähig sind. Ein entschiedener Fortschritt dokumentirt sich in dem Bestreben späterer Algebraisten, jene Systeme lösbarer Gleichungsformen, ohne die man beim Mangel einer allgemeineren Bezeichnung nicht auszukommen vermochte, wenigstens mehr und mehr zu reduciren. Auch hier ist Stifel der eigentliche Bahnbrecher wissenschaftlichen Fortschrittes; wagt er sich doch und nicht ganz ohne Glück, sogar an Gleichungen

vom dritten Grade. Eingehend werden auch besprochen die geistreiche und erst neuerdings zu ihrem Rechte gekommene Näherungsmethode Jung's von Schweidnitz, Faulhaber's eigenartige Verknüpfung der Lehre von den Gleichungen mit jener von den Progressionen und Bürgi's Behandlung der in der Kreistheilung vorkommenden algebraischen Probleme.

6) Von den Quellen der Coss. Der Terminus „Coss" scheint zwar auf italienische Abstammung hinzuweisen, indess ist damit die Frage, aus welchen Quellen Deutschland's Cossisten schöpften, noch nicht erledigt. Durch directe Textvergleichung gelingt es aber dem Verfasser, darzuthun, dass, abgesehen von der indirect aus dem Orient, insbesondere von Alkharezmi, stammenden Anregung, wesentlich die Werke des Leonardo Fibonacci und des Jordanus Nemorarius für die deutsche Algebra der Reformationsperiode grundlegend gewesen sind.

Ebenso wie Treutlein's frühere Schrift „Das Rechnen im 16. Jahrhundert", als deren Fortführung die hier besprochene gelten darf, hat auch diese letztere seitens des Berichterstatters eine tiefer gehende Recension in der „Zeitschrift für das Real-Schulwesen" erfahren. Gr.

P. Treutlein. Der Traktat des Jordanus Nemorarius „De numeris datis." Schlömilch Z. XXIV. Suppl. Hl. A. 125-166.

Durch seine im vorstehenden Referate berührten Studien über den Ursprung der deutschen Algebra war der Verfasser, wie erwähnt, auf eine gewisse Schrift eines früher wenig gewürdigten mittelalterlichen Mathematikers, des Jordanus Nemorarius, aufmerksam gemacht worden. Er beschloss, die Personalverhältnisse und wissenschaftlichen Leistungen dieses Mannes näher zu erforschen und gelangte auch (mit Unterstützung der Herren M. Cantor und Fürst Boncompagni) zum erwünschten Ziele. Es stellte sich heraus, dass Jordanus ein Deutscher und Ordensgeneral der Dominikaner war; sein Tod fällt in das Jahr 1236. Sein „Tractatus de numeris datis" ist für die früheste Geschichte der Algebra von hohem Interesse, und Herr Treutlein hat des-

halb sehr wohl daran gethan, ihn nach einem Baseler Manuscripte textuell zu reproduciren. Zweck des Werkchens ist, ganz ähnlich, wie dies des Euklides „δεδόμενα“ für geometrische Gebilde thun, so für Zahlen nachzuweisen, dass sie als gegeben betrachtet werden dürfen, wenn man gewisse Verbindungen derselben kennt. Uebertragen wir Jordan's fortlaufenden Vortrag in unsere moderne Darstellungsweise, so behauptet und beweist er z. B., dass, wenn xy und $(x+y)$ gegeben sind, dann auch ein Gleiches für x und y selbst gilt, denn es ist eben

$$x = \tfrac{1}{2}\left(x+y+\sqrt{(x+y)^2-4xy}\right),$$

$$y = \tfrac{1}{2}\left(x+y-\sqrt{(x+y)^2-4xy}\right).$$

Implicite ist also in Jordan's Betrachtungen ein System algebraischer Regeln enthalten, und dieser Umstand sichert seiner Schrift eine unverkennbare geschichtliche Bedeutung, wie bereits früher von Chasles erkannt und betont worden war.

Gr.

H. Brocard. Sur la fréquence et la totalité des nombres premiers. N. C. M. V. 1-7, 33-39, 65-71, 113-117, 263-269.

Nr. 1) Historischer Bericht nach S. Günther, Ziele und Resultate der neueren mathematisch-historischen Forschung. Erlangen 1876 (siehe F. d. M. VIII. p. 32). Nr. 2) Uebersicht der Untersuchungen von Gauss, Eisenstein, Schlömilch, Dirichlet, Serret, Lebesgue. Nr. 3) Analyse der Arbeiten von Tchébycheff. Nr. 4) Bibliographische und kritische Notizen des Verfassers. Es wird auf einen Irrthum von Curtze in seiner Arbeit über die Reihe von Lambert aufmerksam gemacht. Mn. (O.)

F. J. Studnička. Historische Notiz über Primzahlen. Časopis VIII. 36-37. (Böhmisch). Std.

L. Rodet. Sur un procédé ancien pour la solution en nombres entiers de l'équation indéterminée $ax + by = c$. Bull. S. M. F. VII. 171-174.

Schon Wöpcke hob hervor, dass Diophant und die arabischen Schriftsteller über unbestimmte Analytik häufig eine unbestimmte Gleichung mit zwei Variablen dadurch zu einer bestimmten machten, dass sie der einen Unbekannten einen anscheinend willkürlichen Werth ertheilten, der aber doch so gewählt war, dass auch für die andere unbekannte Grösse eine ganzzahlige Lösung resultirte. Wie man aber zu solchen Annahmen gelangte, darüber liess man den Leser im Unklaren. Herr Rodet hat nun bei dem bekannten Arithmetiker de la Roche von Lyon (um 1540) eine empirische Regel zu diesem Behufe angetroffen, mit deren Hülfe derselbe Systeme von der Form

$$x + y + z = a, \quad mx + ny + pz = b$$

behandelte. Er reproducirt dieselbe und spricht die in der That plausible Vermuthung aus, ähnlich möchten es wohl auch die alten Mathematiker gemacht haben. Gr.

A. Marre. Note sur trois règles de multiplication abrégée, extraites du „Talkhys Amâli al Hissâb.“ Nouv. Ann. (2) XVIII. 260-265.

A. Marre. Tres reglas de multiplicacione abbreviada del Talkhys Amâli al Hissâb. Cron. cient. II. 329-332.

Der Verfasser hatte im Jahre 1865 eine Uebersetzung des Talkhys Amâli al Hissâb d'Ibn al Bannâ gegeben. Er publicirt hier aus diesem Buche drei Regeln zur abgekürzten Multiplication von Zahlen, die aus lauter Einzen oder Neunen bestehen und erläutert die mitgetheilten Regeln an Beispielen. O.

L. Rodet. Sur une méthode d'approximation des racines carrées connue dans l'Inde antérieurement à la conquête d'Alexandre. Bull. S. M. F. VII. 98-102.

Ein Perser, Hassan ben al-Hossein al-Hakâk al-Morouzi hat in einem Leitfaden der Arithmetik als Regel zur Ausziehung von Quadratwurzeln aus irrationalen Zahlen gelehrt, dass man dem Ganzen den Rest, dividirt durch das Doppelte des Ganzen + 1, hinzufügen müsse. Herr Rodet erläutert diese Regel und zeigt dann, wie man andere im Alterthume bekannte Regeln auf diese zurückführen könne. Namentlich gehört dahin die Regel des Baudhâyana, die im Grunde die Newton'sche Methode ist.

O.

L. Rodet. Sur les méthodes d'approximation chez les anciens. Bull. S. M. F. VII. 159-167.

Der Verfasser bemerkt berichtigend zu seiner obigen Note, dass gleichzeitig mit dem dort erwähnten Al-Morouzi auch andere Gelehrte dergleichen Näherungsmethoden kannten. Er erwähnt Ibn-al-Bannâ, der in seinem Werke Talkhys eine sehr ähnliche Regel gab, diese wurde von Al-Qalçâdi modificirt, u. s. w.

O.

S. Günther. Antike Näherungsmethoden im Lichte moderner Mathematik. Prag. Abh. (6) IX.

Herr Günther behandelt die fest umgrenzte Aufgabe: Es soll nachgewiesen werden, dass und wie sämmtliche approximative Werthe, welche im Alterthum da und dort ohne irgend welche nähere Bezeichnung ihrer Entstehungsweise sich vorfinden, lediglich mit Hülfe der in der Mathematik der Jetztzeit heimisch gewordenen Kettenbruch-Algorithmen einfach und sicher berechnet werden können. Aus der vorgriechischen Zeit werden die Werthe der chaldäischen Jahresperiode und der ägyptischen Kreisumfangszahl besprochen. Bei der Näherungspraxis der Griechen werden zuerst die astronomischen Constanten, dann wird das approximative Berechnen quadratisch irrationaler Zahlen erwähnt. Es folgt ein Abschnitt über die Quadratwurzeln des Archimedes nebst Theon's Erläuterungen, welcher auf die Arbeiten de Lagny's und auf die Versuche der Reconstruction der antiken Methode

zur Quadratwurzelausziehung genau eingeht. In den letzten Paragraphen: „Pappus' Näherungsmethode für Aufgaben dritten Grades“ kommt der Verfasser zu dem Schlusse, dass das Verfahren des Pappus zur approximativen Ausziehung dritter Wurzeln vor allen andern den Vorzug hat, die Näherungswerthe als rationale Functionen des Radicanden allein zu liefern. No.

G. Eneström. En konvergenskriterium från början af 1700-talet. Stockholm Handl. 1879. Nr. 9.

Dieser Aufsatz giebt einen kleinen Beitrag zur Geschichte der Convergenzkriterien während des achtzehnten Jahrhunderts. Stirling hat nämlich in der vorzüglichen Schrift „Methodus differentialis“ (1730) ein bisher nicht bemerktes Convergenzkriterium für unendliche Producte angegeben, welches in moderner Fassung folgenderweise ausgedrückt werden kann:

Wenn

$$W = w_0 . w_1 . w_2 . w_3 \dots \text{ in inf.}$$

und

$$w = \frac{1}{m} \frac{z^\theta + az^{\theta-1} + bz^{\theta-2} + \cdots}{z^\theta + cz^{\theta-1} + dz^{\theta-2} + \cdots}$$

ist, so hat man W

gleich 0, für $m > 1$, oder $m = 1$ und $a < c$,

gleich einer endlichen Grösse $\gtrless 0$, für $m = 1$ und $a = c$,

gleich unendlich, für $m < 1$, oder $m = 1$ und $a > c$.

Man sieht unmittelbar, dass für unendliche Producte dieses Kriterium dem Gauss'schen Kriterium für unendliche Reihen völlig entspricht. Stirling hat sein Kriterium auch bei Reihen anzuwenden versucht, aber mit geringem Erfolg. Die Formulirung desselben ist nämlich für Reihen wenig brauchbar. O.

G. Eneström. Om upptäckten af den Eulerska summationsformeln. Stockholm Handl. 1879. Nr. 10.

Der Verfasser beschäftigt sich mit der Frage, ob Euler oder Maclaurin der erste Erfinder der Formel:

$$\Sigma u_x = E + \int u_x dx - \tfrac{1}{2} u_x + \frac{B_1}{2!} \frac{du_x}{dx} - \frac{B_3}{4!} \frac{d^3 u_x}{dx^3} + \frac{B_5}{6!} \frac{d^5 u_x}{dx^5} + \cdots$$

sei. Er zeigt, dass Euler schon vier Jahre früher als Maclaurin diese Formel publicirt hat, nämlich 1738 in den „Commentarii academiae Petropolitanae. T. VI. Ad annos 1732 et 1733, Petropoli 1738.“ Es scheint jedoch unzweifelhaft zu sein, dass Maclaurin, welcher die Formel in „A treatise on fluxions. In Two Books. Edinburgh. 1742“ publicirt hat, ohne Kenntniss von der vorhergehenden Arbeit Euler's gewesen ist. M. L.

F. J. Studnička. Ueber den Ursprung und die Entwickelung der Differential- und Integralrechnung. Casopis VIII. 1-10, 97-109, 272-295. (Böhmisch.).

Diese historische Skizze enthält ausser einer Einleitung fünf Abschnitte und zwar: 1) Ueber den Zustand der mathematischen Forschung im XVII. Jahrhundert; 2) Leibniz; 3) Newton; 4) Prioritätsstreit; 5) Kurze Uebersicht der weiteren Entwickelung. Der Schwerpunkt der ganzen Darstellung liegt im 4. Abschnitt, welcher das Verhältnis der beiden Schöpfer, Leibniz und Newton, nach vorhandenen Quellen klar zu legen sucht, die moralische Möglichkeit eines Plagiats beiderseits ausschliessend.

Die Abhandlung ist nachträglich auch als Separatabdruck erschienen. Std.

G. Eneström. Spridda bidrag till matematikens historia. Zeuthen Tidsskr. (4) III. 113-118.

Mit diesem gemeinschaftlichen Titel bezeichnet der Verfasser eine Reihe von kleineren Aufsätzen, welche verschiedene Punkte aus der Geschichte der Mathematik behandeln. Die erste der hier angeführten Noten handelt über die Frage, wer der erste Entdecker der singulären Lösungen einer Differentialgleichung gewesen ist. Nach Angabe von Bossut soll diese schon von Leibniz, Joh. Bernoulli und Taylor bemerkt worden sein. Dazu ist aber zu bemerken, dass bei Leibniz gar nicht von der Lösung einer Differentialgleichung die Rede ist, sondern nur von der Bestimmung einer Enveloppe; ähnliches gilt von Bernoulli.

Dagegen ist freilich Taylor zu einer singulären Lösung einer Differentialgleichung gekommen; dieses geschah aber in der Weise, dass er mittelst einer besonderen Substitution die vorgelegte Gleichung in ein Produkt zweier anderer spaltete, von denen die eine die allgemeine Lösung, die andere die singuläre giebt.

Gm.

R. Rubini. Intorno ad un punto di storia matematica. Battaglini G. XVII. 149-159.

Es handelt sich um einen Punkt der Geschichte der Differentialgleichungen und zwar speciell um die Lösung der Gleichung

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_n y = X.$$

Herr Trudi hatte die Lösung derselben durch ein vielfaches Integral d'Alembert zugewiesen, während sie wahrscheinlich Brunacci zuzuschreiben ist. Angefügt ist ein Brief Hoüel's über dieselbe Gleichung.

O.

A. Sachse. Versuch einer Geschichte der Darstellung willkürlicher Functionen. Diss. Göttingen.

Siehe Abschnitt VII. Cap. 1.

L. Königsberger. Zur Geschichte der Theorie der elliptischen Transcendenten in den Jahren 1826-1829. Leipzig. Teubner.

Siehe Abschnitt VII. Cap. 2.

H. Weissenborn. Das Trapez bei Euklid, Heron und Brahmegupta. Schlömilch Z. XXIV. Suppl. Hl. A. 167-184.

Das gleichschenklige Paralleltrapez behandelten die Aegypter mit Vorliebe, indess berechneten sie dessen Flächeninhalt, wie der Papyrus Rhind und die weit spätere Tempelinschrift von Edfu beweisen, nach einer falschen Formel, die eigenthümlicherweise sogar noch bei dem exacten Heron auftritt. Euklid dagegen hat sich mit dieser Figur gar nicht beschäftigt; sein

„Trapez“ ist dasselbe, was man heutzutage gewöhnlich „Trapezoid“ nennt. Der Verfasser sucht dann weiter die Grundsätze auf, auf denen die Heron'sche Eintheilung der Trapeze beruhte, und untersucht, wie solche Trapeze von durchaus rationalen Seiten und Diagonalen und Höhensegmenten durch Composition pythagoräischer Dreiecke hergestellt werden konnten. Da andererseits die Inder auf ähnliche Weise ihre rationalen Sehnenvierecke construirten, so untersucht der Verfasser den Zusammenhang zwischen Kreisviereck und Trapez und gelangt durch eine sehr elegante Rechnung zu dem in dieser Form neuen Ergebnis: Sind a, b, c, d die vier Seiten eines Vierecks und setzt man den Flächeninhalt einmal gleich

$$\tfrac{1}{4}\cdot\frac{a+c}{a-c}\sqrt{(a+b-c+d)(-a+b+c+d)(a-b-c+d)(a+b-c-d)},$$

ein zweites Mal gleich

$$\tfrac{1}{4}\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)},$$

so gehört dieser Flächeninhalt jeweils einem Viereck von der Beschaffenheit zu, dass entweder die zwei Winkel, welche dieselbe Diagonale mit den beiden Gegenseiten bildet, oder aber die zwei Winkel, welche die verschiedenen Diagonalen mit diesen beiden Gegenseiten bilden, einander gleich sind. Im letzteren Falle hat man also das Sehnenviereck, im anderen das Paralleltrapez. Zu den Indern sich wendend, bemerkt der Verfasser zuvörderst, dass jene falsche ägyptische Regel, nach welcher die Vierecksfläche unter allen Umständen $= \frac{1}{2}(ac+bd)$ sein sollte, für jenes Kreisviereck strenge richtig ist, welches in der indischen Geometrie eine Hauptrolle spielt und bei welchem sich die Diagonalen rechtwinklig schneiden. Eine geistreiche, wenn auch freilich vom historischen Standpunkt aus anfechtbare, Divination sucht den Weg aufzuklären, auf welchem der Inder Brahmegupta zu dieser Formel gelangt sein könnte. Da die betreffende Specialität des Kreisvierecks im Indischen als „Trapez“ bezeichnet wird, so ist eine gewisse Continuität zwischen ägyptischer, indischer und griechischer Mathematik in diesem concreten Falle festgestellt. Gr.

Account of Descartes' geometry. Harvard University. Library Bull. 1878-1879. 246-250.

Die Arbeit, deren erster Theil hier vorliegt, hat den Zweck, den Leser mit dem Inhalt des Descartes'schen Werkes und der Art, in der dort die analytische Geometrie behandelt wird, bekannt zu machen. Der vorliegende Theil, der zugleich Berichtigungen zu Montucla giebt, bespricht die Capitel: 1) Des problèmes qu'on peut construire sans y employer que des cercles et des lignes droites; 2) De la nature des lignes courbes; 3) De la construction des problèmes qui sont solides ou plus que solides.

O.

P. Mansion. Principes de la théorie des développoides des courbes planes. N. C. M. V. 356-363.

Historisch. Vereinfachte Auseinandersetzung der Untersuchungen von Réaumur, Lancret, Haton de la Goupillière etc. über die Enveloppen von Geraden, die einen constanten Winkel mit den Normalen ebener Curven bilden. Mn. (O.)

F. Redtenbacher. Geist und Bedeutung der Mechanik und geschichtliche Skizze der Entdeckung ihrer Principien. München. F. Bassermann.

O. Röthig. Ueber den Foucault'schen Pendelversuch. Schlömilch Z. XXIV. Hl. A. 153-159.

Der Verfasser zeigt zunächst an dem Wortlaute der Foucault'schen Arbeit, dass dieser das sogenannte Sinusgesetz nicht begründet habe, sondern nur als eine Behauptung und zwar nur als eine näherungsweise richtige, ausgesprochen habe. Er erwähnt sodann des Beweises, den Binet mit Hülfe der mechanischen Bewegungsgleichungen, aber auch nur als eines angenäherten Gesetzes, gegeben hat, und bespricht die dazu gemachten Bemerkungen Liouville's und Poinsot's. Darauf wendet er sich zu dem bekannten, in den meisten Lehrbüchern befindlichen Be-

weise, den er als ungenügend kennzeichnet, und giebt dann im Folgenden eine Klarlegung der wesentlichen Momente des Problems, die ihn zu einem mit Binet's Folgerungen übereinstimmenden Resultate führen. O.

E. Wiedemann. Materiali per la storia delle scienze naturali presso gli Arabi. Traduzione dal tedesco del A. Sparagna. Boncompagni Bull. XII. 873-876.

Uebersetzung der Artikel aus Poggendorff's Annalen, über die im Jahrbuch Bd. VIII. und IX. berichtet worden ist.

O.

R. Wolf. Geschichte der Vermessungen in der Schweiz, als historische Einleitung zu den Arbeiten der schweizer geodätischen Commission bearbeitet. Zürich. S. Höhr. 4°.

Nach der uns vorliegenden Besprechung in Schlömilch Z. XXV. Hl. A. 35—37 von M. Cantor hat Egidius Tschudi die erste Karte der Schweiz gefertigt. Einen wirklichen Fortschritt bezeichnet Johann Jacob Scheucher. Es wird dann weiter der Einfluss besprochen, den die Gründung der Sternwarten in Zürich und Genf in der Mitte des 18. Jahrhunderts gehabt hat, bis endlich Ende der achtziger Jahre die eigentlichen geodätischen Messungen begannen. Die Arbeit begleitet die weitere Entwickelung bis zu der Durchführung der Triangulation in dem Dufouratlas und dem noch fehlenden Anschluss an die Nachbarländer, den zu bewerkstelligen eben die Aufgabe der geodätischen Commission war. O.

P. Riccardi. Cenni sulla storia della geodesia in Italia dalle epoche fin oltre alla metà del secolo XIX. Parte prima. Bologna. Tip. Gambrini e Parmeggiani. 4°. Mem. di Bologna (3) X. 431-528.

Nach dem dem Referenten vorliegenden Berichte in Darboux

Bull. (2) III. 468—471 untersucht der Verfasser in der Einleitung den Einfluss der griechischen Arbeiten über Geodäsie und mathematische Geographie und bespricht dann die Etrusker und Römer, wobei er namentlich auf die Arbeiten von Cavedoni und Promis über das Groma aufmerksam macht. Das zweite Capitel ist Leonardo von Pisa gewidmet. Das erste gedruckte Werk Italiens über praktische Geometrie ist Valturio, De re militari. Capitel 3) beschäftigt sich mit der Entwickelung der höheren Geodäsie bis zum dreizehnten und vierzehnten Jahrhundert.

O.

S. Günther. Studien zur Geschichte der mathematischen und physikalischen Geographie. 6tes Heft. Geschichte der loxodromischen Curve. Halle a. S. Nebert.

Das vorliegende Schlussheft dieser Studien beschäftigt sich mit der Geschichte der loxodromischen Curve. Nachdem im ersten Paragraphen der Begriff der loxodromischen Curve festgestellt, wird constatirt, dass im Alterthume aus natürlichen Gründen von derselben nicht die Rede gewesen sei. Gegen die Wende des dreizehnten Jahrhunderts bürgerte sich der Schiffscompass bei den Bewohnern der spanischen und italienischen Mittelmeerküste ein. Damit war dann der Anlass zur Beschäftigung mit diesen Curven gegeben. Im § 2 und 3 wird nun ein Bild des damaligen Zustandes der Segelkunst gegeben und dann der Verdienste des Raimundus Lullus und besonders des Toaldo eingehend gedacht. Es ergiebt sich bei der Prüfung des Martologio des Toaldo die Thatsache, dass dort zum erstenmale die ebene Trigonometrie der Neuzeit in ihrer Eigenschaft als loxodromische Trigonometrie auftritt. Wichtiger noch als Toaldo für diese Frage ist der im § 6 besprochene Nunez, während ziemlich gleichzeitig Stevin die Frage ebenso theoretisch, wie jene und Gerhard Mercator mehr vom praktischen Gesichtspunkte ausgehend, behandelten. Systematischer als Mercator in seiner Darstellung, wenn auch nicht in seinem Erkennen, war Edward Wright. Nach Würdigung dieses kehrt der Verfasser in § 7 nochmals zu Stevin

zurück, der in einer neuen Bearbeitung die inzwischen von jenen gemachten Fortschritte benutzte. § 8 ist dann den Leistungen des Snellius gewidmet. Mit § 9, der noch einige weniger bedeutende Leistungen jener Zeit bespricht, schliesst gewissermassen die erste Abtheilung der Arbeit, d. h. der Theil, der sich mit der Zeit vor Leibniz beschäftigt. Dann beginnt die neue Zeit. In § 10 wird vor allen Dingen Leibniz selbst besprochen, dem im folgenden Paragraphen Jacob Bernoulli folgt. § 12 bespricht die Arbeiten mehrerer Engländer, unter denen besonders Halley zu nennen ist. § 13 erörtert die Verallgemeinerung, die das Problem von Johann Gottfried Walz durch Uebertragung auf das Ellipsoid erfahren. Seine Arbeit über diesen Gegenstand ist auch für andere Gebiete von grossem Interesse. In demselben Jahre, wie Walz (1751) ging auch Maupertuis an das Problem heran. Nach diesem werden noch Maclaurin und Simpson besprochen. § 16 behandelt Kästner und § 17 ist der Besprechung der Hauptrepräsentanten der mehr nautischen Literatur, speciell Kaschub, Bouguer, Robertson, gewidmet. § 18 wendet sich zur Neuzeit, speciell zu Gudermann, Grunert, Plagemann, und der Schlussparagraph endlich enthält eine kurze Besprechung der Arbeiten, die sich mit der Theorie dieser Curven auf anderweiten Rotationsflächen beschäftigen.

O.

H. Fischer. Ueber einige Gegenstände der physischen Geographie bei Strabo, als Beitrag zur Geschichte der alten Geographie. Erster Theil. Pr. Wernigerode.

Verfasser rechtfertigt den Strabo gegen den häufig erhobenen Vorwurf, dass er den mathematisch-physikalischen Theil der Erdkunde ungebührlich vernachlässigt habe; derselbe erkläre ja ausdrücklich, dass er wegen jener mehr vorbereitenden Lehren sich auf die trefflichen Werke von Hipparch, Eratosthenes, Posidonius und Polybius beziehe, und diese sind freilich für uns zum bei weitem grössten Theile verloren gegangen. Immerhin enthalte Strabo's Arbeit sehr viel für die physische Geographie verwerthbares Material, das nur gehörig geordnet werden müsse. Dieser

Aufgabe unterzieht sich nun Herr Fischer. Die von ihm gefundenen Resultate sind namentlich von Werth für den von Peschel als „vergleichende Erdkunde“ bezeichneten Wissenszweig; sachlich decken sie sich mehrfach mit jenen, welche unlängst von Wimmer in dessen interessanter Schrift „Die historische Landschaft (München 1879)“ mitgetheilt worden sind.

Der Verfasser stellt demgemäss zunächst Alles zusammen, was die Alten nach Strabo's Zeugnis von neptunischen oder vulkanischen Veränderungen der Erdoberfläche wussten oder zu wissen glaubten, und bespricht auch die von demselben beigebrachten Erklärungsgründe. Insbesondere beschäftigt sich Strabo mit den Alluvionen und Deltabildungen; manche seiner Nachrichten mussten von der fortgeschrittenen Wissenschaft als Mythen zurückgewiesen werden; andere, z. B. über den Lauf des Oxus, haben bleibenden Werth. Jedenfalls werden spätere Bearbeitungen der antiken Erdkunde, soweit deren mehr exacte Theile in Betracht kommen, mit der stattlichen Materialiensammlung Fischer's zu rechnen haben. Gr.

Th. H. Martin. Histoire des hypothèses astronomiques grecques qui admettent la sphéricité de la terre. Mém. de l'Ac. Inscript. XXIX.

A. Häbler. Astrologie im Alterthum. Pr. Zwickau.

Der Verfasser beginnt damit, dass er die Wichtigkeit der Entwickelung der Astrologie nicht nur für die Astronomie, sondern auch für die allgemeine Culturgeschichte auseinandersetzt. Er macht dann wahrscheinlich, dass nach den Keilinschriften schon das Volk der Akkader die Sterndeutung ausgebildet und später auf die semitische Bevölkerung Mesopotamiens vererbt habe. Dem schliesst sich eine Beschreibung des wahrscheinlich ältesten Denkmals der Astrologie, des astronomisch-astrologischen Werkes Sargon's I. von Agone, an, das sich in der Bibliothek des Königs Assurbanipal gefunden hat. Es ergiebt sich aus diesem, „Namar-Bili“ genannten Werke, dass die Astrologen jener Zeit und Ge-

gend besonders den Mond, dann Venus und Mars zum Gegenstande ihrer Beobachtung gemacht haben. Kurz nur wird weiter die Astrologie bei den Aegyptern behandelt. Auf Seite 10 wendet sich der Verfasser zu den Griechen und Römern. Hier wird mit Herodot begonnen, und sodann Pythagoras, Oenopides, Eudoxus, Archytas und endlich der Kalender des Meton besprochen. Durch den Baalpriester Berosus kamen die chaldäischen Kenntnisse nach Griechenland. Seine Lehre erlangte grossen Einfluss, dem sich auch die Stoiker nicht entzogen. Der Ansicht der Stoiker ist ein weiterer Abschnitt der Arbeit gewidmet. Daran knüpft sich eine Besprechung der astrologischen Gedichte: „περὶ καταρχῶν“ des Maximus, und der Schrift „εἰσαγωγὴ εἰς τὰ φαινόμενα“ des Geminus aus dem letzten Jahrhundert vor unserer Zeitrechnung. Mit pag. 20 beginnt die Besprechung der Römer. Die erste Ausweisung der Astrologen erfolgte im Jahre 139 n. Chr. Namentlich der Einfluss der Astrologen auf die Kaiser wird im Einzelnen verfolgt. Ein längerer Abschnitt ist dabei dem Tetrabiblos des Ptolemäus gewidmet, ebenso werden auf pag. 34 die 8 Bücher Matheseos des Firmicus Maternus eingehend besprochen.

O.

C. Taylor. Insigniores orbitae cometarum proprietates. Messenger (2) IX. 68-71.

Bericht über Lambert's Werk mit dem obigen Titel, das 1761 in Augsburg veröffentlicht worden ist. Der Verfasser reproducirt auch Lambert's Untersuchung über den Satz, der seinen Namen führt. Sein Beweis ist geometrisch. Die Arbeit enthält einen Bericht der geometrischen Sätze über Kegelschnitte, die Lambert bewiesen hat, nebst Bemerkungen und Zusätzen.

Glr. (O.)

Capitel 2.

Philosophie (Methodik, Pädagogik).

O. Caspari. Die Grundprobleme der Erkenntnisthätigkeit. Berlin. Th. Grieben. Kosmos III. 400-402.

Der Artikel enthält ein Referat S. Günther's über O. Caspari's Grundprobleme der Erkenntnisthätigkeit, Bd. I. und II. in dem sich der Referent, der in einzelnen Punkten, z. B. in Betreff der Riemann'schen Metageometrie, der Laplace'schen Weltformel anderer Ansicht als Caspari ist, doch im Ganzen günstig über das Werk und den kriticistischen Standpunkt des Verfassers ausspricht.

Mi.

G. Frege. Begriffsschrift. Halle a. S. L. Nebert.

Der Versuch Frege's, eine Begriffsschrift oder eine Formelsprache des reinen Denkens zu schaffen, ist durch die bei arithmetisch-philosophischen Untersuchungen dem Verfasser sich aufdrängende Ueberzeugung veranlasst, dass unsere Sprache zum Ausdruck lückenloser Schlussketten ungeeignet sei. Die Begriffsschrift soll den Gedanken möglichst rein und direct wiedergeben und Richtigkeit wie Organismus eines zusammengesetzten Schlusses klar darlegen. Ihre Anwendung soll sie nach der Ansicht ihres Schöpfers in philosophischen, mathematischen und physikalischen Fragen finden. Die Schrift setzt sich zusammen aus zwei Arten von Zeichen, von Buchstaben für veränderliche, jedesmal verschiedene Begriffe und aus eigenartig geformten Zeichen für synthetisch-logische Operationen. Der erste Theil der Arbeit giebt die Feststellung und Erklärung der sieben Grundzeichen der zweiten Art; im zweiten Abschnitt werden eine Anzahl logischer Sätze, die unabhängig von der Erfahrung aus den Beziehungen des reinen Denkens folgen sollen, (acht von ihnen sind besonders wichtig) mit Hilfe der Begriffsschrift abgeleitet. Der dritte Theil enthält Sätze einer allgemeinen Reihenlehre. Die Schrift wird den Philosophen

mehr als den Mathematiker interessiren. Der Reihenbegriff im dritten Abschnitt ist allgemeiner als der mathematische; die einzelnen Sätze sollen ebenfalls ohne jede Anschauung aus dem reinen Denken folgen. Mit Hilfe von vier neuen Zeichenverbindungen, die der Abkürzung wegen eingeführt worden sind, und deren Bedeutung erklärt wird, werden Sätze über Vererbung, über das Aufeinanderfolgen in einer Reihe etc. aufgestellt. In einem Zusatz, abgedruckt in den Sitzungsber. d. Jen. Ges. f. Med. und Naturw. vom 10. Jan. 1879, sind drei speciell mathematische Sätze über die Congruenz von Punktepaaren, über Primzahlen und über die Darstellbarkeit einer positiven ganzen Zahl durch die Summe von vier Quadratzahlen in der Begriffsschrift ausgedrückt. Dass die Mathematik grossen Nutzen aus der Begriffsschrift Frege's ziehen werde, scheint zweifelhaft. Mi.

H. McColl. Calculus of equivalent statements (3. paper). Proc. L. M. S. X. 16-28.

In diesem dritten Artikel (die früheren s. F. d. M. X. 34) setzt Herr McColl seine zuerst unter dem Namen „Symbolical Language" veröffentlichte und zunächst zur Verwendung auf mathematische Probleme bestimmte Arithmetisirung der Logik fort und bringt sie zu einem gewissen Abschluss. Artikel I und II enthielten Definition I—XIII und Sätze I—XVIII. Im dritten Artikel kommen zwei Definitionen und 6 Sätze hinzu, in denen die Regeln über Auffindung und Ausschliessung der überflüssigen „terms" eines unbestimmten Satzes (vergl. Def. 3), über die Reduction der Sätze auf ihre primitive Form und über die Substitution von 1 und 0, d. h. nach Boole's Sprachgebrauch, die Regeln der Elimination eines oder mehrerer Termini, aufgestellt werden. McColl drückt zur Verdeutlichung seiner Regeln und Bezeichnungen dann zwei Probleme aus Boole's „Laws of Thought" (p. 106 u. 146), von denen das erste auch in Liard's „Logiciens anglais" p. 130ff. besprochen ist, in seinen Formeln aus, die Berechnungen seiner Vorgänger theilweise ergänzend. Nach seiner Ansicht ist seine Methode auch bei der Erforschung von Natur-

gesetzen verwendbar und berührt die „method of agreement", die „joint method" und die „method of difference". Zum Schluss bespricht McColl sein Verhältnis zu Boole und Stl. Jevons, von deren Entdeckungen die seinigen — die selbständig entstanden sind — hauptsächlich dadurch abweichen: 1) dass bei ihm jeder Buchstabe Bezeichnung eines Satzes ist; 2) dass bei ihm das Symbol : für Einschliessung verwendet wird; 3) dass bei ihm die Verneinung eines Satzes nicht durch die kleinen Buchstaben oder durch $1-x$, sondern durch einen beigefügten Accent ausgedrückt wird. McColl's Aufstellungen sind in der That ein recht werthvoller Beitrag zu der im Entstehen begriffenen mathematischen Logik. Mi.

A. Macfarlane. On the principles of the logical algebra; with application. Proc. of Edinb. 1878-1879. 44, 61, 105-111.

Theil I. p. 44, Theil II. p. 61, Theil III. 105—111 enthalten Anwendungen auf gewisse Probleme in der Theorie der Wahrscheinlichkeit. Der Verfasser bezieht sich auf Boole's „Laws of Thought" und auf sein eignes Werk: „Principles of the algebra of logic". Die logische Gleichung, die im dritten Theil zur Discussion gewisser Probleme in der Wahrscheinlichkeit gebraucht wird, heisst:

$$\frac{xy}{x} = xy + 0x(1-y) + \frac{0}{0}\overline{(1-x)};$$

das heisst: Was y ist, ist identisch mit dem, was x und y ist, zusammen mit keinem Theil von dem, was x ist und nicht y, zusammen mit einem indefiniten Theil von dem, was nicht x ist. Cly. (O.)

A. Macfarlane. On a calculus of relationship. Proc. of Edinb. 1878-1879. 224-232.

Der Verfasser bezieht sich auf eine Arbeit von De Morgan: „On the logic of relations" Trans. of Cambr. X. 1860, der sich nicht allein mit dem Begriff der Verwandtschaft (relationship), sondern allgemein mit dem der Beziehung (relation) beschäftigt.

Was der Verfasser selbst versucht, ist die Herleitung einer vollständigen analytischen Bezeichnung für das, was graphisch mittelst eines genealogischen Stammbaums dargestellt werden kann. Er giebt also Betrachtungen über die Art, wie Data über Verwandtschaft ausgedrückt werden können, und Regeln zur Behandlung dahin gehöriger Fragen. Die Fundamentalbezeichnungen, welche die Verwandtschaft 1) des Vaters zu seinen Söhnen, 2) des Vaters zu seinen Töchtern, 3) der Mutter zu ihren Söhnen, 4) der Mutter zu ihren Töchtern bezeichnen, sind *s*, *d*, *σ*, *δ*.

Cly. (O).

L. Kluth. Ueber die Vereinbarkeit der mechanischen Weltbetrachtung mit der teleologischen. Pr. Halle.

Diese Abhandlung bezeichnet der Verfasser als eine Reproduction der in Lotze's Mikrokosmus niedergelegten Weltansicht. Sie setzt die Existenz eines „Kampfes“ zwischen den beiden Betrachtungsweisen, dessen Entscheidung oder Ausgleich eine unumgängliche Forderung der Wissenschaft sei, als einleuchtend voraus, zeigt, dass jede für sich unzureichend ist, und sucht eine Ausgleichung durch Verschmelzung beider herbeizuführen. Es fehlt also zunächst die Voruntersuchung, ob beide Betrachtungen auf Lösung derselben Frage gerichtet sind, was begreiflicherweise nicht stattfindet, eine Untersuchung, die sofort die Nichtigkeit des Streites dargethan und ein klares Verhältnis zwischen beiden hergestellt hätte. Es war leicht nachzuweisen, worauf im Anfang eingegangen wird, dass die mechanistische Betrachtung, welche die Welt (das kann nur heissen: Alles, wovon wir Ideen haben) aus Atomen und deren Bewegung nach nothwendigen Gesetzen nachconstruiren will, nothwendig unzureichend ist, sofern ihr nämlich die „Seele“ unzugänglich sein muss. Zum Beweise des letztern charakterisirt der Verfasser das „Bewusstsein“; da er aber dieses immer nur als Attribut eines Gegenstandes, wenn auch ausschliesslich eines individuellen, darstellt, so kann er damit denjenigen nicht evident widerlegen, der auch dieses Attribut mechanistisch herzuleiten hofft. Den schlagenden Grund hat er ver-

gessen, dass auch der Attribuens ein Individuum ist, dass das Ich des Einen kein Ich des Andern sein kann; während alle Gegenstände der Naturwissenschaft, unabhängig von der Auffassung, für alle Menschen dieselben sein müssen. Sonst ist noch aus jener Ausführung bemerkenswerth, dass der eingewurzelte Fehler gerügt wird, die Sätze der Wissenschaft als Dogmen zu betrachten und ihre Abhängigkeit von Hypothesen zu vergessen. In den weiter folgenden Ausführungen wird einigemal, wiewohl nur vorübergehend, als Argument der subjective Grund der objectiven Ideen an's Licht gezogen, das Ganze geht aber mehr und mehr in blosse Schilderung über und verweilt bei keinem Punkte. H.

L. Ballauf. Ueber die mathematischen Definitionen und Axiome. Pr. Varel.

Die Forderungen mathematischer Strenge in den Principien werden hier in eingehenderer und treffenderer Weise besprochen, als es gewöhnlich geschieht. Voraussetzungsloses Denken giebt es nicht; die Abhängigkeit von den bestimmten Voraussetzungen muss zum Bewusstsein gelangen und in der Formulirung ihren Ausdruck finden. Dies ist in manchen Punkten schwierig; zur Aushülfe wird dann öfters die Definition durch Axiome vertreten, z. B. bei der Länge krummer Linien, wo Archimedes 2 Axiome anwendet. Die Abhängigkeit der Grundbegriffe von der Anschauung erfahrener Wirklichkeit wird sehr wohl bemerkt und bei allen geometrischen Begriffen vorgefunden, beim Zahlbegriff hingegen geleugnet. Dass auch letzterer nur auf Grund erfahrener Identität der Einheit möglich ist, entgeht dem Verfasser. Nach seiner Auffassung sind die mathematischen Gegenstände sämmtlich Producte geistiger Construction, an die Wirklichkeit nicht gebunden, sondern nur an die einzelnen logischen Gesetze. In Bezug auf letztere lässt er jedoch uncontrolirbare Täuschungen zu, die er nicht untersuchen will: ob ein logisches Gesetz nicht auf blosser Gewöhnung beruhe, könnte man nie wissen. Auf dieses eine werthvolle Eingeständnis folgt bald ein zweites.

Wir verlangen von der Mathematik nicht allein Bündigkeit in sich, sondern auch Gültigkeit für die Wirklichkeit. Diese verstehe sich bei den Zahlen von selbst, weil sie auf eigenmächtiger Auffassung beruhen. Doch auch in Geometrie und Mechanik sei die Wirklichkeit in gleichem Falle, auch deren Gegenstände seien (vielleicht) nur Erzeugnisse unbewusster Construction. Ist hier mit Wirklichkeit die Dingwelt und ihre Kräfte gemeint, so treffen beide Eingeständnisse grade den rechten Punkt, von dem aus sich die Frage vollkommen befriedigend lösen lässt, wenn eben der Weg weiter verfolgt worden wäre. In Betreff der ersteren hätte der Verfasser fragen sollen, woher die Gewöhnung komme. Viele vermeintliche Gesetzesschranken sind in der Fortbildung der Theorie überschritten worden; die Ergiebigkeit war stets das regulirende Element. In Betreff der letztern hat der Verfasser nicht beachtet, dass jene Construction der Dingwelt, um als Wirklichkeit zu gelten, in jedem Augenblick der Sinnesempfindung entsprechen muss. Die Frage war also noch nicht gelöst, bis erst untersucht war, warum die Geometrie dem Veto der Sinnesempfindung nie ausgesetzt ist, wenn es sich um Anwendung ihrer Sätze auf die Wirklichkeit handelt. Dies lässt sich zeigen, doch so kurz, wie hier durfte der Verfasser nicht darüber hinweggehen. Die natürliche Folge so voreiligen Abschlusses ist nun, dass für ihn in der Mathematik widersprechende Begriffe — er bezeichnet sie als metaphysische Elemente — zurückbleiben, denen er glaubt Berechtigung zuschreiben zu müssen, und zu denen er sogar die unendlichen Grössen rechnet; das heisst, er leistet Verzicht auf Klarheit. Im Ganzen finden wir ein Studium des Gegenstandes von ungewöhnlicher Tiefe, doch geringer Ausdauer. H.

J. Gilles. Ueber die Grundsätze der Mathematik. Bair. Bl. XV. 145-155.

Auf eine Kritik der Parallelentheorie von Polster (diese Blätter, XIII. Band, S. 333 ff., s. F. d. M. X. p. 348) folgen polemische Erörterungen gegen Helmholtz's Schrift „Ueber den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome". Verfasser

ist ein entschiedener Gegner der nichteuklidischen Geometrie und will sämmtliche physikalischen Kräfte auf Newton's Gravitation zurückgeführt wissen. Gr.

S. A. Sexe. Hvorledes man undgaar de imaginaere Störrelser. Arch. f. Math. og Naturv. IV. 145-166.

Um das Imaginäre zu vermeiden, ersetzt der Verfasser die unmögliche Operation, die Quadratwurzel aus einer negativen Grösse $-k^2$ zu ziehen, durch die immer mögliche Operation, die Grösse $-k^2$ in zwei Faktoren $+k$ und $-k$ mit demselben Zahlenwerthe zu zerlegen. In dieser Weise gelingt es, viele particuläre Sätze, die man sonst durch das Imaginäre beweist, ohne dasselbe zu begründen. L.

R. Moon. Theory of the infinite and of infinitesimal. London. Taylor u. Francis. Cambridge. Deighton, Bell u. Co.

Professor Maxwell hatte in den Proc. of the Cambr. Phil. Soc. Februar und März 1877 (siehe F. d. M. IX. p. 682) sein bekanntes Paradoxon über die Attraction eines materiellen Stabes von unendlicher Dünne und Kürze veröffentlicht. Herr Moon wiederholt in seiner Schrift die Beweisführung Maxwell's und zwei Referate der Cambr. Philos. Soc., in denen Maxwell's Behauptungen vertheidigt werden. Er widerlegt ferner in zwei Abschnitten die Schlüsse Maxwell's, wie der für ihn Partei nehmenden Referenten. Er zeigt, dass die Beweisführung seiner Gegner darin irrt, 1) dass die Attraction eines dünnen materiellen Stabes mit der Attraction einer geometrischen Linie verwechselt wird; 2) dass der Begriff Distance in dem Gesetz der Attraction ungenau gefasst ist; 3) dass der Begriff des Unendlichen falsch gefasst und das Unendlichkleine mit Null verwechselt ist. Die Sache seiner Gegner, die ihm zugeben müssen, dass der Satz Maxwell's nur eine mathematische Abstraction, kein Naturgesetz enthalte, ist allerdings eine verlorene. Mi.

E. Casse. Das Unendliche in der Mathematik und das Grössenelement. Pr. Osterode a. Harz.

Aus Casse's Untersuchung über das Unendliche in der Mathematik und das Grössenelement heben wir folgende Sätze hervor: „Eine unendliche Grösse ist eine veränderliche Grösse, deren absoluter Werth in einer schrankenlosen Vermehrung oder Verminderung begriffen ist." „Im ersten Falle heisst sie unendlich gross, im zweiten unendlich klein"; tang 90° ist nicht $= \infty$; tang 90° ist überhaupt keine Grösse, sondern die Grenze zwischen zwei Grössengebieten

$$\infty \pm a = \infty; \; a \pm dx = a.$$

(Zur Erläuterung dieses Satzes dient folgendes Beispiel: Vermehrt man 2 Mark um 50 Pf. und verwandelt man die Pfennige nicht in Mark, so sind 2 Mark 50 Pf. an Mark nicht mehr als 2 Mark, d. h. die Gleichung 2 Mark + 50 Pf. = 2 Mark ist, in diesem Sinne genommen, vollkommen richtig, obwohl die Grössen im Geldwerthe verschieden sind!) Das Differential der höheren Mathematik ist kein Unendlichkleines. „Wir sind logisch gezwungen, die Incremente als wahrhafte Grössenelemente zu betrachten." Grössenelemente sind Grössen, denen die Fähigkeit der Theilbarkeit abgeht. Das Grössenelement ist kleiner als das Unendlichkleine. Die räumlichen Grössenelemente sind Linien-, Flächen- und Körperelemente. Wie das Grössenelement untheilbar ist, so ist jede angebbare Grösse aus so vielen Elementen zusammengesetzt, dass keine Theilung derselben auf Elemente führen kann. Ist a eine unveränderliche endliche Grösse, α ein Grössenelement und β eine unendlich kleine Grösse, so ist $\frac{a}{\alpha} > \left(\frac{a}{\beta} = \infty\right)$. Jede krumme Linie besteht aus einer Summe von geraden Linien, jede krumme Fläche besteht aus einer Summe von ebenen Flächen, jeder Körper besteht aus ebenflächigen Körperelementen; eine Tangente ist eine gerade Linie, welche mit einer Curve ein Linienelement gemein hat. Es existiren Atome und zwar in der Form von ebenflächigen Körpern. Aus der Beziehung der Incremente aufeinander folgt, dass es zwei Arten von Incrementen

giebt, erstens solche, die der Theilbarkeit fähig sind, trotzdem sie nicht kleiner gedacht werden können (!), zweitens solche, denen die Theilungsfähigkeit gänzlich fehlt, relative und absolute. Die Methode der Grenzwerthbestimmung ist ungerechtfertigt und irreleitend.

Da der Verfasser selbst seine Arbeit mit der von Liersemann verfassten mathematischen Studie (F. d. M. X. p. 36) auf eine Linie stellt, über die sich der Referent bereits ausgesprochen hat, können wir uns jeder Kritik enthalten. Nur die eine Frage richten wir zum Schluss an Herrn Casse: Kann das als „absolut" bezeichnete Increment, also in dem (p. 11) gewählten Beispiele das Increment der Kathete, nicht wieder in Beziehung zu einem anderen Incremente, also z. B. als Increment einer Hypotenuse in Beziehung zu dem Incremente einer andern Kathete u. s. w. gedacht werden? Wo bleibt dann die Untheilbarkeit der „absoluten" Incremente?

Mi.

F. J. Studnička. Einige Bemerkungen über den Geist in der Mathematik. Casopis VIII. 85-91. (Böhmisch).

Der Aufsatz enthält eine Fortsetzung der unter diesem Titel schon im J. 1873 publicirten Ansichten über gewisse Eigenthümlichkeiten der mathematischen Beweise, worüber schon im V. Bd. dieser Berichte (pag. 54) referirt wurde. Diesmal werden hauptsächlich Determinanten berücksichtigt.

Std.

V. Schlegel. Ueber die Methode mathematischer Darstellung. Hoffmann Z. X. 169-176.

Es werden zunächst einige Erfordernisse der Darstellung durchgesprochen, u. a. das Wesen der Eleganz erörtert und näher auf das Thema der Bezeichnungen eingegangen. Im Ganzen verlangt der Verfasser eine angemessene Vertheilung in Formel und Wortausdruck. Dann werden Vergleichungen angestellt zwischen analytischer und synthetischer Methode hinsichtlich ihrer Vorzüge und Mängel, schliesslich aber die Grassmann'sche Me-

thode als diejenige, welche allen Anforderungen zugleich gerecht werde, empfohlen. Ueber den letzten Punkt hätte man wohl etwas nähere Angaben zur Motivirung des Urtheils erwarten dürfen.

H.

J. C. V. Hoffmann. Zur Reform des mathematischen und naturwissenschaftlichen Gymnasialunterrichts in Preussen. Hoffmann Z. X. 184-190, 317-332, 401-406.

Im ersten dieser 3 Artikel werden die so bezeichneten „Schwächen im preussischen Gymnasiallehrplan" aufgezählt. Der Verfasser findet die Stundenzahl für den Unterricht in den Realien zu gering, vermisst die Coordinatenlehre und die Sphärik, sonst ist wesentliches nicht genannt. Ein Nachweis des Bedürfnisses für allseitige Geistesentwickelung fehlt gänzlich. Der 2. Artikel bespricht die Schrift: „Culturgeschichte und Naturwissenschaft" von Du Bois-Reymond, welche von der Reform des Gymnasialunterrichts handelt, erklärt sich aber für sehr unzufrieden mit den geringen Forderungen, welche dieselbe am Schlusse zu stellen gewagt habe. Hieraus folgt der Lehrplan, wie ihn der Verfasser wünscht. Im 3. Artikel befürwortet er den Uebergang zur „Einheitsschule", welche ohnedies das unausbleibliche Resultat des Kampfes zwischen Gymnasium und Realschule sein würde.

H.

A. Tabulski. Entwurf eines Lehrplans für den mathematischen Unterricht am Königlichen Gymnasium zu Rogasen, nebst einigen Bemerkungen über die Methodik desselben. Pr. Rogasen.

Der Lehrplan ist ziemlich detaillirt, die entwickelten didaktischen Grundsätze, obwohl sie keinen wesentlich neuen Gedanken darbieten, geben eine gute Uebersicht über die Erfordernisse des mathematischen Unterrichts. H.

G. Korneck. Genetische Behandlung des planimetrischen Pensums der Quarta, nebst einleitenden Bemerkungen. Pr. Kempen. (Posen).

In der Einleitung spricht sich der Verfasser dafür aus, dass die Frage nach der Methode eine offene ist, und dass wir nicht auf die Vereinigung der zwei Erfordernisse, streng logische und intuitive Ausbildung, verzichten dürfen. Um dies zu zeigen, stellt er einen didaktisch ausgeführten Lehrplan für propädeutischen Unterricht in der Planimetrie auf. Die Darlegung ist vom logischen Gesichtspunkt in vielen einzelnen Punkten besserungsbedürftig (bei Erklärung der Parallelen augenfällig unrichtig), immer aber wegen des überwiegend tüchtigen Inhalts als erster Entwurf brauchbar.

H.

B. J. Capesius. Goltzsch's verbundener Zahl-, Sach- und Messunterricht. Pr. Sächsisch-Regen.

Im durchgehenden Anschluss an das so betitelte, auf die Oberklasse der Volksschule bezügliche Buch von Goltzsch wird nach einer historischen Einleitung, welche das wachsende Gewicht der Realien im Unterricht erklärt, das Verhältnis der realen und formalen Schulbildung erörtert und auf die Nothwendigkeit hingewiesen, die Gegenstände des bürgerlichen Lebens, in welchen das Rechnen zur Anwendung kommt, ausdrücklich zu lehren, und zwar in Verbindung mit dem Rechnen selbst. Dem dargelegten Plane gemäss theilt sich der Rechenunterricht, von dem in der Unterklasse nur die einfachen Species vorausgenommen werden, nach den Gegenständen der Anwendung in succedirende Abschnitte, an die sich auch das Messen und die Flächenberechnung anschliesst. Alle Theorie zusammengesetzter Rechnungsarten verwirft der Verfasser. Die Erörterung zeugt von grosser Umsicht in der Berücksichtigung aller Erfordernisse. Zum Schluss wird der Versuch gemacht, die gleiche Methode für die Mittelschulen zu verwenden.

H.

Zweiter Abschnitt.

A l g e b r a.

Capitel 1.

Gleichungen. (Allgemeine Theorie. Besondere algebraische und transcendente Gleichungen).

L. KRONECKER. Entwickelungen aus der Theorie der algebraischen Gleichungen. Berl. Monatsber. 1879. 205-229.

I. Vereinfachung des Abel'schen Beweises „der Unmöglichkeit, algebraische Gleichungen von höheren Graden als dem vierten, allgemein aufzulösen." Unabhängig von irgend welchen anderweitig begründeten Resultaten und Begriffen wird zuerst der Abel'sche Satz präcisirt, dass jede, in den Ausdruck der Wurzel einer auflösbaren Gleichung eingehende Irrationalität aus den Coefficienten rational in den Gleichungswurzeln sei; dann wird gezeigt, dass es keine Functionen von mehr als 4 Grössen giebt, bei welchen sämmtliche, durch Permutationen dieser Grössen auftretende Werthe für ein und dieselbe Substitution ungeändert bleiben. Aus diesem Satze folgt einerseits, dass es keine Functionen von $n > 4$ Grössen mit weniger als n Werthen giebt, welche nicht alternirend oder symmetrisch wären; andrerseits in Verbindung mit dem ersten Satze, dass Gleichungen höherer Grade unauflösbar sind.

II. Ueber die Auflösbarkeit von Gleichungen, deren Grad eine Primzahl ist. Es wird nach kurzer Feststellung der Be-

griffe und Bezeichnungen, welche sich bei der Behandlung algebraischer Gleichungen als nothwendig herausgestellt haben, der Beweis geliefert, dass eine Gleichung vom Primzahlgrad, welche unter Adjunction von mehr als einer Gattung cyklischer Functionen irreductibel bleibt, nicht auflösbar sein kann. Bleibt sie unter Adjunction nur einer Gattung cyklischer Functionen irreductibel, so wird sie dadurch zu einer Abel'schen Gleichung n^{ten} Grades, während die zugeordnete Function Wurzel einer Abel'schen Gleichung $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades wird. Es ergeben sich ferner die Sätze: Jede Function, unter deren Adjunction die Gleichung irreductibel bleibt, muss mindestens nach einer Anordnung cyklisch sein. Nur wenn eine solche Function einfach cyklisch ist, können die Wurzeln der Gleichung sich als explicite algebraische Functionen derselben darstellen lassen. Jede Wurzel einer auflösbaren Gleichung vom Primzahlgrade ist durch zwei beliebige andere rational ausdrückbar.

III. Ueber die Classe der Gleichungen, von denen die Theilung der elliptischen Functionen abhängt. Ist n eine ungrade Primzahl, so giebt es eine Classe von Gleichungen des Grades n^2, bei der alle n^2 Wurzeln $x_{h,k}$ durch je drei derselben, deren Indices einer Congruenz nicht genügen, rational ausdrückbar sind. Adjungirt man x_{00}, so kommt man zu einer Classe von Gleichungen $(n^2-1)^{\text{ten}}$ Grades, bei der alle Wurzeln rational durch zwei $x_{h,k}$, $x_{h',k'}$ ausgedrückt werden können, falls $hk'-kh'$ nicht durch n theilbar ist. Die n^2-1 Grössen sondern sich in $n+1$ Gruppen von je $n-1$ Elementen, bei denen das Verhältnis $h:k$ mod. n dasselbe ist. Es giebt cyklische Functionen z^2 aller $n-1$ Grössen einer Gruppe, welche einer Gleichung $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades genügen; sie charakterisiren eine Gattung, deren Permutationen durch den Uebergang von $z_{h,k}$ zu $z_{ah+bk,ch+dk}$ charakterisirt sind. Unter Adjunction einer ihrer Wurzeln wird die Gleichung auflösbar; jede der $n+1$ Grössen z^2 ist daher eine rationale Function von dreien unter ihnen. Die Anzahl der Permutationen von Γ ist $n(n^2-1)$. Ist v ein unbestimmter Parameter, und Γ' die durch $v\,\Gamma+\Delta$ bestimmte Gattung, (wobei Δ die Quadratwurzel aus der Discriminante der Gleichung $2(n+1)^{\text{ten}}$ Grades bedeutet, welcher die z genügen), so

giebt es in jeder Gattung von Gleichungen, welche zu der durch Γ charakterisirten Classe gehören, stets Gleichungen, deren Wurzeln gewisse lineare Relationen erfüllen. Ueber die Bedeutung dieser Resultate vgl. Berl. Monatsber. v. 27. Juni 1861. No.

G. G. Boldt. Mémoire sur les équations résolubles algébriquement. Borchardt J. LXXXVII. 1-26.

Die Arbeit liefert die Beweise für die in der unvollendeten Abel'schen Abhandlung (Oeuvres compl. II. No. XV.) enthaltenen Sätze über irreductible Gleichungen, deren Grad eine Primzahlpotenz ist. Der Herr Verfasser geht von der Abel'schen Form für die Wurzeln aus und knüpft die Betrachtung an Producte von der Constitution

$$\Pi(x-x_\lambda),\ \Pi\Pi(x-x_\lambda),\ \ldots,$$

welche so gebildet sind, dass in jedem folgenden ein äusserer Radicand, der im vorhergehenden auftrat, weggefallen ist.

No.

E. Netto. Beweis der Wurzelexistenz algebraischer Gleichungen. Borchardt J. LXXXVIII. 16-22.

Die Demonstratio nova altera von Gauss (Werke III. 33-56) hat neuerdings Veranlassung zu zwei Arbeiten (Gordan, Clebsch Ann. X. p. 572—575; F. d. M. VIII. p. 45 und König, Clebsch Ann. XV. p. 161—173; F. d. M. dieser Bd. p. 62) gegeben; auch der vorliegende Beweis lehnt sich seinem Grundgedanken nach an dieselbe an. Durch Vorausschickung eines substitutions-theoretischen Satzes wird für den Beweis selbst eine grosse Einfachheit gewonnen. Eine unmittelbare Folge dieses Satzes bildet den Kernpunkt des Beweises. Ist nämlich y eine $n!$-werthige Function der Elemente $a_1 \ldots a_n$ und $n! = \varrho . \sigma$, wo ϱ die höchste in $n!$ enthaltene Potenz von 2 und dem entsprechend ϱ eine ungrade Zahl ist, und sind $y_1 \ldots y_{n!}$ die $n!$ Werthe von y, so setzt sich die Function $\Delta = \prod_{\varrho=1}^{n!} (x-y_\lambda)$ allemal aus σ Faktoren $\Phi(x, z_\nu)$, $(\nu=1, \ldots \sigma)$,

zusammen, wo z_ν die Wurzeln einer Gleichung σ^{ten} ungraden Grades $\Gamma(z) = 0$ sind, und sowohl $\Gamma(z)$, als $\Phi(x, u)$ ganze Functionen von z resp. x_ν und u, deren Coefficienten in den elementaren symmetrischen Functionen λ der a rational und ganz sind; überdies ist die Gleichung $\Phi(x, u) = 0$ nach x durch Quadratwurzeln lösbar. Aus diesem Lemma ergiebt sich unmittelbar eine identische Umformung zunächst für $\Delta(x)$ und dann nach dem von Gauss l. c. benutzten Principe, dass jede in Form des Verschwindens einer ganzen Function der λ ausgedrückte Identität fortbesteht, wenn die λ durch die Coefficienten l einer ganz beliebigen ganzen Function n^{ten} Grades $L(x)$ ersetzt werden, eine ebensolche Darstellung von $D(x)$, wo $D(x)$ aus $\Delta(x)$ durch Vertauschung der λ aus den l hervorgeht, als ein Aggregat zweier Theile, von denen leicht zu sehen ist, dass sie zum Verschwinden gebracht werden können; für y wird hierbei speciell die Function $\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n$ genommen. Für $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = 0$ geht aber $D(x)$ in eine Potenz von $L(x)$ über.

Die Auflösbarkeit von $L(x) = 0$ ergiebt sich hier also ganz direct ohne einen inductorischen Schluss, der in den Beweis des substitutions-theoretischen Satzes zurückgedrängt ist.

(Auf S. 20 Z. 3 v. o. bedarf der Satz: „$\Phi(x, u)$ ist also durch $u - z_\nu$ theilbar“ und dem entsprechend das Folgende einer, für den Beweis jedoch nicht wesentlichen, Modifikation.) T.

J. König. Die Factorenzerlegung ganzer Functionen und damit zusammenhängende Eliminationsprobleme. Clebsch Ann. XV. 161-173.

Herr König liefert nach dem Principe des zweiten Gauss'schen Beweises des Fundamentalsatzes der Algebra einen eleganten Beweis dieses Satzes mit Hülfe algebraischer Identitäten. Bedeuten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ beliebige Zahlen, so erhält man für die Werthe, welche das Product von je r derselben annimmt, eine Gleichung $\binom{n}{r}^{ten}$ Grades $F(u) = 0$, deren Coefficienten ganze Functionen der elementaren symmetrischen Functionen sind. Er-

setzt man diese letzteren Grössen durch die (reellen) Coefficienten der gegebenen Gleichung n^{ten} Grades

$$x^n + A_1 x^{n-1} + \cdots + A_n = 0,$$

so besteht das Problem, einen reellen Factor r^{ten} Grades der linken Seite zu bestimmen, darin, eine reelle Wurzel der Resolvente $F(u) = 0$ zu finden. Dabei ist aber noch vorausgesetzt, dass die Discriminante von $F(u)$ nicht 0 sei, was sich durch eine lineare Transformation $x = z + \mu$ in der gegebenen Gleichung stets erreichen lässt. Ist der Grad n keine Potenz von 2, sondern $n = 2^k.q$, so ist $\binom{n}{r}$ für $r = 2^k$ eine ungrade Zahl und die Aufgabe gelöst. Ist $n = 2^k$, so sind die Zahlen $\binom{n}{r}$, ausgenommen, wenn $r = 2^{k-1}$, durch 4 theilbar. Für $r = 2^{k-1}$ erhält man $\binom{n}{r} = 2\nu$, wo ν ungrade. Durch die Substitution

$$u + \frac{A_n}{u} = v$$

geht die Resolvente in eine Gleichung ν^{ten} Grades $\Phi(v) = 0$ über, so dass, falls $A_n < 0$, sich auch jetzt ein reeller Werth für u ergiebt. Ein solcher lässt sich auch finden, wenn $A_n > 0$.

St.

V. Janni. Espressione generale di un coefficiente d una equazione in funzione delle somme delle potenzei simili delle radici dell' equazione medesima.
Rend. di Nap. XVIII. 199-201.

E. Fergola, F. Padula, G. Battaglini. Rapporto sulla nota di V. Janni. Rend. di Nap. XVIII. 199.

Laguerre. Sur la règle des signes de Descartes.
Nouv. Ann. (2) XVIII. 6-13.

Für die Regel wird ein Beweis gegeben, der auch für Functionen von endlicher Gliederzahl mit gebrochenen Exponenten und für unendliche Reihen innerhalb des Convergenzgebietes gilt.

Ist also $f(x)$ eine ganze Function, wird $\varphi(x)$ ferner so gewählt, dass $f(x):\varphi(x)$, in eine Reihe entwickelt, nur eine endliche Zahl von Zeichenwechseln bietet, so hat $f(x)=0$ innerhalb des Convergenzkreises höchstens so viele Wurzeln, als die Anzahl der Zeichenwechsel angiebt.

No.

J. J. Sylvester. Note sur une propriété des équations dont toutes les racines sont réelles. Borchardt J. LXXXVII. 217-219.

Sind alle Wurzeln einer binären Form reell, so sind alle Wurzeln der Covarianten zweiten Grades dieser Form imaginär.

No.

Biehler. Sur une classe d'équations algébriques dont toutes les racines sont réelles. Borchardt J. LXXXVII. 350-352.

Sind $a_1, a_2, \dots a_n$; $b_1, b_2, \dots b_n$ reelle Grössen, von denen die letzteren gleiches Vorzeichen haben, und setzt man

$$(x-a_1-ib_1)(x-a_2-ib_2)\dots(x-a_n-ib_n)=U_n+iV_n,$$

so sind die Wurzeln von $U_n=0$, $V_n=0$ sämmtlich reell und ungleich, und diejenigen von $V_n=0$ trennen die von $U_n=0$.

No.

Laguerre. Sur la séparation des racines d'une équation algébrique à coefficients numériques. C. R. LXXXIX. 635-637.

Ist

$$F(x)=(x-b)(x-a)\{C_0+C_1x+\dots+C_{n-2}x^{n-2}\}+B(x-a)-A(x-b),$$

wobei a und $b>a$ zwei positive Zahlen bedeuten, so ist die Anzahl der zwischen a und b liegenden Wurzeln von $F(x)=0$ höchstens gleich der Anzahl der Zeichenwechsel von

$$A,\ B-bC_0,\ B-b^2C_1,\dots B-b^{n-1}C_{n-2},\ B.$$

No.

J. Farkas. Sur la détermination des racines imaginaires des équations algébriques. C. R. LXXXVIII. 273-275, 565-567.

Herr Farkas ändert die von Herrn Y. Villarceau gegebenen Einführungen (vgl. F. d. M. X. p. 56. 1878) etwas ab. Dadurch gelingt es, die Schwierigkeiten zu vermeiden, welche das Auftreten fremder Wurzeln in der Schlussgleichung nach sich zieht. Die Schlussgleichungen selbst werden mittelst symmetrischer Functionen berechnet. No.

A. E. Pellet. Sur les équations résolvantes. C. R. LXXXVIII. 638.

Der Grad der Resolvente einer Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten ist ein Vielfaches der Grade der verschiedenen irreducibeln Factoren der Gleichung, in welche dieselbe nach einem beliebigen Primzahlmodul zerfällt. No.

J. J. Sylvester. Preuve instantanée d'après la méthode de Fourier de la réalité des racines de l'équation séculaire. Borchardt J. LXXXVIII. 4-5.

Aus den Hauptunterdeterminanten der als Determinante geschriebenen Gleichung wird eine Sturm'sche Reihe gebildet, deren Zeicheneigenschaften sich durch die Sätze beweisen lassen, welche über die aus Adjuncten gebildeten Determinanten gelten. Der Grundgedanke des Beweises war bereits von Salmon in der „Higher Algebra" gegeben. No.

G. de Longchamps. Sur la limite des racines réelles d'une équation de degré quelconque. Nouv. Ann. (2) XVIII. 49-57.

Sind in

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \cdots + A_m = 0$$

alle Coefficienten positiv, so giebt die grösste positive Wurzel der Gleichungen

$$x^2+A_1x+A_2=0,\quad A_3x^2+A_4x+A_5=0,\ldots$$

eine obere Grenze für die Wurzeln der ersten Gleichung; wäre A_3 aber z. B. negativ, so nimmt man das System

$$x^2+A_1x+A_2-\lambda=0,\quad \lambda x^2+A_3x+A_4=0,\ldots,$$

wobei für λ eine willkürliche positive Grösse genommen werden kann.

No.

J. Farkas. Auflösung der dreigliedrigen algebraischen Gleichung. Grunert Arch. LXIV. 24-30.

Ausdruck der Wurzeln von $x^m+ax^n=b$ durch unendliche Reihen, mit Unterscheidung zweier Fälle, je nachdem

$$\text{mod.}\left(\frac{b^{\mu-1}}{a^\mu}\right)\gtrless\frac{(\mu-1)^{\mu-1}}{\mu^\mu}\quad\left(\mu=\frac{m}{n}>1\right)$$

ist.

No.

L. Maleyx. Comparaison de la méthode d'approximation de Newton à celle dite des parties proportionelles. Nouv. Ann. (2) XVIII. 218-232.

Nachweis, dass für Wurzeln, von denen bereits ein oberer und ein unterer Näherungswerth bekannt ist, die zweite Methode genauere Resultate liefert als die erste, ohne dass Einschränkungen wegen der Vorzeichen der ersten und zweiten Ableitungen nöthig wären.

No.

W. Zmurko. Untersuchungen im Gebiete der Gleichungen gegründet auf analytisch-geometrische Betrachtungen im Raume. Par. Denkschr. 1879. (Polnisch).

Der Verfasser hat sich hier die Aufgabe gestellt, die zur Berechnung reeller Wurzeln einer Gleichung dienende Fourier'sche Methode auf den Fall complexer Wurzeln auszudehnen und eine Methode zur Berechnung gemeinschaftlicher Wurzeln von Gleichungen mit mehreren Unbekannten zu finden. Dies enthält der erste Theil der Arbeit. Im zweiten Theile beschäftigt sich der

Verfasser mit den graphischen Methoden der Auflösung und mit den Ausführungen numerischer Rechnungen. Bcki.

A. Cayley. On the Newton-Fourier imaginary problem. Proc. of Cambr. III. 231-232.

Der Newton'sche Weg zur Annäherung an die Wurzel einer numerischen Gleichung $f(u) = 0$ besteht in der Herleitung eines neuen Werthes $x_1 = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ aus einer angenommenen angenäherten Wurzel x. Dieser Werth soll eine grössere Näherung an die gesuchte Wurzel geben. Es mögen nun die Coefficienten von $f(u)$ reell sein und ebenso die gesuchte Wurzel und der angenommene Werth x. Fourier hat die Bedingungen untersucht, unter denen x_1 in der That eine grössere Näherung giebt. Herr Cayley behandelt die Frage in allgemeinerer Art, so dass x einen reellen oder imaginären Werth haben kann, und untersucht, in welchen Fällen die Reihen abgeleiteter Werthe

$$x_1 = x - \frac{f(x)}{f'(x)},\; x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)},\; \ldots$$

gegen eine reelle oder imaginäre Wurzel der Gleichung $f(u) = 0$ convergiren. Die Lösung im Fall der quadratischen Gleichung ist leicht. Herr Cayley bemerkt indess, dass es ihm nicht geglückt ist, die Sache im Falle einer cubischen Gleichung zu erledigen. Glr. (O).

A. Cayley. Application of the Newton-Fourier method of an imaginary root of an equation. Quart. J. XVI. 179-186.

Ist a ein Näherungswerth einer Wurzel von $x^2 = n$, so ist $a_1 = \frac{a^2+n}{2a}$ ein zweiter Näherungswerth. Es wird eine auf die geometrische Construction von a_1 gegründete Untersuchung darüber gegeben, innerhalb welcher Theile der x-Ebene a liegen muss, damit jeder folgende Nährungswerth dem wahren Werthe $\sqrt{n}$ näher sei, als der vorhergehende. Es findet dies statt, wenn

$$\text{mod.}\,(a-\sqrt{n}) < \tfrac{2}{3}\,\text{mod.}\,n$$

ist; geht man von einem Werthe a aus, für den

$$\text{mod.}(a-\sqrt{n}) < \text{mod.}(a+\sqrt{n})$$

gilt, so gelangt man zu Näherungswerthen, welche der ersteren Bedingung genügen. No.

F. Lucas. Sur une application de la mécanique rationnelle à la théorie des équations. C. R. LXXXIX. 224-226.

$F(x) = 0$ sei eine algebraische Gleichung p^{ten} Grades, deren Coefficienten reell oder imaginär sein können. Die Wurzeln $z_1 \dots z_p$ denke man sich in der xy-Ebene durch Punkte ($z = x+yi$) repräsentirt, und jeden dieser Punkte mit der Masseneinheit belegt; einen anderen Punkt z von der nämlichen Masse sollen sie mit Kräften abstossen, die im umgekehrten Verhältnis ihrer Entfernungen von diesem Punkte stehen. Für die Lage, in welcher der Punkt z im Gleichgewichte bleibt, erhält man die Gleichung

$$\sum_a \frac{1}{z-z_a} = \frac{F'(z)}{F(z)} = 0, \text{ also } F'(z) = 0;$$

z muss mithin mit einer Wurzel der abgeleiteten Gleichung zusammenfallen. Liegen alle Wurzelpunkte auf einer Seite einer Geraden, so muss auch der in der Gleichgewichtslage befindliche Punkt z auf derselben Seite der Geraden liegen, da er sonst nothwendig abgestossen würde. Daraus folgt der algebraische Satz, dass jede geschlossene convexe Linie, welche die Gruppe der Wurzelpunkte einer Gleichung umschliesst, auch die Gruppe der Wurzeln der abgeleiteten Gleichung umschliessen muss, und insbesondere der Satz: „Wenn die Wurzelpunkte einer Gleichung in gerader Linie liegen, so enthält diese Gerade auch die der abgeleiteten Gleichung, und zwischen zwei aufeinanderfolgenden Wurzeln einer Gleichung liegt nothwendig eine Wurzel der abgeleiteten Gleichung." Setzt man

$$F(z) = X + Yi = R(\cos\Omega + i\sin\Omega),$$

so führt der Umstand, dass in der Gleichgewichtslage die Componenten der Resultante (die reellen und imaginären Theile von $F'(z) : F(z)$) einzeln verschwinden müssen, zu dem Satze, dass

die Coordinaten jedes Wurzelpunktes der abgeleiteten Gleichung jede der vier Grössen R, Ω, X, Y zu einem Maximum oder Minimum machen. Hr.

E. Bardey. Gleichungen, deren Wurzeln eine arithmetische oder eine geometrische Reihe bilden. Hoffmann Z. X. 333-345.

In beiden Fällen wird der Ausdruck der Wurzeln durch die Coefficienten gegeben. Es folgt eine Literatur-Angabe über diese Gleichungen seitens der Redaction der Hoffmann'schen Zeitschrift. No.

C. Malet. On a problem in algebra. Brioschi Ann. (2) IX. 306-313.

Lösung der Aufgabe: Eine Gleichung aufzustellen, deren Wurzeln $\alpha_\lambda \beta_\mu$ sind, wobei die α Wurzeln einer, die β Wurzeln einer anderen gegebenen Gleichung sind. No.

L. F. Marrecas Ferreira. Sobre a equação de segundo grau. Jorn. d. sc. math. e astr. II. 77-80.

E. Fauquembergue. Solution d'une question (1278). Nouv. Ann. (2) XVIII. 376-378.

Die Summe der t^{ten} Potenzen der Wurzeln der trinomischen Gleichung

$$x^{2n}+px^n+q=0$$

ist gleich $n(y'^{\frac{t}{n}}+y''^{\frac{t}{n}})$, wo y' und y'' die Wurzeln der Gleichung $y^2+py+q=0$ sind, wenn t ein Vielfaches von n ist.

O.

Th. Sinram. Beitrag zu den Auflösungen der Gleichungen vom zweiten, dritten und vierten Grade. Grunert Arch. LXIV. 296-309.

Beziehungen zwischen der Rationalität der Wurzeln und derjenigen der Discriminante. No.

Polster. Neue (beziehungsweise modificirte) Methoden zur allgemeinen Auflösung der algebraischen Gleichungen 2ten, 3ten und 4ten Grades. Bair. Bl. XV. 264-270.

Für die quadratische Gleichung $x^2+ax = b$ wird die Hülfsgleichung $x+w = z$ herangezogen, wo dann $w = \frac{1}{2}a$, $z^2-w^2 = b^2$ wird. Für die vollständige cubische Gleichung

$$x^3+ax^2+bx = c$$

wird als Hülfsgleichung die eine der beiden folgenden gewählt:

$$(x+v)+w = z;\quad ux+v = wx+z.$$

Im ersten Falle gewinnt man hieraus das System

$$v = \tfrac{1}{3}a,\ wz = \tfrac{1}{3}(b-3v^2),\ z^3-w^3 = c+v^3+3wvz,$$

im zweiten

$$u^3-w^3 = 1,\quad 3w(uv-wz) = a,\quad 3z(uv-wz) = b,\quad z^3-v^3 = c.$$

Für die vollständige biquadratische Gleichung endlich hat man die Wahl zwischen folgenden Reducenten:

$$(x+u)^2+v = w(x+u)+z,\quad x^2+ux+v = wx+z,$$
$$ux^2+vx = wx^2+yx+z,\quad ux^2+vx+w = yx^2+z.$$

Verfasser giebt selbst zu, dass seine Verfahrungsweisen theilweise nur Modificationen bekannter Methoden sind. Referent ist geneigt anzunehmen, dass man beim Nachsuchen in Matthiessen's „Grundzügen der antiken und modernen Algebra“ wohl alle die hier vorkommenden Substitutionen würde auffinden können.

Gr.

Anonym. Solutions of problems in May-Number. — Solutions asked for. Canada School-Journ. IV. 129-132.

Aufgaben über quadratische und cubische Gleichungen; auch einige geometrische Constructionen. Schl.

M. Azzarelli. Risoluzione delle equazioni di 3° grado. Acc. P. N. L. XXXI. 355-366 1878.

Der Verfasser giebt eine Lösung der cubischen Gleichung durch Zerlegung. Die angewandte Methode wird an Beispielen erläutert. (Siehe auch F. d. M. X. p. 61. 1878). O.

G. Weichold. Solution du cas irréductible, c'est-à-dire du problème consistant à exprimer les racines d'une équation complète du troisième degré comme fonctions algébriques, finies et numériquement calculables sous forme finie, des coefficients de cette équation, dans le cas où ces racines sont toutes à la fois réelles et au moins une d'elle commensurable. Liouville J. (3) V. 293-319.

Herr Weichold veröffentlicht seine Lösung zum dritten Male (vgl. F. d. M. IX. 62. 1877; X. 61. 1878). Er erweitert den Titel und beschränkt die Anwendbarkeit seiner Methode, so dass dieselbe correcter genannt werden kann, als sie bisher war.

No.

S. Réalis. Sur les équations du troisième et du quatrième degré dont les racines s'expriment sans l'emploi des radicaux cubiques. Nouv. Ann. (2) XVIII. 296-306.

Beweis des Satzes: Wenn eine Gleichung vierten Grades mit rationalen Coefficienten ohne cubische Wurzeln lösbar ist, hat ihre Resolvente eine rationale Wurzel, und umgekehrt. Daraus folgt als nothwendige und hinreichende Bedingung für

$$x^4+px^2+qx+r=0,$$

dass die Relation

$$\varkappa(\varkappa-1)^2p^2-4\varkappa pr+q^2=0$$

für ein rationales $\varkappa$ erfüllt sei. No.

Lösungen weiterer Aufgaben über specielle Gleichungen zweiten, dritten und vierten Grades mit einer und

mit mehreren Unbekannten von J. A. Kealy, J. Young, J. L. Kitchin, R. Graham, S. Tebay, F. C. Matthews, Clifford, J. A. Steggal, Goldenberg, S. Réalis finden sich Educ. Times XXXI. 66-67, 78, 111-112; XXXII. 65-66, 90 91; Nouv. Ann. (2) XVIII. 468-470.

O.

Ad. Jäger. Ueber eine Auflösung der Gleichung
$$x^5+5px^3+5p^2x+q=0.$$
Casopis VIII. 25-27. (Böhmisch).

Enthält eine einfache Darstellung aller Wurzeln für den Fall, dass $p>0$, $p<0$ und ausserdem zugleich $(\frac{1}{2}q)^2<p^5$.

Std.

Ad. Jäger. Ueber eine Auflösung der Gleichung
$$x^7\pm7px^5+14p^2x^3\pm7p^3x+q=0.$$
Casopis VIII. 121-124. (Böhmisch).

Eine analoge Behandlung dieser Gleichung wie der eben angeführten vom fünften Grade.

Std.

W. E. Heal. On the removal of terms from an equation of the fifth degree. Analyst VI. 78-79.

Beweis des Satzes von Bring oder Jerrard.

Glr. (O.)

A. Puchta. Das Oktaeder und die Gleichung vierten Grades. Wien. K. Gerold's Sohn.

Ueberträgt man in bekannter Weise durch Radiivectoren ein Octaeder auf die Ebene der x, y, wobei $\xi_1:\xi_2=x+yi$ ist, so erhält man für dasselbe die Gleichung $F\equiv\xi_1\xi_2(\xi_1^4-\xi_2^4)=0$ mit der Hesse'schen Form H und der Jacobi'schen T. Ausser den 6 Octaederecken (F) liefern die Symmetrieebenen noch 8 symmetrisch vertheilte Punkte (H), welche den Mittelpunkten der Seitenflächen, und 12 Punkte (T), welche den Kantenmittelpunkten von F entsprechen. Die Rotationen um die hierdurch gelieferten Axen geben die 24 Octaeder- und die 12 Tetraeder-Substitutionen, von denen die letzteren sich auf die beiden in (H) enthaltenen Te-

traeder beziehen. Durch dieselben Betrachtungen erhellt die Vollständigkeit des Formensystems F, H, T, sowie, dass $T^2 = H^3 - 108F^4$ ist, und endlich folgt daraus die analytische Darstellung der Substitutionen.

Hieraus ergiebt sich dann erstens die algebraische Lösung der Octaedergleichung, zweitens die Lösung durch hypergeometrische Reihen;

$$\frac{H^3(\xi_1\xi_2)}{108F^4(\xi_1\xi_2)} = X$$

wird durch $\frac{\xi_1}{\xi_2} = \frac{\eta_1(X)}{\eta_2(X)}$ befriedigt, wenn η_1, η_2 zwei passend gewählte hypergeometrische Reihen sind.

Die Gleichung dritten Grades, deren Wurzeln

$$\psi_1 = 4\xi_1^2\xi_2^2,\ \psi_2 = (\xi_1^2-\xi_2^2)^2,\ \psi_3 = -(\xi_1^2+\xi_2^2)^2$$

die drei Hauptaxen des Octaeders sind, hat die Form

$$\psi^3 - H\psi + 4F^2 = 0;$$

hierdurch wird die Lösung der allgemeinen Gleichung dritten Grades gewonnen. Diejenige der Gleichung vierten Grades wird durch die Congruenz der Substitutionsgruppen beim Octaeder und bei der Gleichung vierten Grades $y^4 + Ay + B = 0$ geliefert; die vier Wurzeln y_1, y_2, y_3, y_4 werden quadratische Functionen von ξ_1, ξ_2, während $\frac{\xi_1}{\xi_2}$ einer Octaedergleichung genügt.

No.

F. Brioschi. Sulla equazione dell' ottaedro. Acc. R. d. L. (3) III. 233-237.

$F(x_1, x_2)$ sei eine Binärform sechsten Grades,

$$H = \tfrac{1}{2}(F,F)_2,\ A = \tfrac{1}{2}(F,F)_6;$$

die biquadratische Covariante $(F,F)_4$ sei identisch Null. Dann ist F die Covariante sechsten Grades einer biquadratischen Form f, und $4H^3 + \frac{1}{18}AtF^4 = 0$ die Octaedergleichung 24^{ten} Grades in $x = \frac{x_1}{x_2}$. Diese ist algebraisch lösbar; benutzt man sie zur Transformation von $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{F(x)}}$, so erhält man ein elliptisches In-

tegral der Variabeln t. Setzt man $f = x_1^4 + x_2^4$, so wird $F = x_1 x_2 (x_1^4 - x_2^4)$ die Normalform, und die Octaedergleichung wandelt sich in

$$t = \tfrac{1}{108} \frac{(1+14x^4+x^8)^3}{x^4(1-x^4)^4}$$

um.

No.

A. Cayley. Note on the octahedron function. Quart. J. XVI. 280-281.

Die Forderung, dass $(F, F)_4$ identisch verschwinde (vgl. das vorhergehende Referat), kann für $F = (a, b, c, d, e, f, g \between xy)^6$ durch $a = g = c = d = e = 0$, $b = -f = 1$ erfüllt werden; dann erhält man $xy(x^4 - y^4)$ als Octaederfunction; ebenso durch $a = g = 0$, $b = f = 2$, $c = e = 2\sqrt{2}$, $d = 3$, und dann ergiebt sich:

$$x_1 y_1 \left(x_1^2 + \frac{3}{\sqrt{2}} x_1 y_1 + y_1^2\right)(x_1^2 + \sqrt{2}\, x_1 y_1 + y_1^2).$$

Letztere Form ist durch lineare Transformation aus der ersteren ableitbar.

No.

L. Kiepert. Auflösung der Gleichungen fünften Grades. Borchardt J. LXXXVII. 114-134.

Ueber diese Arbeit ist F. d. M. X. p. 73. 1878 bereits referirt.

No.

F. Klein. Ueber die Auflösung gewisser Gleichungen vom siebenten und achten Grade. Clebsch Ann. XV. 252-282.

Der Satz, auf welchen sich die Entwickelungen der Abhandlung gründen, lautet: „Ist eine Gruppe von N linearen homogenen Substitutionen zwischen $x_1, x_2, \dots x_n$ einer anderen von $\frac{N}{\nu}$ Substitutionen zwischen $y_1, y_2, \dots y_\mu$ isomorph, so giebt es ganze homogene Functionen $Y_1, Y_2, \dots Y_\mu$ der x, welche sich bei den

N linearen Substitutionen der x ihrerseits wie die $y_1, y_2, \dots y_\mu$ homogen linear substituiren." Gehören nun der Gruppe der N Substitutionen Functionen $\Phi_1, \Phi_2, \dots$ an, und versteht man unter dem „Problem der x" die Aufgabe, aus den Werthen der Φ die x zu berechnen, so führt der obige Satz auf rationalem Wege das Problem der x in das der y über. Hier ist es von Wichtigkeit, die Anzahl μ der y möglichst klein zu wählen. Für die allgemeinen Gleichungen 5ten Grades ist $\mu = 3$ möglich, indem es zur Gruppe dieser Gleichung ein isomorphes Substitutionensystem zwischen y_1, y_2, y_3 giebt; dasjenige, welches bei den Jacobi'schen Gleichungen sechsten Grades auftritt. Es entsteht daher die Aufgabe: „Aus 5 willkürlichen Grössen $x_0, x_1, \dots x_4$ soll man drei Functionen bilden, welche sich bei den Vertauschungen der x so ternär linear substituiren, wie y_1, y_2, y_3." Hier ergeben sich einmal die allgemeinen Brioschi'schen Formeln; ferner neue, mit der Theorie des Ikosaeder zusammenhängende, welche sich aus zweigliedrigen Unterdeterminanten der p (vgl. F. d. M. IX. 67. 1877) zusammensetzen. Dann folgt eine ähnliche Behandlung der Gruppen 168ter Ordnung, bei denen wieder $\mu = 3$ ist, für Gleichungen 7ten, 8ten, ... 168ten Grades; dabei zeigt sich, dass es unmöglich ist, diese Probleme rational in Jacobi'sche Gleichungen 8ten Grades überzuführen, während sich das umgekehrte Problem erledigen lässt. Am Schlusse des ersten Abschnittes folgt die Angabe, dass, unter n eine Primzahl verstanden, bei $\frac{n+1}{2}$ und $\frac{n-1}{2}$ Elementen Gruppen bestehen, welche mit der Gruppe der Modulargleichung $n$ten Grades isomorph sind. Im zweiten Abschnitte wird an dem Problem mit 168 Substitutionen gezeigt, wie algebraische Transformationen gegebener Gleichungen auf Normalformen mit nur einem Parameter behandelt werden müssen. No.

M. Noether. Ueber die Gleichungen achten Grades und ihr Auftreten in der Theorie der Curven vierter Ordnung. Clebsch Ann. XV. 87-110.

Herr Noether zeigt, dass es eine Function Σ von 8 Elemen-

ten giebt, welche 30 Werthe hat, deren Gruppe G also 8.168 Substitutionen enthält. Diese Gruppe ist aus einer Gruppe Γ von 168 Substitutionen und einer anderen H von 8 Substitutionen zusammengesetzt; H selbst ist das Product von 3 Gruppen der Ordnung 2 und des Grades 8. Adjungirt man der allgemeinen Gleichung $f(x) = 0$ vom 8^{ten} Grade die Function Σ, so erhält die Gleichung den Affect, dass eine symmetrische, rationale Relation $\theta(x_i, x_k, x_l, x_m) = 0$ besteht, in der drei Wurzeln beliebig angenommen werden können, während die vierte dann eindeutig bestimmt ist: „Quadrupeleigenschaft.“ Γ ist die Gruppe einer Gleichung siebenten Grades $P = 0$, bei der zwischen drei Wurzeln eine ähnliche symmetrische rationale Beziehung besteht: „Tripeleigenschaft;“ ferner kann jede ihrer Wurzeln durch 3 beliebige andere, welche kein Tripel bilden, rational ausgedrückt werden. Adjungirt man dem $f(x) = 0$ zuerst die Quadratwurzel aus der Discriminante $\sqrt{\Delta}$, so reducirt sich die Gleichung für Σ auf eine für S vom 15^{ten} Grade. Adjungirt man der Gleichung $f = 0$ ausser $\sqrt{\Delta}$ und S noch eine der letzteren ähnliche Function S_0, so erhält f den Affect, dass sich jede ihrer Wurzeln durch irgend drei rational ausdrücken lässt. Die Modulargleichung, welche bei der Transformation 7^{ter} Ordnung der elliptischen Functionen auftritt, ist eine solche Gleichung 8^{ten} Grades.

Im zweiten Theile der Arbeit wird die Anwendung der gefundenen Resultate auf die Theorie der 28 Doppeltangenten einer allgemeinen Curve 4^{ter} Ordnung gegeben. Betrachtet man die 315 Kegelschnitte, welche je durch die 8 Berührungspunkte von 4 Doppeltangenten gehen, so giebt es bei einer Curve 4^{ter} Ordnung 135 Systeme von je 7 Kegelschnitten, denen die Tripeleigenschaft zukommt. Hierdurch wird das Problem der Doppeltangenten reducirt.

No.

Ch. Méray. Essai sur le calcul des quantités associées en systèmes et sur son application à la théorie des équations simultanées. Ann. de l'Éc. N. (2) VIII. 81-110, 327-360.

Die „assemblages binaires de la taxe k“ aus $k+1$ reellen

oder gemeinen complexen Zahlen $a_{k,0}, a_{k,1}, \ldots a_{0,k}$ sind im Wesentlichen ein specieller Fall von H. Grassmann's extensiven Grössen aus $k+1$ Einheiten $e_0, e_1, \ldots e_k$, die eine algebraische Multiplication zulassen (vgl. die Ausdehnungslehre 1862 p. 233). Herr Méray setzt nun alle Producte aus je m dieser Einheiten einander gleich, in welchen die Summe der Indices die nämliche Zahl ist; so dass das Product zweier Grössen von $k'+1$ und $k''+1$ Einheiten aus $k'+k''+1$ Einheiten zweiter Stufe abgeleitet erscheint. Das Rechnen mit solchen Grössen hat Grassmann gelehrt, insbesondere gezeigt, dass ein Product nur dann Null sein könne, wenn ein Factor desselben Null ist. Herr Méray unterdrückt die Bezeichnung der Einheiten und giebt nur die Coordinaten (pièces) der complexen Grösse in der Form $(a_{k,0}, a_{k,1}, \ldots a_{0,k})$ an — ein Verfahren, welches zur Abkürzung der Rechnungen wesentlich beiträgt.

Durch Entwickelung der Algebra der genannten Grössen hat Herr Méray einen sehr interessanten Beitrag zur Ausdehnungslehre geliefert. Die ganzen Functionen derselben, deren Glieder natürlich von derselben Stufe sein müssen, verhalten sich ganz ähnlich wie die der gemeinen Algebra. Die algebraischen Gleichungen mit einer Unbekannten besitzen jedoch im Allgemeinen keine eigentlichen Wurzeln. Die symmetrischen Functionen von m Grössen $x_1\, x_2 \ldots x_m$ derselben Stufe lassen sich rational durch die elementaren symmetrischen Functionen Σx_r, $\Sigma x_r x_s \ldots$ ausdrücken, nämlich durch die von m Zahlenpaaren x_r, y_r durch die Coordinaten der aus den m Grössen (x_r, y_r) gebildeten elementaren symmetrischen Functionen. Eine ganze Function $f(x, y)$ von x, y, welche mit allen ihren partiellen Ableitungen von niedrigerer als der μ_r^{ten} Ordnung für $x = x_r$, $y = y_r$ $(r = 1, 2, \ldots m)$ verschwindet, lässt sich auf die Form bringen:

$$f(x, y) = {}_r\sum_1^n f_r Q_r \qquad (n = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_m + 1),$$

wo die Q_r ganze Functionen von x, y und die f_r die n Coordinaten des Productes

$$(x_1, y_1)^{\mu_1} (x_2, y_2)^{\mu_2} \ldots (x_m, y_m)^{\mu_m}$$

bedeuten.

Der zweite Theil der Abhandlung beschäftigt sich mit der Aufgabe: „Aus zwei vorgelegten algebraischen Gleichungen

$$f(x, y) = 0, \quad F(x, y) = 0$$

eine Gleichung $\Omega(z) = 0$ herzustellen, deren Wurzeln $z = (x, y)$ aus den gemeinsamen Auflösungen dieser Gleichungen gebildet sind". Es scheint nicht möglich, das scharfsinnige Verfahren im Auszuge darzulegen, wodurch Herr Méray zu einem aus den Antiderivirten (antidérivées) von f, F gebildeten Ausdrucke gelangt, von dem sich zeigen lässt, dass er eine ganze Function von z sei und als solche verschwinde für alle Werthe von z, deren Coordinaten die endlichen Lösungen obiger Gleichungen sind — sowie endlich, dass er genau so viele Wurzeln besitze, als sein Grad in z Einheiten, und dass jede derselben ein diesen Gleichungen genügendes Werthepaar liefert. Die letzte Behauptung ist übrigens, wie der Verfasser selbst bemerkt, hier noch nicht strenge erwiesen.

Dabei versteht Herr Méray unter Antiderivirter der complexen Grösse $\Phi = (\Phi_{0,k}, \Phi_{k-1,1}, \ldots \Phi_{0,k})$, deren Coordinaten von den Veränderlichen xy abhängen, die Grösse

$$\nabla\Phi = \left(\frac{\partial \Phi_{k,0}}{\partial y}, \frac{\partial \Phi_{k-1,1}}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial \Phi_{0,k}}{\partial y}, 0\right)$$
$$+ \left(0, -\frac{\partial \Phi_{k,0}}{\partial x}, -\frac{\partial \Phi_{k-1,1}}{\partial x}, \ldots, -\frac{\partial \Phi_{0,k}}{\partial x}\right).$$

Der Name wird durch die Analogie dieser Functionen mit den Ableitungen gerechtfertigt.

Herr Méray hält den von ihm eingeschlagenen Weg, um die bekannte Lücke in der Theorie der simultanen Gleichungen auszufüllen, wenn nicht grade für den einzig möglichen, so doch für den bequemsten. Hiermit kann Referent nicht übereinstimmen. Die Kronecker'sche Resolvente $E(z, \alpha, \beta) = 0$ der endlichen Werthpaare von $f = 0$, $F = 0$, deren Theorie Referent in Clebsch Ann. XV. p. 122 (s. Abschn. VIII. Cap. 5. C.) auseinandergesetzt hat, liefert direct und einfacher dieselben Resultate, wie der „dialysant principal" $\Omega(z) = 0$. Letzterer ist übrigens davon nur äusserlich verschieden; er geht daraus hervor, wenn z als complexe Grösse (x, y) und die aus den unbestimmten Coefficienten α, β gebildete

Monome derselben Dimension als Einheiten von complexen Grössen eben dieser Stufe betrachtet werden. St.

Simonnet. Sur les conditions de l'existence d'un nombre déterminé de racines communes à deux équations données. C. R. LXXXVIII. 223-224.

Siehe Abschn. II. Cap. 3. p. 115.

H. Lemonnier. Sur la résolution de trois équations du deuxième degré en x, y, z. Bull. S. M. F. VII. 16-43.

H. Lemonnier. Note. Soc. Phil. Paris. (7) III. 73-75.

Das System wird zuerst nach y^2, yz, z^2 aufgelöst, falls die betreffende Determinante nicht verschwindet; die Schlussgleichung in x wird discutirt. In ähnlicher Art wird der Fall behandelt, dass alle Determinanten, die sich auf die homogenen Ausdrücke zweiten Grades von zwei der Variabeln beziehen, Null werden. No.

Cochez. Solution of a question (5965). Educ. Times XXXII. 88-89.

Behandelt die Gleichung

$$e^{x^x}+x\log x+14e^{-x^x-x\log x}=0.$$

Eine Wurzel derselben ist 0,047. O.

Capitel 2.

Theorie der Formen.

C. Jordan. Sur les covariants des formes binaires. (Deuxième mém.) Liouville J. (3) V. 345-379.

Diese Arbeit ist eine Fortsetzung der in den F. d. M. VIII. p. 59. 1876 besprochenen Abhandlung (vgl. auch Bd. X. p. 88. 1878). Die

Absicht, die Anzahl der von einander unabhängigen Bildungen in einem gegebenen Formensystem enger zu begrenzen, wird hier auf demselben Wege wie damals, nämlich an den symbolischen Ausdrücken nach der ersten Gordan'schen Methode, weiter geführt, wobei der Verfasser zu ziemlich niedrigen Grenzen kommt. Das Resultat ist:

Es seien $a, b, c, \ldots$ ein gegebenes System binärer Formen, deren Ordnungen alle $\overline{\gtrless} N$ seien. Jede Covariante des Systems wird dann eine lineare Function von Producten $R.S.T$ der folgender Art:

R ist eine Covariante, deren Ordnung*) O (in den Variabeln) und Grad G (in den Coefficienten) begrenzt sind durch

$$O < 2N^2,$$
$$G < (9N^2 - O)3^{\varrho+1},$$

wobei ϱ die grösste in

$$1 + \frac{\lg \frac{N}{4}}{\lg \frac{4}{3}}$$

enthaltene ganze Zahl ist; S ist ein Product von Covarianten, deren Ordnungen $\overline{\gtrless} 2N-2$ und Grade $\overline{\gtrless} 2.3^{\varrho+1}$ sind; T ist ein Product von Invarianten, deren Grade $<(7N-5).3^{\varrho+1}$ sind.

Am Schluss der Abhandlung werden die Grenzen für die Ordnungen weiter herabgedrückt, so dass man für ein System von Formen, deren Ordnungen alle $\overline{\gtrless} N$ sind, mit Covarianten ausreicht, deren Ordnungen für

$$N = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10, \ldots,$$

bezüglich

$$1,\ 2,\ 4,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18,\ 22,\ 26, \ldots$$

nicht übersteigen.

Nr.

*) Ich schliesse mich in diesem Bande des Jahrbuchs der englischen, auch von Clebsch (Bin. Formen) und von Jordan gebrauchten Terminologie, der Gordan'schen entgegengesetzt, an. Nr.

A. Cayley. On a theorem relating to covariants. Borchardt J. LXXXVII. 82-84.

Die Sylvester'sche Formel bezüglich der Gesammtzahl der von einander linear unabhängigen Covarianten von gegebenem Grade, bei einer gegebenen binären Grundform, (vgl. F. d. M. X. 1878 p. 87), wird am Falle der Covarianten sechsten Grades einer Form fünfter Ordnung verificirt. Nr.

A. Cayley. Calculation of the minimum *N. G. F.* of the binary seventhic. Am. J. II. 71-84.

Bei den Referaten über die Noten von Sylvester in den C. R. von 1878 und über Cayley's „Tenth memoir upon quantics" (vgl. F. d. M. X. p. 87 u. 93. 1878) war von der „erzeugenden Function" die Rede, welche durch ihre Entwicklungscoefficienten die Anzahlen der Covarianten von gegebener Ordnung und gegebenem Grad für eine binäre Form liefert (vgl. auch Faà de Bruno's „Théorie des formes binaires"). Dieselbe kann mannigfach umgeformt werden, insbesondere nach Sylvester zur „numerischen erzeugenden Function" (*N. G. F.*) durch Wegwerfung der negativen Potenzen von x. Diejenige *N. G. F.*, deren Grundform in den kleinsten Gliedern hergestellt ist, heisst bei Cayley die „Minimum *N. G. F.*".

Für die Form 7ter Ordnung ist die Min. *N. G. F.* (Sylvester, Proc. of London XXVIII. 1878) von der Form

$$\frac{Z_0+aZ_1+a^2Z_2+\cdots+a^{36}Z_{36}}{(1-ax)(1-ax^3)(1-ax^5)(1-ax^7)(1-a^4)(1-a^6)\dots(1-a^{12})},$$

wo die Z ganze rationale Functionen von x von der Ordnung $\leqq 14$, und wo eine gewisse Symmetrie in Bezug auf Z_i und Z_{36-i} herrscht. Mit Hülfe dieser Eigenschaft wird nun der correcte Werth der Function noch einmal entwickelt. Nr.

J. J. Sylvester. On the complete system of the „Grundformen" of the binary quantic of the ninth order. Am. J. II. 98-99.

J. J. Sylvester. Table des nombres de dérivées invariantives d'ordre et de degré donnés, appartenant à la forme binaire du dixième ordre. C. R. LXXXIX. 395-396.

J. J. Sylvester and F. Franklin. Tables of the generating functions and groundforms for the binary quantic of the first ten orders. Am. J. II. 223-251.

J. J. Sylvester, assisted by F. Franklin. Tables of the generating functions and groundforms for simultaneous binary quantics of the first four orders, taken two and two together. Am. J. II. 293-306.

J. J. Sylvester. Remarks on the tables for binary quantics in a preceding article. Am. J. II. 324-329.

Die beiden ersten Noten sind nur Ankündigungen eines Theils der in der dritten Arbeit zusammenfassend mitgetheilten tabellarisch geordneten Resultate. Diese Tabellen sind mit Hülfe der von der British Association ausgeworfenen Fonds von Mr. Franklin, einem Schüler des Herrn Sylvester, nach dessen Methoden in sehr correcter Weise berechnet. Der Inhalt ist der folgende: Für sämmtliche binäre Formen, von der ersten bis zur zehnten Ordnung incl., werden gegeben:

1. Die G. F. (erzeugende Function) für die „Differentianten", d. h. für die ersten Coefficienten oder leading terms der Covarianten (die symmetrischen Functionen der Wurzeldifferenzen);

2. Die G. F. für die Covarianten und Invarianten, und zwar
   2a) in der „reducirten" Form (als Min. G. F.),
   2b) in der „repräsentirenden" Form.

Ueber den Begriff der erzeugenden Function vergleiche man das vorhergehende Referat; die „reducirte" Form ist identisch mit der dort erwähnten Min. G. F. Aus der letzteren Form der G. F. geht die „repräsentirende" durch Multiplication von Zähler und Nenner mit einem gewissen Factor hervor. Die Bedeutung der repräsentirenden G. F. ist die, dass man aus ihr unmittel-

bar, ohne wirkliche Entwickelung, die Entwickelungscoefficienten, also die Anzahlen der Covarianten, soll ablesen können. So ist diese Rep. G. F. für die biquadratische Form:

$$\frac{1+a^3x^6}{(1-a^2)(1-a^3)(1-a^2x^4)(1-ax^4)},$$

was anzeigt, dass die Grundformen sind: eine Covariante [4,1] (d. h. von der Ordnung 4 in den Variabeln und dem Grade 1 in den Coefficienten); eine Invariante vom Grade 2; eine Covariante [4,2]; eine Invariante vom Grade 3; eine Covariante [6,3]. — Für die Rep. G. F. einer binären Form 7ter Ordnung geht der Zähler jedoch in's Unendliche.

Die Umformungen der G. F. und die Abzählungen beruhen auf der mehrfach erwähnten (vgl. F. d. M. X. p. 86. 1878) Cayley'schen Formel, wonach die Anzahl der Differentianten $[w, i, j]$ gleich wird

$$(w:i,\,j)-(w-1:i,\,j).$$

Der Beweis dieser Fundamentalformel findet sich im Postscriptum der Sylvester'schen Abhandlung, Borchardt J. LXXXV. p. 89, (siehe F. d. M. X. 87. 1878). Indessen enthält auch dieser Beweis immer noch ein Postulat, das bei der Reduction der G. F. auf die Rep. G. F. gebraucht wird. Wäre dieses Postulat nicht richtig, so blieben die durch die Tafeln gelieferten Grundformen immer noch irreducible, aber es würden noch weitere Grundformen existiren. Auf dem Gordan'schen Wege erhält man umgekehrt ausser dem vollen System zunächst noch einige reducible, also überflüssige Formen.

Nach den vorliegenden Tafeln wird die Anzahl der Grundformen (die absolute Constante und die Form selbst mitgezählt) im System der binären Formen der Ordnungen 0, 1, . . . , 10 bezüglich:

Ordnung der Form:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10,
Anzahl der Grundformen:	1	2	3	5	6	24	27	125	70	416	476.

Die vierte der oben angezeigten Arbeiten enthält die Ausdehnung der früheren Tabellen auf ein simultanes System zweier Formen, bez. von den Graden 1, 2, 3, 4, in derselben Anordnung, während die zugehörigen Notizen im letzten Aufsatz mitgetheilt sind. Es ergeben sich als Anzahl der Grundformen im

System (i, k), d. h im System zweier Formen der Ordnung i und k, bezüglich:

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(3,3)	(3,4)	(4,4)
4	6	14	21	7	16	19	27	62	29.

Bei (3,3) kommen zwei, bei Clebsch und Gordan miterwähnte, nicht vor (vgl. das folgende Referat); ebenso kommen bei (3,4) drei von Gundelfinger, bei (4,4) zwei von Gordan angeführte Formen nicht vor (vgl. F. d. M. IX. 78. 1877 und X. 88. 1878). Aus den Bemerkungen ist hauptsächlich als neu hervorzuheben, dass man die Zahl der Differentianten vom Grade j, welche zu einer Form i^{ter} Ordnung gehören, auch als Coefficienten von $a^j x^0$, bez. $a^j x^1$, je nachdem ij grade oder ungrade, in der Entwickelung von

$$\frac{1}{(1-ax^i)(1-ax^{i-2})\dots(1-ax^{-i+2})(1-ax^{-i})}$$

bestimmen kann. Nr.

J. J. Sylvester. Sur le vrai nombre des covariants fondamentaux d'un système de deux cubiques.
C. R. LXXXIX. 828-833.

Es wird gezeigt, dass zwei lineare Covarianten von den Graden 3,4, bez. 4,3, welche in dem von Gordan angegebenen System der Grundformen zweier cubischen binären Formen enthalten sind, reducible sein müssen. Eine dabei gegebene Anmerkung sei noch erwähnt: die „Katalektikante“ kann auch auf simultane Formen ausgedehnt werden. So hat man für zwei binäre Formen von den Ordnungen 3,2, bez. 4,4, die Invarianten

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}, \qquad \text{bez.} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & e \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \beta & \gamma & \delta & \varepsilon \end{vmatrix};$$

und entsprechend für i binäre Formen von den Ordnungen $n_1, n_2, \dots n_i$, eine Invariante $(\mu+2)^{\text{ten}}$ Grades, wenn

$$\mu = \frac{\Sigma(n) - 2}{i+1}$$

eine ganze Zahl und kleiner als jede der Zahlen n ist.

Nr.

C. le Paige. Sur une propriété des formes algébriques préparées. Clebsch Ann. XV. 206-210.

„Präparirte" Formen hat Sylvester (s. F. d. M. X. p. 85. 1878) solche genannt, deren Glieder noch mit den Quadratwurzeln aus den Polynomialcoefficienten explicite geschrieben sind. Dem von Sylvester Borchardt J. LXXXV. gegebenen Theorem, dass zwei „conträre" Substitutionen der Variabeln auch zwei conträre Substitutionen in Bezug auf die Coefficienten induciren, stellt hier der Verfasser ein anderes an die Seite, dass zwei transponirte Substitutionen auf die Variabeln der präparirten Form auch zwei transponirte Substitutionen auf die Coefficienten derselben induciren. Der Beweis wird mittelst der symbolischen Bezeichnungsweise einfach.

Nr.

L. Matthiessen. Die allgemeinen Wurzelformen der Quadrics, Cubics und Quartics von Clebsch und Aronhold. Schlömilch Z. XXIV. 32-39.

Für die Gleichungen zweiten, dritten und vierten Grades erhält man Auflösungen, in welche noch ein unbestimmter Parameter eintritt, dadurch, dass man zunächst das zweite Glied der Gleichung auf unendlich viele Weisen wegschaffen kann. Wenn nämlich $f(x_1, x_2) = 0$ die Gleichung n^{ter} Ordnung in homogener Form ist, so setze man

$$u = \frac{1}{n}\frac{\partial f(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_1} x_1 + \frac{1}{n}\frac{\partial f(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_2} x_2, \quad v = \xi_1 x_2 - \xi_2 x_1,$$

was das Verlangte leistet. Dieses folgt aus der, in dem Aufsatz nicht weiter erwähnten, Hermite'schen Theorie der „associirten" Formen allgemein und wird hier an den einzelnen Fällen

ausgerechnet. Der willkürliche Parameter ist $\frac{\xi_1}{\xi_2}$. Für diese Beispiele vgl. Clebsch, Bin. Formen, 887. Ausser den Auflösungen werden noch die Lageneigenschaften der Wurzeln der zu Hülfe genommenen Gleichungen gegen die der vorgelegten Gleichungen an den Wurzelausdrücken entwickelt. Nr.

A. Cayley. On a covariant formula. Quart. J. XVI. 224-226.

Es wird die Bemerkung gemacht, dass eine Wurzel ξ einer Gleichung $f(x)=0$ zugleich Doppelwurzel von

$$(x-\xi)f'(x)-f(x)=0$$

ist, d. h. dass die Discriminante, in Bezug auf x_1, x_2, der in x_1, x_2 binären Form n^{ter} Ordnung

$$(x_1\xi_2-x_2\xi_1)\left(\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}\alpha_1+\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}\alpha_2\right)-(\alpha_1\xi_2-\alpha_2\xi_1)f(x_1, x_2)$$

den Ausdruck $f(\xi_1, \xi_2)$ als Factor enthält, so dass der übrig bleibende Factor von der Ordnung $n-2$ in ξ_1, ξ_2, $2n-2$ in α_1, α_2, $2n-3$ in den Coefficienten von $f(x_1, x_2)$ wird. Dieser letztere Factor wird für $n=2$ und 3 in Invariantenform ausgerechnet.

Nr.

E. d'Ovidio. Estensione di alcuni teoremi sulle forme binarie. Atti di Torino XIV. 963-972.

Das Quadrat der Functionaldeterminante Ω zweier binären Formen φ, ψ kann als quadratische Function von φ und ψ dargestellt werden, wobei die Coefficienten zweite Ueberschiebungen der Formen φ, ψ werden; und analog das Product der Functionaldeterminante von φ, ψ mit einer solchen zweier andern Formen (Clebsch, Bin. Formen, § 35). Der Verfasser erweitert diese Eigenschaft auf $\Omega.\Omega'$, wo Ω' die Function Ω, in andern Variabeln geschrieben, vorstellt, und macht davon Anwendungen zur Herleitung bekannter Relationen für Formen dritter und vierter Ordnung.

Nr.

F. Gerbaldi. Nota sul sistema simultaneo di due forme cubiche binarie. Battaglini G. XVII. 373-380.

Für zwei cubische binäre Formen f, φ wird das System, das zur Functionaldeterminante ϑ_x^4 gehört, vermittest symbolischer Rechnung in den einfachsten Grundformen von f, φ, die aus Clebsch Bin. Formen genommen werden, ausgedrückt. Insbesondere stellt sich der Verfasser die Aufgabe, die Bedingungen aufzustellen, unter welchen f und φ zwei gemeinsame Wurzeln haben; da alsdann ϑ_x^4 zwei Doppelwurzeln hat, so muss ϑ_x^4 ihrer Hesse'schen Form proportional werden, was die identisch verschwindenden Covarianten von ϑ, und hiernach von f, φ liefert.

Nr.

G. Pittarelli. Sul significato geometrico delle „Ueberschiebungen" nelle forme binarie. Battaglini G. XVII. 160-171.

Da man zwei Formen gleicher Ordnung, für welche die letzte Ueberschiebung identisch verschwindet, als „conjugirt" oder geometrisch als „apolar" oder auch, wie der Verfasser sagt, als „harmonisch" bezeichnet, so erhält man auch Bedeutungen für die niedrigeren Ueberschiebungen, indem man dieselben als letzte Ueberschiebungen von Polaren auffasst. Man hat dann z. B.:

Von zwei binären Formen n^{ter} Ordnung f und φ nehme man die erste Polare eines Nullpunkts von φ in Bezug auf f. Wenn diese Polare harmonisch ist zu der Form $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche die $n-1$ übrigen Nullpunkte von φ darstellt, so ist auch f harmonisch zu φ.

Oder: Es sei f von der n^{ten}, φ von der ν^{ten} Ordnung; ψ die r^{te} Ueberschiebung von f über φ. Die $(n-r)^{\text{te}}$ Polare eines Nullpunktes ξ von ψ in Bezug auf f, verbunden mit der r'^{ten} Potenz von ξ, bildet eine Form der Ordnung $r+r'$, welche harmonisch ist zur $(\nu-r')^{\text{ten}}$ Polare von ξ in Bezug auf φ.

Nr.

E. d'Ovidio. Studio sulle cubiche gobbe mediante la notazione simbolica delle forme binarie. Battaglini G. XVII. 310-338.

Diese Arbeit, welche nur ein Auszug einer grösseren, der Turiner Akademie überreichten Abhandlung ist, geht von der Darstellung der Coordinaten der cubischen Raumcurve durch einen Parameter in ihrer allgemeinsten Form

$$\varrho x_1 = a_\lambda^3,\quad \varrho x_2 = b_\lambda^3,\quad \varrho x_3 = c_\lambda^3,\quad \varrho x_4 = d_\lambda^3$$

aus, wo a_λ^3, b_λ^3, ... binäre Formen 3[ter] Ordnung vorstellen. Aus dieser Darstellung werden in einfacher und übersichtlicher Weise eine Reihe von Eigenschaften der Curve (und ihrer abwickelbaren Fläche) hergeleitet, und zwar in ausgeführten Formeln in der symbolischen Bezeichnung. So wird z. B. die mit der Curve verbundene reciproke lineare Raumtransformation, die ein Nullsystem wird, entwickelt; ferner die Flächen zweiter Ordnung, welche die Curve enthalten; die mit der Curve verbundenen Liniencomplexe; etc. Von der Sturm'schen Arbeit in Borchardt J. LXXXVI. (siehe F. d. M. X. 96. 1878) unterscheidet sich der vorliegende Aufsatz dadurch, dass, während jene von einer speciellen Darstellungsform der Curve ausgeht und die einzelnen Covarianten der cubischen und biquadratischen Form auf der Curve deutet, dieser Aufsatz, von allgemeinen Formen ausgehend, symbolisch die Eigenschaften der Curve durch Beziehungen zwischen den Covarianten ausdrückt.

Nr.

A. Thaer. Ueber die Zerlegbarkeit einer ebenen Linie dritter Ordnung in drei gerade Linien. Clebsch Ann. XIV. 545-556.

Brioschi hat in den Annali di Mat. (2) VII. (siehe F. d. M. VII. p. 62. 1875) unter Zugrundelegung der speciellen Gleichungsform

$$f = x_3^3 - 3ux_3 + 2v$$

die drei Bedingungen für das Zerfallen der Curve 3[ter] Ordnung in drei Gerade abgeleitet. Der Verfasser stellt dieselben Bedingungen in invarianter Bildung für die allgemeine Form f auf, indem er

zuerst f linear in die Brioschi'sche Form überführt und dann dessen Gedankengang anwendet. Dabei wird auch der früher vermisste Fall, dass die Hesse'sche Form $\triangle$ von f identisch verschwindet, also die drei Geraden durch einen Punkt gehen, mitbehandelt. Als Resultat ergiebt sich:

Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Zerlegbarkeit von $f(xxx) = 0$ in drei Gerade sind

$$Tf(nnn) - S\triangle(nnn) = 0,$$
$$Sf^2(nnn) - 6\triangle^2(nnn) = 0,$$
$$3\varphi(n)f(nnn) - \triangle^3(nnn) = 0,$$

wobei n ein beliebiger, der Linie dritter Ordnung nicht angehöriger Punkt ist. Ebenso sind die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Zerlegbarkeit in 3 Gerade eines Büschels:

$$S = 0, \quad T = 0, \quad \triangle(nnn) = 0, \quad \varphi(n) = 0.$$

Die Bezeichnungen sind die bekannten (Clebsch und Gordan, Clebsch Ann. VI. p. 436. 1873).

Diese Bedingungen zeichnen sich dadurch aus, dass sie nur für einen Punkt n, der nicht auf f liegt, zu bestehen brauchen, während die Bedingungen sonst (vgl. Gundelfinger, Clebsch Ann. IV. 561. 1871) so ausgesprochen werden, dass sie für alle Punkte n identisch zu gelten haben.

Am Schlusse giebt der Verfasser eine Anwendung auf die Frage, unter welchen Bedingungen eine Curve 3ter Ordnung ein Polardreieck in Bezug auf einen gegebenen Kegelschnitt ist.

Nr.

W. K. Clifford. Notes on quantics of alternate numbers, used as a means for determining the invariants and covariants of quantics in general. Proc. L. M. S. X. 124-129.

W. K. Clifford. Binary forms of alternate variables. Proc. L. M. S. X. 214-221.

W. Spottiswoode. On Clifford's graphs. Proc. L. M. S. X. 204-214.

Den Inhalt dieser Noten bilden einzelne Bemerkungen, die von Spottiswoode aus den hinterlassenen Papieren Clifford's herausgegeben sind. Wie man jede Determinante aus alternirenden Zahlen (linearen Functionen von λ_1, λ_2, λ_3, ..., für welche

$$\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = \cdots = 0, \quad \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \ldots = 1, \quad \lambda_1\lambda_2 = -\lambda_2\lambda_1 \text{ etc.})$$

darstellen kann (vgl. z. B. Hankel, „Complexe Zahlen"), so auch die Invarianten und Covarianten. Hat man eine Reihe von mehrfach linearen Formen, so kann man deren Invarianten, die solche bei von einander unabhängigen linearen Transformationen der Variabelnreihen sind, so bilden: Man betrachte jede Variabelnreihe als eine Reihe alternirender Zahlen und multiplicire je k Formen von je k Variabeln miteinander. So folgt aus

$$f = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2,$$
$$\varphi = b_{11}x_1y_1 + b_{12}x_1y_2 + b_{21}x_2y_1 + b_{22}x_2y_2,$$

indem man

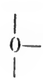
$$x_1^2 = x_2^2 = y_1^2 = y_2^2 = 0, \quad x_1x_2 = -x_2x_1 = 1, \quad y_1y_2 = -y_2y_1 = 1$$

setzt:

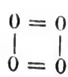
$$f.\varphi = a_{11}b_{22} - a_{12}b_{21} - a_{21}b_{12} + a_{22}b_{11}.$$

Clifford betrachtet die einfachsten Fälle als Beispiele. Die ganze Theorie ist aber im Wesentlichen identisch mit der bekannten Theorie von linearen oder mehrfach linearen Formen.

Die dritte Note bezieht sich auf die graphischen Darstellungen von invarianten Bildungen, über die in den F. d. M. X. 91. 1878 referirt worden ist, anschliessend an die Darstellungen in der atomistischen Theorie. In der vorliegenden Note bedeutet z. B. (xyz) eine Form, die linear sowohl in der Reihe x_1, x_2, als in y_1, y_2, als auch in z_1, z_2 ist; und diese Form kann man graphisch so darstellen:



Es wird dann z. B.



das Bild der Invariante

$$(xyz)\,(xyu)\,(zvw)\,(uvw)$$

der vier Formen (xyz), (xyu), (zvw), (uvw), wenn man, wie oben gesagt, x_1, x_2 als alternirende Zahlen nimmt etc. — Offenbar könnte man aber auch, wie in dem Referate, (F. d. M. X. p. 91. 1878) erklärt worden ist, die vier hier auftretenden Formen mit a_x^3, b_x^3, c_x^3, d_x^3 in der gewöhnlichen symbolischen Bezeichnung nehmen, und man hätte dann im Obigen ein Bild für die Invariante

$$(ab)^2\ (cd)^2\ (ac)\ (bd),$$

also für die Discriminante von a_x^3, wenn man noch $a_x^3 = b_x^3 = c_x^3 = d_x^3$ hätte. Clifford leitet dabei noch die einfachsten Invariantenrelationen ab, hauptsächlich durch Multipliciren der Formen (von alternirenden Variabeln) mit Determinanten $x_1y_2 - x_2y_1$.

Nr.

A. Capelli. Sopra la corrispondenza (2,2) ossia la forma $f(x^2, y^2)$ ed i suoi invarianti e covarianti relativi a due trasformazioni lineari independenti delle variabili. Battaglini G. XVII. 69-148.

Mit dieser Arbeit wird vom Verfasser ein naheliegendes Gebiet der Invariantentheorie betreten, das bisher völlig vernachlässigt worden ist: die Theorie der Formen von zwei Variabelnreihen, x_1, x_2 und y_1, y_2, die beide von einander unabhängigen linearen Transformationen unterworfen werden. Diese Theorie ist weder in der der binären Formen noch in der der Formen mit mehreren Variabeln ohne Weiteres inbegriffen. Denn, was das Erstere betrifft, so ist zwar das System einer in den x und in den y binären Form

$$f = a_x^m \alpha_y^n = b_x^m \beta_y^n = \cdots$$

in dem gewöhnlichen Sinne der Invariantentheorie, d. h. bei denselben Transformationen der x und der y, identisch mit dem System der aus f durch Reihenentwickelung nach den Potenzen von (xy) sich ergebenden Formen (vgl. Clebsch, Binäre Formen, § 14)

$$a_x^m \alpha_x^n,\ (a\alpha)a_x^{m-1}\ \alpha_x^{n-1},\ (a\alpha)^2 a_x^{m-2}\alpha_x^{n-2}, \cdots$$

Aber von den hier auftretenden Invarianten und Covarianten behalten für von einander unabhängige Transformationen der x und der y nur solche den invarianten Charakter, welche in ihren

symbolischen Ausdrücken die Symbole $a, b, c, \ldots$ von den $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ getrennt enthalten, wie etwa

$$(ab)^2 a_x^{m-2} b_x^{m-2} \alpha_y^n \beta_y^n,$$

nicht aber

$$(a\alpha) a_x^{m-1} \alpha_y^{n-1}.$$

Die Untersuchung also, welche unter diesen Formen mit getrennten Symbolen als Grundformen angenommen werden können, durch welche sich alle übrigen Formen des Systems rational, oder rational und ganz, ausdrücken, bleibt immer noch anzustellen, auch wenn man für den Fall identischer Substitutionen die Grundformen kennt.

Der Zusammenhang mit der Theorie der Formen von mehr als drei Variabeln geht über die linearen Substitutionen hinaus.

Der Verfasser behandelt nun den einfachen Fall

$$f = a_x^2 \alpha_y^2$$

direct, sowohl formentheoretisch, als mit geometrischen Interpretationen. In ersterer Beziehung führt er die Untersuchung so weit, dass er nachweist, wie alle Invarianten (bei unabhängiger Transformation der x und der y) sich rational und ganz durch die 3 Invarianten

$$L = (ab)^2 (\alpha\beta)^2, \quad M = (ab)^2 (cd)^2 (\alpha\gamma)^2 (\beta\delta)^2,$$
$$N = (ab)(bc)(ca)(\alpha\beta)(\beta\gamma)(\gamma\alpha)$$

ausdrücken. Für die Covarianten dagegen werden von ihm nur rationale Darstellungen gegeben, nämlich jede Covariante in den x (deren symbolischer Ausdruck ausser Klammerfactoren nur Factoren $a_x, b_x, \ldots$, nicht $\alpha_x, \beta_x, \ldots$, enthält), drückt sich, wenn mit einer Potenz einer gewissen Invariante multiplicirt, als ganze Function von L, M, N und dreier einfacher Covarianten aus; und analog die Covarianten in den y.

Es mögen die einzelnen Entwickelungen nun skizzirt werden.

Der erste Satz ist, dass die beiden, bez. nach y oder x genommenen Discriminanten von f,

$$V = (\alpha\beta)^2 a_x^2 b_x^2, \qquad W = (ab)^2 \alpha_y^2 \beta_y^2,$$

zwei binäre Formen k^{ter} Ordnung sind, deren entsprechende Invarianten einander gleich sind, so dass also auch die Doppelverhältnisse der vier Wurzeln von V, der „Verzweigungspunkte in x“,

gleich denen der vier Wurzeln von W, der „Verzweigungspunkte in y“, werden.

Geometrisch ist dies der bekannte Satz: Nimmt man bei einer Curve 3ter Ordnung zwei Punkte P und Π derselben zu Scheiteln von Strahlbüscheln und bezieht die in einem Punkte der Curve sich schneidenden Strahlen durch P und Π aufeinander, so erhält man eine Correspondenz (2,2), und die vier Tangenten von P aus liefern dieselben Doppelverhältnisse, wie die von Π aus.

Aus diesem Satz war auch umgekehrt der algebraische zu schliessen, und in der That kennt man auch den letzteren schon länger (vgl. Cayley, Quart. J. XI. 1870, p. 84, F. d. M. II. p. 505, sowie das folgende Referat).

Eine weitere Anwendung der Correspondenz (2,2) ist die auf die Curve 4ter Ordnung mit zwei Doppelpunkten P und Π, wobei also nur die Linie $P\Pi$ nicht der Linie ΠP zu entsprechen hat. Eine dritte Anwendung ist: Bei zwei Kegelschnitten C, Γ lässt man den Tangenten von Γ deren Schnittpunkte mit C entsprechen; man hat dann den Satz, dass die vier Schnittpunkte von C und Γ, als auf C gelegen, dieselben Doppelverhältnisse haben, wie die vier gemeinsamen Tangenten, als auf Γ gerechnet.

Der zweite Satz bezieht sich auf die den vier Verzweigungspunkten V in x entsprechenden vier „Doppelpunkte in y“

$$\begin{aligned}\Theta &= (ab)^2 (cd)^2 (\alpha\delta) (\beta\gamma)\, \alpha_y \beta_y \gamma_y \delta_y \\ &= (ab)(bc)(cd)(da)(\alpha\delta)(\beta\gamma)\, \alpha_y \beta_y \gamma_y \delta_y\end{aligned}$$

und die analog definirten vier „Doppelpunkte in x“

$$T = (\alpha\beta)^2 (\gamma\delta)^2 (ad)(bc)\, a_x b_x c_x d_x.$$

Nämlich auch Θ und T haben ihre entsprechenden Invarianten, also auch Doppelverhältnisse, gleich.

Sodann wird die Bedeutung des Verschwindens einzelner Invarianten untersucht. So wird für $L = 0$ die Form T die Hesse'sche von V, Θ die von W; damit $a_x^2 \alpha_y^2$ in das Product zweier bilinearer Formen zerfalle, ist nothwendig und hinreichend, dass V und W beide vollständige Quadrate werden; $N = 0$ ist die Bedingung, dass die den x entsprechenden Paare y', y'' eine Involution bilden, wobei dann auch dasselbe in Bezug auf die

den y entsprechenden Paare x', x'' eintritt; dabei werden T und Θ zu Quadraten, etc.

Die weitere Untersuchung geschieht mit Hülfe einer in den x und y symmetrischen Form f', in welche man f durch lineare Substitution auf unendlich viele Weisen (z. B. durch Transformation der x allein) überführen kann. Da für die symmetrische Form f'

$$V_z'^4 = W_z'^4$$

wird, so müssen, wenn man die Punktreihe der x und die der y auf eine Gerade in x', bez. in y' projicirt, so dass auf dieser Geraden eine symmetrische Correspondenz liegt, die Verzweigungspunkte in x' mit denen in y' zusammenfallen. Diese Projection ist, wegen des gleichen Doppelverhältnisses der Punkte von V und der von W, noch auf vier Arten möglich; und der Verfasser zeigt nun, dass umgekehrt jede dieser vier Arten von Projectionen auf symmetrische Correspondenz und Formen f' führt (vorausgesetzt, dass sich die Correspondenz (2,2) nicht auf niedrigere reducirt; die Fälle (1,2), (2,1) lassen sich nämlich nicht auf symmetrische Formen reduciren, die (1,1) wohl, aber $V_z'^4 = W_z'^4$ ist nicht hinreichend).

Auch von dieser symmetrischen Correspondenz giebt der Verfasser Anwendungen auf Curven dritter Ordnung.

Für die symmetrische Form $f' = a_x'^2 \alpha_y'^2$ wird

$$f' = \varphi_x'^2 \varphi_y'^2 + \tfrac{1}{3}\tau'.(xy)^2,$$

wo

$$\varphi_z'^4 = a_z'^2 \alpha_z'^2, \qquad \tau' = (a'\alpha')^2,$$

und alle Invarianten von f' werden also ganze Functionen von τ' und den Invarianten von $\varphi_z'^4$. Diese Darstellung benutzt nun der Verfasser, um f in f' überzuführen und die am Anfang erwähnten Hauptresultate abzuleiten. Zunächst führt man nämlich leicht an Stelle der Invarianten i und j von $\varphi_z'^4$ die Invarianten L', N' von f' ein; es ergiebt sich dann M' als ganze Function von L', N', τ', und vierten Grades in τ'. Transformirt man nun diese Beziehung in f, so erhält man eine Gleichung zwischen

$$L,\ M,\ N,\ \frac{\tau'}{r.\varrho} = z,$$

wobei r, ϱ die Substitutionsdeterminanten. Diese Gleichung wird in z vom 4ten Grade:

$$z^4-\tfrac{1}{2}Lz^2-\tfrac{1}{3}Nz+\tfrac{1}{4}(M-\tfrac{1}{2}L^2) = \Omega(z) = 0,$$

den vier Arten, f in f' zu transformiren, entsprechend. Jede Invariante wird hiernach eine rationale ganze Function von L, N, z, die sich durch Vertauschung der Wurzeln z von $\Omega(z) = 0$ nicht ändern darf. Bildet man also die vier so entstehenden Werthe dieser Function, so liefert deren Summe die Invariante als rationale ganze Function von L, M, N.

Und ganz analog wird das System associirter Formen für die Covarianten von f aufgestellt. Die Discriminante $\triangle$ von Ω, identisch mit der von V, wird auch die Invariante, mit deren Potenzen man die Covarianten zu multipliciren hat, um sie als ganze Functionen gewisser einfacher Covarianten zu erhalten.

Die Gleichung $\Omega(z) = 0$ ist schon bei Clebsch, (Vorlesungen über Geometrie, herausgegeb. von Lindemann, 7. Abth. p. 951-956,) aufgetreten, bei der Berechnung des „dem Connex (2,2) conjugirten Connexes“, und zwar auch ausgerechnet in den Coefficienten der Form f. Ebenso die symbolischen Formeln für L, M, N. Indess ist dort der Satz, dass sich die Invarianten durch sie ausdrücken lassen, nicht abgeleitet.

Eine Reihe einzelner Bemerkungen, über das Erniedrigen der Correspondenz, über die Realitätsverhältnisse der Wurzeln von V und W, über die gegenseitig sich entsprechenden Elemente etc., schliesst die reiche Abhandlung. Nr.

H. G. Zeuthen. Déduction de différents théorèmes géométriques d'un seul principe algébrique. Proc. L. M. S. X. 196-204.

Das algebraische Princip ist das auch in der Arbeit Capelli's (siehe das vorstehende Referat) abgeleitete und ebenfalls zu geometrischen Anwendungen benutzte: dass bei einer Form $f = a_x^2 \alpha_y^2$, die quadratisch in x_1, x_2 und in y_1, y_2 ist, die Discriminante in x und die in y zwei binäre Formen 4ten Grades mit denselben Doppelverhältnissen sind. Auch die Anwendungen stimmen zu-

nächst mit den dort beim ersten Satze erwähnten überein. Ausserdem werden noch Anwendungen angeführt: 1) auf ein Büschel von Flächen 2[ter] Ordnung, die Gruppen von vier Erzeugenden einer Art auf jeder Fläche betreffend, welche die Grundcurve berühren; 2) auf eine unicursale Curve 4[ter] Ordnung und Classe in Bezug auf die Tangenten und deren Schnittpunkte, und ebenso auf eine unicursale Raumcurve 5[ter] Ordnung in Bezug auf die Schmiegungsebenen und deren Schnittpunkte; 3) auf die Fläche 4[ter] Ordnung mit Doppelgeraden, insbesondere auf die mit zwei Doppelgeraden, wonach die vier Cuspidalpunkte auf der einen Geraden dieselben Doppelverhältnisse haben, wie die vier anderen Geraden; etc. Die symmetrische Correspondenz ist nicht berührt. Nr.

F. Franklin. Note on partitions. Am. J. II. 187-188

Betrifft ein von Sylvester im Mess. of Math. Mai 1878 mitgetheiltes abgekürztes Verfahren zur Berechnung der Function $(w:i,j)-(w-1:i,j)$; worin $(w:i,j)$ die Anzahl angiebt, wie oft w aus j Summanden der Zahlenreihe $0, 1, 2, \dots i$ zusammengesetzt werden kann. (Siehe auch p. 83). Schl.

C. le Paige. Note sur certains combinants des formes algébriques binaires. Bull. de Belg. (2) XLVIII. 530-549.

F. Folie. Rapport sur ce mémoire. Bull. de Belg. XLVIII. 460-461.

Nach einigen historischen Notizen, in denen er die Berührungspunkte seiner früheren Untersuchungen mit denen anderer Mathematiker zeigt, bezieht der Verfasser die Invariante der Involution auf die Invarianten $(ab)^n$ in dem Fall, wo n eine ungrade Zahl ist. Er zeigt für die verschiedenen Ordnungen, dass, wenn die Involutionsbedingung zwischen $n+1$ Formen erfüllt ist, zwischen diesen Formen eine lineare Relation existirt, deren Coefficienten er bestimmt. Im Fall grader Formen dehnt er einen bisher nur für $n=1$ bekannten Satz auf $2n$ Formen von der Ordnung $2n$ aus. Mn. (O.)

J. J. Sylvester. On the theorem connected with Newton's rule for the discovery of the imaginary roots of equations. Messenger (2) IX. 71-84.

Die Arbeit bezieht sich auf des Verfassers Untersuchungen, die mit Newton's Regel im Zusammenhang stehen und ursprünglich in den Proc. L. M. S. veröffentlicht sind und von denen sich ein kurzer Auszug in der dritten Auflage von Todhunter's „Theory of equations" befindet. Der Verfasser betrachtet speciell den kritischen Fall, in dem $\gamma_i = \frac{n-i+1}{n-i}$, und zeigt, dass dann der Grad jedes G um 2 Einheiten erniedrigt wird und dass jedes G proportional ist der Hessischen Determinante des ihm vorhergehenden F, betrachtet als homogene Function von x und 1.

Das folgende allgemeinere Theorem wird bewiesen: Wenn $(a_0, a_1, \dots a_i)\widehat{\ }(xy)^i$ mit f_i bezeichnet wird, und $H_\varepsilon(f_{i+\varepsilon})$ die Covariante von $f_{i+\varepsilon}$ bezeichnet, deren höchste Potenzen von x die Coefficienten

$$\begin{vmatrix} a_0, & a_1, & \dots & a_\varepsilon \\ a_1, & a_2, & \dots & a_{\varepsilon+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_\varepsilon, & a_{\varepsilon+1}, & \dots & a_{2\varepsilon} \end{vmatrix}$$

haben, so ist

$$\begin{vmatrix} f_{i-\varepsilon}, & f_{i-\varepsilon+1}, & \dots & f_{i+\varepsilon} \\ f_{i-\varepsilon+1}, & f_{i-\varepsilon+2}, & \dots & f_{i+\varepsilon+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{i+\varepsilon}, & f_{i+\varepsilon+1}, & \dots & f_{i+2\varepsilon} \end{vmatrix} \text{ gleich } y^{\varepsilon^2+\varepsilon} H_\varepsilon(f_{i+\varepsilon}).$$

Der Verfasser gelangt dazu, eine reine Invariante, oder besser das „Schema" einer Invariante zu definiren als „eine Function symbolischer Inversen $(XY\dots)$ zu einer Anzahl von Buchstaben und einer Anzahl von bedingungslosen Absoluten, die die Eigenschaft besitzen, dass, wenn diese Absoluten der Bedingung unterworfen werden, an Stelle homogener Functionen von bestimmten Ordnungen der Buchstaben zu stehen, sie eine Function werden eines der Buchstaben, der symbolischen Inversen des Restes und der dieser Bedingung unterworfenen Absoluten."

Glr. (O).

C. le Paige. Mémoire sur quelques applications de la théorie des formes algébriques à la géométrie. Mém. cour. de Belg. in 4°. XLII.

F. Folie. Rapport sur ce mémoire. Bull. de Belg. (2) XLV. 158-166.

Mn.

G. Foglini. Invarianti, covarianti e contravarianti delle funzioni omogenee. Acc. P. N. L. XXXI. 248-316. 1878.

Enthält eine eingehende Einführung in die Theorie der Invarianten, die wesentlich für solche Leser bestimmt ist, die sich mit den Hauptgrundzügen der Theorie bekannt machen wollen.

O.

S. Günther. Invarianti, covarianti e contravarianti delle funzioni omogenee. Nota del P. Giacomo Foglini. Boncompagni Bull. XII. 813-815.

Anzeige der obigen Schrift des Herrn Foglini, übersetzt aus Schlömilch XXIV. Hl. A. 195-197. No.

Capitel 3.

Elimination und Substitution, Determinanten, symmetrische Functionen.

P. Mansion. Sur l'élimination. Bull. de Belg. (2) XLVI. 899-903, XLVII. 532-541, XLVIII. 463-472, 473-490.

P. Mansion. Théorie à posteriori de l'élimination entre deux équations algébriques. Bull. de Belg. (2) XLVIII. 491-526.

P. Mansion. Sur l'élimination. C. R. LXXXVII. 975-978.

P. Mansion. On rational functional determinants. Messenger (2) IX. 30-32

P. MANSION. On the equality of Sylvester's and Cauchy's eliminants. Messenger (2) IX. 60-63.

E. CATALAN et F. FOLIE. Rapports sur ces mémoires. Bull. de Belg. (2) XLVI. 880-881, XLVII. 490, XLVIII. 445-452.

Die drei letzten Noten sind Auszüge aus den beiden ersten Abhandlungen. Es wird daher genügen, über die beiden ersten zu berichten.

Die erste Abhandlung ist eine Auseinandersetzung a priori der Theorie der Elimination, sowohl nach der Methode von Sylvester, wie nach der von Cauchy, indem dabei ein neuer Gedanke benutzt wird, der im Folgenden für zwei Gleichungen auseinandergesetzt werden möge.

$$fx = a_0+a_1x+\cdots+a_4x^4 = 0, \quad gx = b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3 = 0$$

mögen 2 Wurzeln α, β gemeinsam haben. Unter dieser Voraussetzung hat man:

$$(M)\quad \begin{cases} \begin{vmatrix} 1 & f\alpha \\ 1 & f\beta \end{vmatrix} = 0, & \begin{vmatrix} 1 & \alpha f\alpha \\ 1 & \beta f\beta \end{vmatrix} = 0, \\ \begin{vmatrix} 1 & g\alpha \\ 1 & g\beta \end{vmatrix} = 0, & \begin{vmatrix} 1 & \alpha g\alpha \\ 1 & \beta g\beta \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & \alpha^2 g\alpha \\ 1 & \beta^2 g\beta \end{vmatrix} = 0. \end{cases}$$

Zwischen diesen Relationen wird man eliminiren können

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & \beta \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & \alpha^2 \\ 1 & \beta^2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & \alpha^3 \\ 1 & \beta^3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & \alpha^4 \\ 1 & \beta^4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & \alpha^5 \\ 1 & \beta^5 \end{vmatrix}$$

und eine der Bedingungen finden, die nöthig sind, damit die beiden Gleichungen zwei Wurzeln gemeinsam haben. Ebenso findet man die anderen nothwendigen Bedingungen. Vereinigt man diese verschiedenen nothwendigen Bedingungen, so findet man, dass man sie alle ausdrücken kann, indem man eine gewisse rechtwinklige Determinante gleich Null setzt. Ebenso ist es in dem Fall, wo man sich der Methode von Cauchy bedient. Ist umgekehrt bei der einen oder der anderen Methode eine gewisse rechtwinklige Determinante Null, so haben die Gleichungen zwei oder mehrere Wurzeln gemeinsam.

Die Betrachtung der Ausdrücke (M) gestattet, die gefundenen nothwendigen und hinreichenden Bedingungen mit Anwendung der Methode von Cauchy in andere zu transformiren, welche von

7*

Rouché zum ersten Male gegeben, aber nicht bewiesen sind. Auch mittelst der Methode von Sylvester lassen sich die Bedingungen ebenso transformiren. Endlich giebt die Betrachtung derselben Ausdrücke noch ein Mal, nach der einen, wie auch der anderen Methode, die Gleichung mit den gemeinsamen Wurzeln, die Gleichungen mit den nicht gemeinsamen Wurzeln und die Gleichung mit den gemeinsamen und nicht gemeinsamen Wurzeln. Der neue, in dieser ersten Abhandlung enthaltene Gedanke gestattet auch die Fälle zu untersuchen, wo die gemeinsamen Wurzeln gleich sind.

Die zweite Abhandlung enthält eine Theorie der Elimination a posteriori, in der die schönen von Rouché gefundenen Sätze bewiesen werden. Es wird dabei sein Vorgang streng befolgt und weitere Folgerungen gezogen. Dazu ist man genöthigt, sich zunächst auf die Untersuchung zweier Gleichungen von demselben Grade zu beschränken. Ein sehr einfacher Rechnungskunstgriff gestattet dann diese Sätze auf zwei beliebige Gleichungen auszudehnen. Endlich zeigt der Verfasser, indem er die Reihenfolge, die gewöhnlich befolgt wird, um die Linien der Eliminante von Sylvester zu schreiben, die die Coefficienten der ersten gegebenen Gleichung enthalten, umkehrt, dass diese Eliminante gleich der von Cauchy ist, und dass es ebenso mit ihren Hauptminoren ist. Man kann also (wie man früher in anderer Weise in der Theorie a priori gesehen hat) nach der Methode von Sylvester Sätze beweisen, welche denen von Rouché in der Methode von Cauchy äquivalent sind. Die Abhandlung enthält zum Schluss den Beweis eines Satzes von Falk, auf den man eine vollständige, aber mehr elementare Theorie, als die sonst gebräuchliche gründen kann. (Siehe P. Mansion, Déterminants, 3^{me} éd. Paris, Gauthier-Villars. p. 57.)

Mn. (O.)

H. Lemonnier. Mémoire sur l'élimination. Paris. Gauthier-Villars.

Dies ist, nach einem Referate in den Nouv. Ann. (2) XVIII. 140-142, die genauere Ausführung der Arbeiten in den C. R.,

über die bereits F. d. M. VII. (1875) p. 37 berichtet worden ist. In den Nouv. Ann. findet sich ein genaues Inhaltsverzeichnis. Zu eingehenderen Bemerkungen liegt kein Anlass vor. O.

A. Söderblom. Om algebraisker equationer och equationscurver. Upsala Afh. 1879.

Der Verfasser giebt im Anfang die Darstellung einiger Eliminationsmethoden, und zeigt dann, wie man mit Anwendung derselben Gleichungen vom dritten und vierten Grade auflösen kann. Die Abhandlung enthält kaum etwas Neues, doch giebt der Verfasser manche historische Notizen, welche nicht ohne Werth zu sein scheinen. M. L.

M. Falk. Sur la méthode d'élimination de Bezout et Cauchy. Ups. Årsskr. 1879.

Auf dem von Bezout gegebenen Wege wird der symmetrische Ausdruck für die Resultante zweier Gleichungen desselben Grades in Determinantenform hergeleitet. Dann folgt die Untersuchung über die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen der Existenz einer vorgeschriebenen Anzahl gleicher Wurzeln der Gleichungen; als Bedingung ergiebt sich das Verschwinden der Resultante nebst einer Anzahl ihrer Unterdeterminanten.

No.

V. Hioux. Note sur la méthode d'élimination Bezout-Cauchy. Nouv. Ann. (2) XVIII. 289-296.

Aus der Determinantenform der Resultante R zweier ganzen Functionen $f(x)$, $g(x)$ werden einige bekannte Eigenschaften derselben abgeleitet. No.

Julius Petersen. En Rettelse. Zeuthen Tidsskr. (4) III. 78-79.

Verbesserung eines Punktes in der vom Verfasser in seinem

Lehrbuche über die Theorie der algebraischen Gleichungen gegebenen Darstellung der Bezout'schen Eliminationsmethode.

Gm.

F. Brioschi. Un teorema nella teorica delle sostituzioni. Rend. Ist. Lomb. (2) XII. 483-485.

Bedeutet p eine Primzahl und $| z \quad \varphi(z) |$ die Substitution, welche, auf die p Grössen $x_0, x_1, \dots x_{p-1}$ angewandt, x_z in $x_{\varphi(z)}$ überführt, so hat $\varphi(z)$ die Form

$$\varphi(z) \equiv \alpha\theta(z+\rho)+\beta \text{ (mod. } p).$$
$$(\alpha = 1, 2, \dots n-1; \ \rho, \beta = 0, 1, \dots n-1).$$

Für θ ist nur bei $p = 7$ die Form

$$\theta(z) \equiv z^{p-2} + az^{\frac{1}{2}(p-1)} + bz \text{ (mod. } p)$$

möglich; dabei muss $b \equiv 3a^2$ (mod. 7) sein.

No.

A. Börsch. Ueber ein den Gleichungen der orthogonalen Substitution verwandtes Gleichungssystem. Schlömilch Z. XXIV. 391-400.

Es soll die Determinante $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$\Delta = | 1 \quad x_{\lambda 1} \quad x_{\lambda 2} \dots x_{\lambda n} | \quad (\lambda = 0, 1, \dots n)$$

ein Maximum werden, wenn die $n+1$ Bedingungsgleichungen bestehen

$$\sum_{k=1}^{n} x_{\lambda k}^2 = 1, \quad (\lambda = 0, 1, \dots n).$$

Die allgemeine Bestimmung der Grössen x, welche von $\frac{1}{2}n(n-1)$ Parametern abhängen, wird gegeben, falls schon irgend ein Specialsystem von Lösungen bekannt ist. Für $n = 2, 3, 4$ werden solche Systeme mitgetheilt. Dagegen wird allgemein der Maximalwerth von Δ gleich $\sqrt{\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}}$ bestimmt.

No.

E. Schering. Analytische Theorie der Determinanten. Gött. Abh. XXII. 1-42.

Es wird hier eine analytische und eine geometrische Definition der Determinanten gegeben. Dabei liegt die folgende Anordnung der Elemente

$$\begin{matrix} E(h_1|k_1) & E(h_1|k_2) & \cdot\ \cdot & E(h_1|k_n) \\ E(h_2|k_1) & E(h_2|k_2) & \cdot\ \cdot & E(h_2|k_n) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ E(h_n|k_1) & E(h_n|k_2) & \cdot\ \cdot & E(h_n|k_n) \end{matrix}$$

der Determinante zu Grunde. Es haben $h_1, h_2, \ldots h_n$ und $k_1, k_2, \ldots k_n$ die Bedeutung von Indices, sind aber des leichtern Druckes wegen in der sonst für Argumente üblichen Form dargestellt. Die Elemente werden auf den Durchschnittspunkten befindlich gedacht, welche die den Zeilen entsprechenden unter sich parallelen Geraden mit den unter sich parallelen, die Spalten bestimmenden, Geraden bilden. Erhält das dadurch entstandene rautenförmige Netz am Anfangspunkte der ersten Zeile eine spitze Ecke, so lässt sich das allgemeine Glied der aus jenen Elementen gebildeten Determinante definiren als das Product von irgend welchen n Elementen, so oft in die negative Einheit multiplicirt, wie eine, irgend zwei dieser n Elemente verbindende Gerade an beiden Enden in stumpfen Winkeln ausläuft; aber noch multiplicirt mit Null, wenn eine Verbindungslinie von zwei jener n Elemente weder in einem stumpfen noch in einem spitzen Winkel endigt, sondern ganz in eine der geraden Linien des ursprünglichen Netzes fällt. Die Summe aller solcher Glieder, von denen keine zwei ihre sämmtlichen n Elemente gemeinsam haben, ist die Determinante.

Zur Aufstellung einer analytischen Definition wird für die ersten Indices $h_1, h_2, \ldots h_n$ und für die zweiten Indices $k_1, k_2, \ldots k_n$ eine vorgegebene Reihenfolge als die vorwärtsgehende und die dieser entgegengesetzte als die rückläufige betrachtet. In dem allgemeinen Gliede der Determinante tritt zu dem Producte aus n Elementen so oft die negative Einheit als Factor hinzu, wie zwischen je zweien dieser Elemente die bei dem Uebergange von einem Elemente zu dem anderen Elemente sich ergebende Reihenfolge für die ersten Indices derjenigen für die zweiten Indices entgegengesetzt ist; es tritt aber noch der Factor Null hinzu,

wenn eine dieser Reihenfolgen unbestimmt bleibt. Mit Hülfe dieses Gesetzes werden für die durch $E(h_1, h_2, \ldots h_n \mid k_1, k_2, \ldots k_n)$ bezeichnete Determinante rein analytische Darstellungen gefunden, von welchen ich hier nur die folgenden und zwar in der zur Abkürzung des Druckes gewählten Form:

$$E(h_1, h_2, \ldots h_n \mid k_1, k_2, \ldots k_n) \,.\, \prod_{(m,\mu)} (h_m - h_\mu)(k_m - k_\mu)$$
$$= \Big\{\prod_{(m,\mu)} (\mathfrak{k}_m - \mathfrak{k}_\mu)\Big\} \,.\, \sum_\eta^{(n)} \Big\{\prod_\nu E(\eta_\nu \mid \mathfrak{k}_\nu)\Big\} \,.\, \prod_{(m,\mu)} (\eta_m - \eta_\mu)$$
$$= \Big\{\prod_{(m,\mu)} (\mathfrak{h}_m - \mathfrak{h}_\mu)\Big\} \,.\, \sum_\varkappa^{(n)} \Big\{\prod_\nu E(\mathfrak{h}_\nu \mid \varkappa_\nu)\Big\} \,.\, \prod_{(m,\mu)} (\varkappa_m - \varkappa_\mu)$$
$$= \frac{1}{\Pi(n)} \sum_\eta^{(n)} \sum_\varkappa^{(n)} \Big\{\prod_\nu E(\eta_\nu \mid \varkappa_\nu)\Big\} \,.\, \prod_{(m,\mu)} (\eta_m - \eta_\mu)(\varkappa_m - \varkappa_\mu)$$

wiedergeben will. Hier durchlaufen (m, μ) in den betreffenden Producten alle diejenigen Wertheverbindungen von zwei der Zahlen $1, 2, 3 \ldots n$, welche die Bedingung $m > \mu$ erfüllen. Die auf ν sich beziehenden Producte erstrecken sich über die ganzen Zahlen $1, 2, 3, \ldots n$ als Werthe des ν. Es sind $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2 \ldots \mathfrak{k}_n$ in irgend einer bestimmt gewählten Reihenfolge den $k_1, k_2, \ldots k_n$ gleich, ebenso $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \ldots \mathfrak{h}_n$ in irgend einer bestimmt gewählten Reihenfolge den $h_1, h_2, \ldots h_n$ gleich. In der n-fachen Summe $\sum\limits_\eta^{(n)}$ durchläuft jede der Grössen $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$ sämmtliche Werthe $h_1, h_2, \ldots h_n$; in den n-fachen Summen $\sum\limits_\varkappa^{(n)}$ durchläuft jede der Grössen $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_n$ alle Werthe $k_1, k_2, \ldots k_n$. Es ist $\Pi(n)$ in der seit Gauss gebräuchlichen Bedeutung angenommen.

Aus jenen Darstellungen werden durch rein algebraische Umformungen der Summen und der Producte die Determinantensätze abgeleitet, insbesondere die Lehrsätze über die Zerlegung der Determinante in Unterdeterminanten, über die Zusammensetzung und Multiplication der Determinanten und über die Darstellung der Pfaff'schen Determinante als Quadrat der Jacobi'schen Resolvente. Für die zuletzt genannte Determinante wird auch diejenige Darstellung gefunden, in welcher nur algebraisch verschiedene Glieder auftreten. Die hierbei in Betracht kommende Anzahl derjenigen Glieder; welche in der ursprünglichen allgemeinen Determinantenform in Folge der Voraussetzung

$E(h|k) + E(k|h) = 0$ einander algebraisch gleich werden, hängt auf eine sehr einfache Weise von der Anzahl der durch die Indicespaare der Elemente gebildeten Cyklen ab. Sch.

M. A. Baraniecki. Theorie der Determinanten. Paris. Verlag des Grafen Dzialynski. 8°. (Polnisch).

Dieses ausführliche Lehrbuch der Determinantentheorie enthält folgende Capitel: 1) Erklärungen und Bezeichnungen; 2) Vertauschung paralleler Reihen; 3) Zerlegung der Determinanten nach den Elementen irgend einer Reihe; 4) Vereinfachung und Berechnung der Determinanten; 5) Multiplication der Determinanten; 6) Zerlegung nach den partiellen Determinanten irgend einer Combination paralleler Reihen. Addition und Subtraction; 7) Differentiirung. Determinante des adjungirten Systems; 8) Determinante eines Systems linearer Gleichungen; 9) Determinante der linearen Transformation; 10) Die symmetrische Determinante; 11) Schiefe Determinante; 12) Functionaldeterminante. Erster Anhang: Cubische Determinante und Determinanten höherer Ordnung. Zweiter Anhang: Die Anwendung der Determinanten auf Geometrie aus den Arbeiten von Brioschi, Joachimsthal, Mertens, und Trzaska (Kretkowski) entnommen. Endlich ist noch eine bibliographische Notiz über die in polnischer Sprache erschienenen grösseren und kleineren Arbeiten aus der Determinantenlehre beigefügt.

Das Werk enthält alles Wesentliche aus der genannten Lehre bis auf die neuesten Arbeiten in klarer, manchmal aber für einen Universitätscursus zu ausführlicher Darstellung. Die reichhaltigen literarischen und historischen Notizen erhöhen den Werth dieser ersten grösseren, in der polnischen Literatur diesen Gegenstand behandelnden Arbeit. Dn.

K. Zahradník. Elemente der Determinantentheorie. Prag. (Böhmisch).

Enthält das für Mittelschulen passende Material nebst zahlreichen, meist originellen geometrischen Beispielen. Std.

W. Matzka. Grundzüge der systematischen Einführung und Begründung der Lehre der Determinanten. Prag. Abh. (6) IX.

Im ersten Abschnitt werden durch die Elimination unbekannter Grössen aus Gleichungen ersten Grades mittelst der Subtractionsmethode der Reihe nach die Determinanten zweiter bis fünfter Ordnung entwickelt; hierbei treten in diesen speciellen Fällen bereits Haupteigenschaften der Determinanten auf. Diese werden nach der Besprechung der allgemeinen Bildung von Determinanten beliebiger Ordnung im zweiten und dritten Abschnitte erweitert und allgemein bewiesen. Im letzten Theile folgt die Behandlung von n homogenen linearen Gleichungen mit $n-1$ Unbekannten.

No.

Picquet. Mémoire sur l'application du calcul des combinaisons à la théorie des déterminants. J. d. l'Éc. Pol. XXVIII. 201-343.

Die Abhandlung ist einem speciellen Theile der Determinantentheorie gewidmet, welcher in den meisten Lehrbüchern nur wenig berücksichtigt wird, nämlich der Theorie der partialen Determinanten und conjugirten Systeme. Verfassser hat einen möglichst vollständigen Abriss geben wollen und deshalb alle wichtigen Lehrsätze über diesen Gegenstand von Cauchy, Binet, Sylvester, Borchardt, Franke u. A. aus den Originalarbeiten, in denen sie zerstreut vorkommen, gesammelt, geordnet, in systematischem Zusammenhange mit theilweise abgeänderten Beweisen dargestellt und durch eigene Untersuchungen vervollständigt.

Schl.

H. W. L. Tanner. Notes on determinants of n dimensions. Proc. L. M. S. X. 167-180.

Der Artikel bietet neben bekannten Sätzen eine anscheinend neue Regel zur Bestimmung des Vorzeichens einer Determinante vom Range n, ferner eine Untersuchung über die Veränderungen

ihres Werthes bei Vertauschung zweier Reihen von Indices in jedem Elemente. Sowie eine quadratische Determinante bei Vertauschung der Zeilen und Spalten unverändert bleibt, so auch jede Determinante graden Ranges bei Vertauschung von irgend zwei Reihen von Indices in jedem Elemente. Eine Determinante von ungradem Range verändert ihren Werth, wenn die erste Reihe von Indices mit einer folgenden vertauscht wird; aber nicht, wenn irgend zwei andere Reihen vertauscht werden. Sie hat demnach genau n verschiedene Werthe. Endlich wird das Product zweier Determinanten vom Range m und n als Determinante vom Range $(m+n-2)$ dargestellt. Dass aber, wie Herr Tanner behauptet, jede Determinante höheren Ranges bei Vertauschung zweier Indices derselben Classe stets das Zeichen wechselt, ist bekanntlich nicht richtig. St.

H. W. L. Tanner. On the sign of any term of a determinant. Messenger (2) IX. 51-52.

Methode zur Darstellung beliebiger Glieder einer entwickelten Determinante, durch ein Diagramm, so dass das Zeichen des Gliedes positiv oder negativ ist, je nachdem die Zahl der Schnitte in dem Diagramm grade oder ungrade ist.

Glr. (O.)

S. Günther. Von der expliciten Darstellung der regulären Determinanten aus Binomialcoefficienten. Schlömilch Z. XXIV. 96-103.

Die Determinante p^{ter} Ordnung

$$\left|\binom{m_r}{n_s}\right|, \quad \left.\begin{matrix} r \\ s \end{matrix}\right\} = 1, 2, \ldots p,$$

worin m_r, n_s jede willkürliche ganze Zahl $\geqq 0$ bedeuten können, wird auf die von Nägelsbach (vgl. F. d. M. IV. 1872 p. 67) betrachteten Determinanten

$$\left| {}_{m_r}^{\;\;\alpha_s} \right|$$

zurückgeführt. St.

J. König. Ein Beweis des Multiplicationstheorems für Determinanten. Clebsch Ann. XIV. 507-509.

St.

C. le Paige. Sur la multiplication des déterminants. N. C. M. V. 76-79.

Es sei:

$$A = \Sigma \pm a_{11}\, a_{22} \dots a_{nn}, \quad B = \Sigma \pm b_{11}\, b_{22} \dots b_{nn},$$
$$C = \Sigma \pm c_{11}\, c_{22} \dots c_{nn},$$
$$c_{ik} = a_{i1} b_{k1} + a_{i2} b_{k2} + \dots + a_{in} b_{kn}.$$

Verändert man a_{k1} in

$$a'_{k1} = a_{k1} + \lambda_2 a_{k2} + \lambda_3 a_{k3} + \dots + \lambda_n a_{kn},$$

so wird

$$c'_{ik} = c_{ik} + (\lambda_2 a_{k2} + \lambda_3 a_{k3} + \dots + \lambda_n a_{kn})$$

und C wird C'. Man kann dann beweisen, dass $C' = C$. Wählt man in dem Fall, wo A zu Null wird, $\lambda_2, \lambda_3, \dots \lambda_n$ so, dass A' zwei identische Colonnen hat, so hat auch C' zwei identische Colonnen. Man kann daraus leicht ableiten, dass $C = mAB$. Dann beweist man durch eine passende Wahl der Elemente von A und B, dass $m = 1$. Der Satz $C = C'$ ist, wie der Referent glaubt, noch nicht ohne die Regel von der Multiplication der Determinanten bewiesen worden.

Mn. (O.)

Jamet. Sur la multiplication des déterminants. N. C. M. V. 79-81.

Nach einer Note von Herrn Falk kann man, wie folgt, beweisen, dass C gleich Null ist, wenn A Null ist. Man multiplicire die Linien 1, 2, ... n von C respective mit $x_1, x_2, \dots x_n$ und füge sie zu einer von ihnen, i, unter der Voraussetzung hinzu, dass $x_i \gtrless 0$. Wenn A Null ist, wird man $x_1, \dots x_n$ so bestimmen können, dass diese Linie i von C lauter Elemente Null hat. Man folgert aus dieser Bemerkung $C = mAB$, indem $m = 1$, wie man sieht, die Glieder auf die der Diagonale reducirt.

Mn. (O.)

de Gasparis. Prodotto di due determinanti a tre indici, espresso con un determinante ordinario.
Acc. R. d. L. (3) III. 44-45.

St.

F. Muir. General theorems on determinants. Trans. of Edinb. XXIX. 47-54.

§ 1 enthält einen Satz über zusammengesetzte Determinanten. § 2 hat den Titel: Reduction der Ordnung einer Determinante und § 3 Product einer Determinante und eines Polynoms.

Cly. (O.)

J. J. Sylvester. Sur les déterminants composés.
Borchardt J. LXXXVIII. 49-68.

Unter „zusammengesetzten" Determinanten sind solche verstanden, deren Elemente selbst wieder Unterdeterminanten irgend einer gegebenen Ordnung von einer Determinante sind.

Die Sätze über die aus den ersten Unterdeterminanten gebildeten Determinanten sind bekannt, die höheren Sätze aber nur erst theilweise (vgl. Baltzer's Determinanten, 4. Aufl., § 7. 6; der dort nach Franke citirte Satz ist schon auf Sylvester, Phil. Mag. 1851, zurückzuführen). Dabei erhält Sylvester unter Anderm das Multiplicationstheorem

$$\Sigma \pm a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} . \Sigma \pm b_{11} b_{22} \cdots b_{nn} = \Sigma \pm c_{11} c_{22} \cdots c_{nn},$$

indem er eine Determinante untersucht, deren Elemente aus solchen der Art

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{i1} \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & a_{i2} \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & a_{i3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & a_{in} \\ b_{1k} & b_{2k} & b_{3k} & \ldots & b_{nk} & 0 \end{vmatrix} = -\sum_j a_{ij} b_{jk} = -c_{ik}$$

bestehen; und analog das erweiterte Multiplicationstheorem.

Sylvester untersucht nun Determinanten, gebildet aus nur einem Theil der Unterdeterminanten μ^{ter} Ordnung einer gegebenen Determinante $\triangle$. Man theile $\triangle$ in $a+b+\cdots+z$ Zeilen und ebensoviele Colonnen: Alsdann nehme man aus den a ersten Zeilen irgend welche α heraus, aus den b folgenden Zeilen irgend welche $\beta, \ldots,$ aus den z letzten Zeilen irgend welche ζ; ebenso aus den a ersten Colonnen irgend welche $\alpha, \ldots,$ aus den z letzten Colonnen irgend welche ζ heraus. Die in den so gewählten Reihen enthaltenen Elemente führen zu einer Determinante des Grades $\alpha+\beta+\cdots+\zeta$; und indem man auf alle Weisen die α Zeilen aus den festen a Reihen etc. nimmt, erhält man eine aus lauter solchen Determinantén des Grades $\alpha+\cdots+\zeta$ bestehende Determinante, die Sylvester mit

$$({}^{\alpha}A_a{}^{\beta}B_b \;\ldots\; {}^{\zeta}Z_z)$$

bezeichnet. Hiernach wäre z. B. die Determinante aus den Elementen der a ersten Linien und Colonnen von $\triangle$ mit (A_a) zu bezeichnen, das erste Element a_{11} insbesondere mit (A); die erste Unterdeterminante $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ mit (AB) oder mit $({}^2A_2)$; $\triangle$ selbst mit $(AB\ldots N)$ oder $({}^nA_n)$.

Nach Sylvester soll dann $({}^{\alpha}A_a{}^{\beta}B_b\ldots{}^{\zeta}Z_z)$ ein Product werden, das sich aus Potenzen der Determinanten (A), $(AB), \ldots,$ $(AB\ldots N)$ zusammensetzt; aber das darüber gegebene Theorem ist nach einer neuerlich von Borchardt erfolgten Mittheilung (Borchardt J. LXXXIX.) noch nicht correct, und in der jetzigen Fassung von Sylvester zunächst zurückgezogen. Jedenfalls aber liegt es in der angegebenen Richtung.

Am Schlusse wird auf ein analoges Theorem in Bezug auf Matrices, deren Elemente Unterdeterminanten aus einer Matrix sind, hingewiesen.

Nr.

J. J. Sylvester. Note on determinants and duadic disynthemes. Am. J. II. 89-97, 214-223.

J. J. Sylvester. Sur la valeur moyenne des coefficients dans le développement d'un déterminant gauche

ou symétrique d'un ordre infiniment grand et sur les déterminants doublement gauches. C. R. LXXXIX. 24-27, 497-498.

Es handelt sich um die Ausdrücke für die Anzahl der Glieder, welche bei der Ausrechnung einer symmetrischen oder windschiefen Determinante übrig bleiben, nach zuerst von Cayley gegebenen Sätzen (Monthly Not. XXXIV; vgl. F. d. M. VI. 1874 p. 84). Zu diesem Zwecke werden hier alle Glieder einer Determinante nach folgendem Princip eingetheilt: Man theile die n Vertikalreihen auf alle möglichen Weisen in Gruppen von Cyklen; z. B. für $n = 6$ hat man zunächst die 11 verschiedenen Gattungen:

(123456); (12345)(6); (1234)(56); (123)(456); (1234)(5)(6); (123)(45)(6); (12)(34)(56); (123)(4)(5)(6); (12)(34)(5)(6); (12)(3)(4)(5)(6); (1)(2)(3)(4)(5)(6);

durch Vertauschung entspringen dann aus diesen 11 Gattungen noch bezüglich

120, 144, 90, 40, 90, 120, 15, 40, 45, 15, 1

wesentlich verschiedene Anordnungen. Lässt man alsdann der Anordnung (1)(2)(3)(4)(5)(6) das Diagonalglied $a_{11}a_{22}\dots a_{66}$ entsprechen, so wird man den übrigen Anordnungen die Glieder entsprechen lassen, welche durch die zugleich angezeigten Vertauschungen der zweiten Indices aus dem Diagonalglied hervorgehen; also der Anordnung (12)(3)(4)(5)(6) das Glied

$$a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}a_{55}a_{66} \text{ etc.}$$

Man erhält dann 120 Glieder erster Gattung, 144 zweiter Gattung etc. Diese Eintheilung ist also dem Diagonalglied zugeordnet und ändert sich mit der Wahl desselben.

Durch diese Eintheilung findet Sylvester unmittelbar die Coefficienten der einzelnen Glieder (gewisse Potenzen von 2) bei der Berechnung symmetrischer oder windschiefer Determinanten; sowie durch Zerlegung in Unterdeterminanten nach einer Reihe auch die Differenzenformeln, nämlich, wenn u_m die Anzahl der Glieder in einer symmetrischen Determinante m^{ter} Ordnung und $u_m = 1.2.3\dots m.v_m$:

$$mv_m = mv_{m-1} - \tfrac{1}{2}v_{m-3}.$$

Für die windschiefe Determinante $2m^{\text{ter}}$ Ordnung, mit den Diagonalelementen 0, wird, wenn u_{2m} die Anzahl der Glieder und $u_{2m} = 1.3.5 \dots (2m-1) = \omega_m$:

$$\omega_m = (2m-1)\omega_{m-1} - (m-1)\omega_{m-2}, \quad \omega_1 = 1, \quad \omega_2 = 2.$$

Hiernach wird $\dfrac{\omega_m}{2.4 \dots 2m}$ der Coefficient von t^m in der Entwickelung nach aufsteigenden Potenzen von $\dfrac{e^{\frac{1}{2}t}}{(1-t)^{\frac{1}{2}}}$.

Der zweite Theil des ersten Aufsatzes enthält Betrachtungen über die gemeinsamen Factoren der Zahlen ω_m; sodann über den mittleren Werth der Coefficienten in der Entwickelung solcher Determinanten für $\lim m = \infty$. Dieser Werth kann aus ω_m bestimmt werden, da man auch die Summe der Coefficienten als Functionen von m kennt. Es wird, nach den Noten in den C. R., der mittlere Werth bei windschiefer Determinante von der Ordnung $2m$ für grosse m zu

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{4})}{\sqrt{\pi}} \cdot \left(\frac{2m}{e}\right)^{\frac{1}{4}},$$

bei symmetrischer Determinante von der Ordnung m für grosse m zu

$$e^{-\frac{3}{4}} \sqrt{\pi m}.$$

Unter „doppelt windschief“ sind solche Determinanten verstanden, die in Bezug auf beide Diagonalen windschief sind. Soll eine solche nicht Null sein, so muss ihre Ordnung durch 4 theilbar sein.

Nr.

J. Stodockiewicz. Beweis der zur Berechnung der Anzahl verschiedener Glieder einer symmetrischen Determinante dienenden Cayley'schen Formel. Warsch. Jahrb. 1879 (Polnisch).

In der Arbeit: „On the number of distinct terms in a symmetrical or partially symmetrical determinant (in Monthly Not. of the Astronomical Society) hat Herr Cayley einen Beweis der genannten Formel gegeben, welchen Salmon und Fiedler in ihren Werken aufgenommen haben. Dieser Beweis aber ist

wenig elementar, und Herr Stodockiewicz ersetzt ihn durch einen rein algebraischen, ganz auf elementaren Eigenschaften der Determinanten sich stützenden Beweis.

Bcki.

J. J. Sylvester. Note on continuants. Messenger (2) VIII. 187-189.

Untersuchung über die Anzahl der Glieder in der Gattung von Determinanten, die „Continuanten" oder „Cumulanten" genannt werden. Die Anzahl der Glieder in solcher Determinante n^{ter} Ordnung ist

$$1+(n-1)+\frac{(n-2)(n-3)}{1.2}+\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1.2.3}+\cdots.$$

Glr. (O.)

J. J. Sylvester. Sur un déterminant symétrique qui comprend comme cas particulier la première partie de l'équation séculaire. Borchardt J. LXXXVIII. 6-10.

Die Elemente der Determinante D seien rationale ganze Functionen einer Grösse λ; a, b, c, ... mögen die von λ unabhängigen Glieder der in der Hauptdiagonale befindlichen Elemente sein. Dann ist die Verschlingung von D in Bezug auf $\frac{\partial D}{\partial a}$ gleich der von D in Bezug auf $\frac{\partial D}{\partial b}$, auf $\frac{\partial D}{\partial c}$, u. s. w. hinsichtlich des Schneidens mit $\lambda = 0$. Sind alle Elemente von D linear in λ mit positiven ersten Coefficienten, so hat $D = 0$ nur reelle Wurzeln.

No.

J. J. Sylvester. Sur une propriété arithmétique d'une certaine série de nombres entiers. C.R. LXXXVIII. 1297-1298.

Die Anzahl der verschiedenen Glieder in der Entwickelung einer schiefen Determinante heisse ihr „Denumerant". Es sei

$$[1.3.5\ldots(2n-1)]\,u_n$$

der Denumerant einer schiefen Determinante der Ordnung $2n$.

Dann sind $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, \ldots$ resp.

$$= 1, 2, 8, 50, 418, 4348, \ldots$$

und allgemein ist

$$u_x = (2x-1)\,u_{x-1} - (x-1)\,u_{x-2}.$$

Nun lässt sich zeigen, dass der grösste gemeinschaftliche Theiler für u_x und u_{x+1} gleich ist

$$2^{\vartheta\left(\frac{2x+1}{8}\right)},$$

wo $\vartheta\left(\frac{2x+1}{8}\right)$ die dem Bruche $\frac{2x+1}{8}$ nächste ganze Zahl ist.

M.

R. F. Scott. On some symmetrical forms of determinants. Messenger (2) VIII. 131-138, 145-150.

Auswerthung einer Anzahl von Determinanten, wie z. B.

$$\begin{vmatrix} c, & a, & c, & c, & c, \ldots \\ b, & c, & a, & c, & c, \ldots \\ c, & b, & c, & a, & c, \ldots \\ c, & c, & b, & c, & a, \ldots \\ c, & c, & c, & b, & c, \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \;\; \ldots \end{vmatrix},$$

in der alle Elemente gleich c sind, mit Ausnahme der auf beiden Seiten der Hauptdiagonale. Zahlreiche Beispiele für specielle Fälle sind angeführt.

Glr. (O.)

S. Hertzsprung. Lösning og Udvidelse af Opgave 402. Zeuthen Tidsskr. (4) III. 134-140.

Die Anzahl der Glieder einer Determinante, die keine Elemente der einen Diagonalreihe enthält, ist

$$\varpi_n = n!\left(1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right).$$

Neben diesem als Aufgabe gestellten Problem löst der Verfasser auch noch das weit schwierigere, die Anzahl der Glieder, welche von den beiden Diagonalreihen keine Elemente enthalten, zu bestimmen. Die Lösung ist folgende: Ist

$$Q_n^{n,v} = \varpi_n - v_1\varpi_{n-2} + v_2\varpi_{n-4} - \cdots,$$
$$K_{2m}^{m,v} = 2^{m-2v}\frac{m!}{|v|^2(m-2v)!},$$

wo v_1, v_2 ... Binomialcoefficienten bezeichnen, dann wird die gesuchte Zahl

$$\Pi_{2m} = \Sigma_v K_{2m}^{m,v}(Q_m^{m,v})^2,$$
$$\Pi_{2m+1} = 2\Sigma_v K_{2m}^{m,v} Q_m^{m,v} Q_{m+1}^{m+1,v}.$$

Für die Π gelten die folgenden Reductionsformeln

$$\Pi_{2m} = (2m-1)\Pi_{2m-1} + 2(2m-2)\Pi_{2m-4},$$
$$\Pi_{2m+1} = 2m\,\Pi_{2m} + 4m\,\Pi_{2m-1},$$

sowie

$$\varpi_n = (n-1)(\varpi_{n-1} + \varpi_{n-2}).$$

Gm.

J. D. H. Dickson. Discussion of two double series arising from the number of terms in determinants of certain forms. Proc. L. M. S. X. 120-122.

Ist $u_{n,r}$ die Anzahl der nicht verschwindenden Glieder einer Determinante von n^2 Elementen, in welcher alle Glieder einer Diagonale von r Elementen gleich Null sind, so wird

$$u_{n,r} = (n-r)u_{n-1,r-1} + (r-1)u_{n-1,r-2}$$
$$= u_{n,r+1} + u_{n-1,r}.$$

Sind alle Glieder zweier auf einander folgender Diagonalen von r und $r-1$ Elementen gleich Null, so gilt für die entsprechende Anzahl $v_{n,r}$ die Recursionsformel

$$v_{n,r} = v_{n,r+1} + 2v_{n-1,r} + v_{n-2,r-1}.$$

No.

Simonnet. Sur les conditions de l'existence d'un nombre déterminé de racines communes à deux équations données. C. R. LXXXVIII. 223-224.

Die bei der Aufsuchung des grössten gemeinsamen Theilers auftretenden Reste werden in Determinantenform dargestellt. Zur Berechnung dient folgender Satz:

Sind

$$A = | a_{\varkappa\lambda} | \quad (\varkappa,\lambda = 1 \ldots m), \qquad m > n$$
$$B = | b_{\mu\nu} | \quad (\mu,\nu = 1 \ldots n),$$

zwei Determinanten, dann ist

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial A}{\partial a_{ir}} B_{ik} = A \frac{\partial B}{\partial b_{kr}},$$

wenn mit B_{ik} die Determinante bezeichnet wird, welche aus B dadurch entsteht, dass die k^{te} Zeile derselben durch die n ersten Elemente der i^{ten} Zeile von A ersetzt wird. No.

L. Crocchi. Sopra le funzioni aleph ed il determinante di Cauchy. Battaglini G. XVII. 218-231.

Functionen „Aleph" heissen diejenigen ganzen symmetrischen Functionen der Zahlen $x_1, x_2 \ldots x_n$, welche aus

$$(x_1 + x_2 + \cdots x_n)^{\omega},$$

ω ganze positive Zahl, hervorgehen, indem alle numerischen Coefficienten der Entwickelung durch die Einheit ersetzt werden. Trudi drückte durch sie den Quotienten aus der Determinante

$$\left| x_r^{p_s} \right| \qquad \begin{matrix} r \\ s \end{matrix} \Big\} = 1, 2 \ldots n$$

und der Cauchy'schen Determinante aus (Battaglini G. III.). Hier wird gezeigt, dass die Functionaldeterminante der ersten n Functionen „Aleph" gleich ist der Determinante von Cauchy:

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & \ldots & 1 \\ x_1, & x_2, & \ldots & x_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{n-1}, & x_2^{n-1}, & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

St.

S. Günther. Eine Relation zwischen Potenzen und Determinanten. Schlömilch Z. XXIV. 244-248.

Die Discriminante der ganzen Function

$$x^{m+1} + x^m + x^{m-1} + \cdots + x^2 + x + 1$$

ist $(m+2)^m$. St.

P. Mansion. On rational functional determinants.
Messenger (2) IX. 30-32.

Werthe der Determinanten

$$\begin{vmatrix} \alpha^m, & \alpha^n, & \alpha^p \\ \beta^m, & \beta^n, & \beta^p \\ \gamma^m, & \gamma^n, & \gamma^p \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \varphi(\alpha), & \psi(\alpha), & \chi(\alpha) \\ \varphi(\beta), & \psi(\beta), & \chi(\beta) \\ \varphi(\gamma), & \psi(\gamma), & \chi(\gamma) \end{vmatrix},$$

wo α, β, γ die Wurzeln der Gleichung

$$a+bx+cx^2+dx^3 = 0$$

und

$$\varphi(x) = A_0+A_1x+A_2x^2+\cdots A_6x^6,$$
$$\psi(x) = B_0+\cdots+B_6x^6,$$
$$\chi(x) = C_0+\cdots C_6x^6$$

sind, nebst Verallgemeinerungen. Glr. (O.)

H. C. Robson, G. Torelli. Solutions of a question (6025). Educ. Times XXXII. 49.

Beweis, dass die beiden Determinanten:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a-b \\ x & ay & a(1-b)z \\ b(1-x) & 1-y & (a-1)bz \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} 2x-1 & 2y-1 & (a-b)(2z-1) \\ x & ay & a(1-b)z \\ b(x-1) & y-1 & (a-1)bz \end{vmatrix}$$

identisch gleich sind. O.

G. Dostor. Évaluation d'un certain déterminant.
Grunert Arch. LXIV. 57-59.

Ist

$$a_1+a_2+\cdots+a_n = 2A,\ b_1+b_2+\cdots+b_n = 2B, \cdots k_1+k_2+\cdots+k_n = 2K,$$

so hat man

$$\begin{vmatrix} 2A-2a_1, & 2B-2b_1, & \ldots & 2K-2k_1 \\ 2A-2a_2, & 2B-2b_2, & \ldots & 2K-2k_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2A-2a_n, & 2B-2b_n, & \ldots & 2K-2k_n \end{vmatrix} = (n-2)(-2)^{n-1} \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & \ldots & k_1 \\ a_2, & b_2, & \ldots & k_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n, & b_n, & \ldots & k_n \end{vmatrix}.$$

St.

S. Roberts. Note on certain determinants connected with algebraical expressions having the same form as their component factors. Messenger (2) VIII. 138-140.

Der Verfasser bemerkt, dass

$$\begin{vmatrix} x, & ax_1, & bx_2, & abx_3 \\ -x_1, & x, & -bx_3, & bx_2 \\ -x_2, & ax_3, & x, & -ax_1 \\ -x_3, & -x_2, & x_1, & x \end{vmatrix} = (x^2+ax_1^2+bx_2^2+abx_3^2)^2,$$

und giebt die entsprechende Determinante achter Ordnung, welche gleich

$$(x^2+ax_1^2+abx_2^2+bx_3^2+acx_4^2+cx_5^2+bcx_6^2+abcx_7^2)^4$$

ist.

Glr. (O.)

R. F. Scott. Note on a theorem of Prof. Cayley's. Messenger (2) VIII. 155-157.

Enthält erstens den Beweis, dass

$$\begin{vmatrix} \sin(a+f)\sin(b+f)\sin(c+f), & \cos f, & \sin f \\ \sin(a+g)\sin(b+g)\sin(c+g), & \cos g, & \sin g \\ \sin(a+h)\sin(b+h)\sin(c+h), & \cos h, & \sin h \end{vmatrix}$$

$$= \sin(g-h)\sin(h-f)\sin(f-g)\sin(a+b+c+f+g+h),$$

und zweitens die Auswerthung von

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 1 \\ \cos A, & \cos B, & \cos C, & \cos D \\ \sin A, & \sin B, & \sin C, & \sin D \\ \sin 3A, & \sin 3B, & \sin 3C, & \sin 3D \end{vmatrix}$$

und anderer ähnlicher trigonometrischer Determinanten durch eine specielle Methode.

Glr. (O.)

R. F. Scott. Notes on determinants. Messenger (2) VIII. 182-187.

Auswerthung einiger Determinanten, wie

$$\begin{vmatrix} \sin a_1, & \sin a_2, \ldots & \sin a_{2n} \\ \cos a_1, & \cos a_2, \ldots & \cos a_{2n} \\ \sin 2a_1, & \sin 2a_2, \ldots & \sin 2a_{2n} \\ \cos 2a_1, & \cos 2a_2, \ldots & \cos 2a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \sin na_1, & \sin na_2, \ldots & \sin na_{2n} \\ \cos na_1, & \cos na_2, \ldots & \cos na_{2n} \end{vmatrix}.$$

Glr. (O.)

H. Lemonnier. Calcul d'un déterminant. Bull. S. M. F. VII. 175-177, Nouv. Ann. (2) XVIII. 518-524.

Die Determinante

$$| p+(\varkappa+\lambda-1)q | \qquad (\varkappa,\ \lambda = 1, \ldots n),$$

in der $\varkappa+\lambda-1$ auf seinen kleinsten positiven Rest mod. n zu reduciren ist, hat den Werth

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} q^n \left\{ n\frac{p}{q} + \frac{n(n+1)}{2} \right\} n^{n-2}.$$

No.

J. W. L. Glaisher. Theorem in algebra. Messenger (2) VIII. 140-144.

I. Wenn $a^2+c^2-2bd = 1$ und $b^2+d^2-2ac = 0$, so ist

$$\begin{vmatrix} a, & b, & c, & d \\ d, & a, & b, & c \\ c, & d, & a, & b \\ b, & c, & d, & a \end{vmatrix} = 1,$$

und in dieser Determinante ist das r^{te} Element in der ersten Reihe $= (-1)^{r+1}$ mal dem Minor des r^{ten} Elementes in der ersten Colonne. Der entsprechende Satz für $2n$ Buchstaben wird ebenfalls aufgestellt.

II. Wenn a, b, c, a', b', c', sechs beliebige Grössen sind, so ist

$$(2a+b+c-b'+c')^2+(a+2b+c+a'-c')^2+(a+b+2c-a'+b')^2$$
$$+(b-c+2a'-b'-c')^2+(-a+c-a'+b'-c')^2+(a-b-a'-b'+2c')^2$$
$$=8(a^2+b^2+c^2+a'^2+b'^2+c'^2+bc+ca+ab$$
$$+b'c+c'a+a'b-b'c'-c'a'-a'b'-bc'-ca'-ab')$$
$$=4\{(b+c+b'-c')^2+(c+a+c'-a')^2+(a+b+a'-b')^2\}.$$

Glr. (O.)

T. Muir. Preliminary note on alternants. Proc. of Edinb. 1878-79. 102-103.

Das Wort „Alternante" wird gebraucht für eine Determinante von der Form:

$$\begin{vmatrix} a^m, & a^n, & a^p \\ b^m, & b^n, & b^p \\ c^m, & c^n, & c^p \end{vmatrix}.$$

Cly. (O.)

J. D. H. Dickson. On the numerical calculation of a class of determinants and on continued fractions. Proc. L. M. S. X. 226-228.

Aus zwei Reihen von Grössen $a_1, a_2, a_3, \dots b_1, b_2, b_3, \dots$ werden die Determinanten $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \dots$ gebildet, welche bei der Kettenbruchentwickelung von

$$\frac{b_1}{a_1}\,\frac{a_1+a_2x+a_3x^2+\cdots}{b_1+b_2x+b_3x^2+\cdots}=1+k_1x|1+k_2x|1+k_3x|1+\cdots$$

auftreten; es wird $k_\alpha=\dfrac{\Delta_{\alpha-2}\Delta_{\alpha+1}}{\Delta_{\alpha-1}\Delta_\alpha}$.

No.

J. W. L. Glaisher. On a class of determinants, with a note on partition. Messenger (2) VIII. 158-167.

Fortsetzung früherer Arbeiten im Messenger (2) VI. 49-62 und VII. 160-165 (s. F. d. M. VIII. 306. 1876, X. 114. 1878.). Am Schluss der Note finden sich einige Formeln über Theilungen, welche mit den behandelten Determinanten zusammenhängen.

Glr. (O.)

Lösungen weiterer Aufgaben über Determinanten von G. S. Carr, T. R. Terry, G. Heppel finden sich Educ. Times XXXII. 54-55, 91.

O.

K. Zahradník. Beitrag zur Determinantenpraxis. Casopis VIII. 32-33. (Böhmisch).

Enthält planimetrische Anwendungen. Std.

D. Lauro Clariana y Ricart. Applicacion de los determinantes à la geometria. Cron. cient. 1879 II. 497-500.

Dritter Abschnitt.

Zahlentheorie.

Capitel 1.

Allgemeines.

K. E. HOFFMANN. Ueber die Anzahl der unter einer gegebenen Grenze liegenden Primzahlen. Grunert Arch. LXIV. 333-336.

Aus den Primzahlen, die kleiner als $\sqrt{m}$ sind, kann man alle zusammengesetzten Zahlen $< m$ berechnen, und also durch Subtraction der Anzahl derselben von m die Anzahl aller Primzahlen finden, welche $< m$ sind.

No.

J. W. L. GLAISHER. Separate enumeration of primes of the form $4n+1$ and of the form $4n+3$. Proc. of London XXIX. 192-197. Rep. Brit. Ass. 1879

Die Tafeln füllen $2\frac{1}{2}$ Seiten. Die volle Bezeichnung heisst: „Tables showing the numbers of primes of the form $4n+1$ and of the form $4n+3$ in each tenthousand of the first hundred thousand numbers of the first, second, third, fourth, seventh, eighth and ninth millions.“

Cly. (O.)

J. W. L. GLAISHER. On long successions of composite numbers. Messenger (2) IX. 54.

Siehe F. d. M. X. p. 124. 1878.

Glr. (O.)

J. W. L. Glaisher. Addition to a paper on factor tables. Proc. of Cambr. III. 228-229.

Zusatz zu des Verfassers Arbeit Proc. of. Cambr. III. 99—108. (siehe F. d. M. X. p. 128. 1878.) Glr. (O.)

James Glaisher. Factor table for the fourth million. 4°. London. Taylor and Francis.

Die Tafel, welche dieselbe Form hat, wie die Tafeln von Burckhardt für die drei ersten Millionen und die von Dase für die siebente, achte und neunte Million, enthält den kleinsten Factor jeder Zahl, die nicht durch 2, 3 oder 5 theilbar ist, zwischen 3000000 und 4000000. Voran geht eine Einleitung von 52 Seiten, getheilt in 8 Abtheilungen, deren Titel sind: 1) Art der Benutzung der Tafel, 2) Die Tafeln von Burckhardt, Dase und Chernac, 3) Methode zur Construction der Tafel, 4) Ueber Factorentafeln, 5) Ueber die Vertheilung der Primzahlen, 6) Verzeichnis von Schriften über die Vertheilung der Primzahlen, 7) Resultate der Zählung der Primzahlen in der vierten Million, 8) Anwendung der Tafel zur Berechnung von Logarithmen. Es findet sich dort auch ein Verzeichnis der Primzahlen von 1 bis 30341 mit Differenzen und ein Beispiel der Methoden, die bei der Construction der Tafeln benutzt worden sind. Glr. (O.)

Lionnet. Note sur la question: „Tout nombre pair est-il la somme des deux impairs premiers?“ Nouv. Ann. (2) XVIII. 356-361.

Zu dieser Frage, welche zuerst von Goldbach in seiner Correspondenz mit Euler angeregt wurde, führt der Verfasser einige Argumente an, welche dieselbe nicht entscheiden können, aber es im Gegensatze zu den Ansichten Euler's und Goldbach's als unwahrscheinlich erscheinen lassen, dass jede grade Zahl die Summe zweier Primzahlen sein kann. Er beweist nämlich die für jede grade Zahl $2a$ geltende Relation $x-y=p-q$, worin x und y angeben, auf wieviel verschiedene Arten $2a$ aus zwei un-

graden Primzahlen und aus zwei ungraden und ungleichen zusammengesetzten Zahlen gebildet werden kann, und wo p die Anzahl der ungraden Primzahlen unter $2a$ und q die in $\frac{a}{2}$ enthaltene grösste Zahl bedeutet. Wenn nun x für jede Zahl $2a$ grösser als Null ist, so dürfte $y+p-q$ niemals gleich Null sein.

Schl.

K. Broda. Beiträge zur Theorie der Theilbarkeit. Grunert Arch. LXIII. 413-429.

Um eine Zahl N auf die Theilbarkeit durch die Primzahl p, zu welcher eine $2n$-stellige dekadische Periode gehört, zu untersuchen, theile man N, von den Einern angefangen, in Classen zu je n Ziffern und zähle die an den graden Stellen stehenden Classenzahlen, sowie die an den ungraden zusammen. Wenn die Differenz dieser beiden Summen durch p theilbar ist, so ist es auch die Zahl N. Dieses Theilbarkeitsgesetz, sowie das bekannte Verfahren mit demProberest wird im weiteren Verlaufs der Abhandlung auf allgemeine α-ziffrige Zahlensysteme ausgedehnt.

Schl.

G. Dostor. Propriétés élémentaires des nombres. Grunert Arch. LXIII. 221-225.

Zwei nicht unbekannte Sätze über die Theilbarkeit einer Zahl durch die Factoren einer zweiten Zahl, welche von der Form $10h\pm1$ ist.

Schl.

S. Réalis. Questions d'analyse numérique. N. C. M. V. 433-435.

Quadratische Formen von Primzahlen äquivalent $8p+1$, $12p+1$, $24p+1$.

Mn. (O.)

P. Mansion. Remarques sur les théorèmes arithmétiques de Fermat. N. C. M. V. 88-91, 122-125.

Notiz über die Beweise der 4 berühmtesten Sätze Fermat's. Der Verfasser sucht zu erklären, wie Gauss zu der Ansicht gekommen, dass Fermat keine wirklichen Beweise für dieselben hatte. Fermat hat 1640 und 1654 bereits selber erklärt, dass es ihm nicht gelungen sei zu beweisen, dass $2^k+1 (k = 2^n)$ immer eine Primzahl sei. Siehe auch p. 17. Mn. (O.)

LIONNET. Note sur les nombres parfaits. Nouv. Ann. (2) XVIII. 306-308.

Der Verfasser versteht unter vollkommenen Zahlen erster Art diejenigen, welche gleich der Summe ihrer Submultiplen sind. Als solche zweiter Art werden die bezeichnet, bei denen das Product an die Stelle der Summe tritt. Ueber beide Arten werden einige Sätze hergeleitet. O.

R. PENDLEBURY. On Euclid's numbers. Messenger (2) IX. 54.

Wenn 1, 2, 3, ... n die Primzahlen bis n sind, dann werden Zahlen von der Form $1.2.3....(n+1)$ vom Verfasser als Euklidische Zahlen bezeichnet. Glr. (O.)

J. A. MCLELLAN. Mental arithmetic. VII. Canada School-Journ. IV. 133-134.

Ein Abschnitt aus der elementaren Zahlenlehre. Schl.

BADOUREAU. Divisibilité par 19. Nouv. Ann. (2) XVIII. 35-36.

Herleitung einer Regel über die Theilbarkeit durch 19. O.

W. ŠIMERKA. Zahlentheoretische Notiz. Casopis VIII. 187-188. (Böhmisch).

Enthält einen einfachen Beweis, dass die Zahl

$$d = 114689 = 7.2^{14}+1$$

einen Theiler der Zahl $2^{2^n}+1$ und die Zahl

$$d = 167772161 = 5 \cdot 2^{25}+1$$

einen Theiler der Zahl $2^{2^n}+1$ vorstellt, welche Untersuchung durch die in Russland durch Pervouchine veranlasste Meldung angeregt wurde. Siehe F. d. M. X. p. 127. 1878. Std.

L. H. Bie. Pröve af Kunsten at danne Regneopgaver, hvis Resultater ere Läreren bekjendte. Zeuthen Tidsskr. (4) III. 131-134.

Der Verfasser zeigt, wie man durch geschickte Verwendung von Eigenschaften der Zahlen 10^n-1 Rechnungsaufgaben bilden kann, deren Resultate dem Lehrer augenblicklich ersichtlich sind.

Gm.

C. A. Laisant et Beaujeux. Quelques conséquences des théorèmes de Fermat et de Wilson. N. C. M. V. 156-160, 177-182.

Es sei p eine Primzahl und q eine ganze Zahl $< p-1$. Dann ist

$$1.2.3 \dots q \times 1.2.3 \dots (p-q-1) \pm 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Der Satz ist leicht durch den Schluss von n auf $n+1$ zu beweisen. Folgerungen. Mn. (O.)

G. de Rocquigny. Recherche sur le symbol φ. Mondes (2) XLVIII. 327.

φ hat die bekannte zahlentheoretische Bedeutung. Es werden einige elementare bekannte Eigenschaften desselben abgeleitet.

O.

W. Jung. Beitrag zur Zahlentheorie. Casopis VIII. 184-185. (Böhmisch).

Behandelt Erleichterungen bei gewöhnlichen Restbildungen.

Std.

A. J. M. Brogtrop. Iets over het aantal cyfers in Repetendums. Nieuw Arch. V. 203-204.

Einige Bemerkungen über die Anzahl von Ziffern in periodischen Decimalbrüchen. G.

J. W. L. Glaisher. On circulating decimals with special reference to Henry Goodwyn's „Table of circles" and „Tabular series of decimal quotients". (London 1818-1823). Proc. of Cambr. III. 185-206.

Der erste Theil dieser Arbeit ist der Aufstellung von Regeln gewidmet über die Verwandlung gewöhnlicher Brüche in Decimalbrüche, über die Stellenzahl in den Perioden etc. Es folgt der Bericht über die seltenen Werke von Henry Goodwyn über Decimalbrüche. Die wichtigsten derselben sind die: „Table of circles" und „Tabular series". In dem ersteren befinden sich alle Perioden (oder Cirkel), die jedem Primzahlnenner von 10 bis zu 1024 entsprechen, das heisst also z. B., alle die verschiedenen Perioden von Brüchen, die 41 als Nenner haben. Die „Tabular series" enthalten die ersten acht oder mehr Stellen des Decimalbruches, der äquivalent ist dem gewöhnlichen Bruche, dessen Zähler und Nenner (in kleinsten Zahlen) beide nicht grösser sind als 1000 von $\frac{1}{1000}$ bis $\frac{99}{991}$, nach der Grösse geordnet. Der übrige Theil der Arbeit bezieht sich auf verschiedene Untersuchungen und auf Tafeln von Goodwyn, Burckhardt, Reuschle, Desmarets, Gauss, Saffield, Lunn, Salmon, Shanks und Anderen, die mit den Perioden von Decimalbrüchen zusammenhängen. Es werden noch die vollständigen Perioden von $\frac{1}{487}$ und $(\frac{1}{487})^2$ gegeben, deren jede 486 Stellen enthält. Am Ende findet sich eine Tafel mit der Anzahl der Stellen in den Perioden der Brüche, deren Nenner die Primzahlen von 10 bis 1024 sind. Die Tafel wurde hergestellt unter Benutzung von Goodwyn's „Table of circles".

Glr. (O.)

C. A. Laisant. Remarques sur les fractions périodiques. Mém. de Bord. (2) III. 213-235.

Die vorliegende Abhandlung ist die Fortsetzung und Ergänzung zweier früherer Arbeiten des Verfassers über denselben Gegenstand, welche in den Nouv. Ann. (2) VII. und IX. unter dem Titel: „De quelques propriétés des fonctions périodiques", und „Mémoire sur certaines propriétés des résidus numériques", veröffentlicht sind.

Schl.

D. Demeczky de Gyergioszentmiklos. Résolution des systèmes de congruences linéaires. C. R. LXXXVIII. 1311-1313.

Ein System von n linearen Congruenzen

$$a_{\varrho,1}x_1+a_{\varrho,2}x_2+\cdots+a_{\varrho,n}x_n\equiv u_\varrho \pmod m,\quad (\varrho=1,2,\dots n)$$

besitzt im allgemeinsten Falle δ^ν verschiedene Lösungen; δ ist der grösste gemeinschaftliche Factor der Zahl m mit der Determinante $D=(a_{1,1}\ a_{2,2}\dots a_{n,n})$; der Exponent ν ist durch die Bedingung bestimmt, dass unter den Unterdeterminanten der $(n-\nu)^{\text{ten}}$ Ordnung mindestens eine sich vorfindet, welche nicht mehr $\equiv 0$ mod. δ ist, während die Minoren der höheren Ordnungen noch sämmtlich $\equiv 0$ mod. δ sind.

Schl.

L. Matthiessen. Antike Auflösung des sogenannten Restproblems in moderner Darstellung. Hoffmann Z. X. 106-110.

Darstellung und Ableitung der altchinesischen Tayen-Regel, welche die Lösung des Systems

$$N=m_1x_1+r_1=m_2x_2+r_2=\cdots$$

liefert. Die von v. Schäwen gegebene Lösung stimmt fast genau mit der hier behandelten überein. (Vgl. F. d. M. X. 140. 1878).

No.

W. Serdobinsky. Zur numerischen Algebra. Lösung der Gleichung $Ax+B=\varphi(Cx+D)$. Mosk. Math. Samml. IX. 3. Lief. 557-564.

$\varphi(n)$ bezeichnet die Anzahl der zu n relativen Primzahlen, die kleiner als n sind. P.

Lösungen weiterer Aufgaben und Lehrsätze über Congruenzen und Theilbarkeit von Zahlen von R. Tucker, W. J. Macdonald, W. A. Whitworth, G. Hopkins, W. H. Walenn, G. Heppel, G. Turriff, Kniseley, R. E. Riley, Romero finden sich Educ. Times XXXI. 56, 67-69, 69-70; XXXII. 28, 69-70, 81; Nouv. Ann. (2) XVIII. 328. O.

Chr. Zeller. Bestimmung des quadratischen Restcharakters durch Kettenbruchdivision. Versuch einer Ergänzung zum dritten und fünften Beweise des Gauss'schen Fundamentaltheorems. Gött. Nachr. 1879. 197-216.

Gauss benutzt in seinem zweiten Beweise des Reciprocitätsgesetzes gewisse Zahlen, welche zu den kleinsten Resten der Zahlen 1, 2, ... $\frac{ap-1}{2}$ nach den Moduln p und a in Beziehung stehen: doch gebraucht er lediglich ihren Werth mod. 2, nicht ihren Zahlenwerth. Diesen bestimmt Herr Zeller durch Kettenbruchentwickelung von $\frac{a}{p}$, indem er alle fraglichen Zahlenwerthe durch zwei Grössen ϱ', ϱ'' ausdrückt. Abgesehen von gewissen Modificationen lassen sich ϱ' als Summe der ungradstelligen, ϱ'' als Summe der gradstelligen Quotienten der Kettenbruchentwickelung bezeichnen. No.

G. Meyer. Zur Theorie der quadratischen und kubischen Reste. Diss. Göttingen. Grunert Arch. LXIII. 1-50.

Ist p eine Primzahl, und werden die quadratischen Reste mod. p

mit α_1, $\alpha_2, \ldots$, die quadratischen Nichtreste mit β_1, $\beta_2, \ldots$ bezeichnet, dann kann eine Summe aus m Resten α entweder congruent 0 (mod. p) werden, oder einem Reste α, oder endlich einem Nichtreste β congruent. Die Zahl u gebe an, wie oft der erstere Fall eintritt, v, w wie oft jeder Rest, bezüglich jeder Nichtrest erscheint. Die Abhandlung beschäftigt sich mit der Bestimmung von u, v, w für $m = 3, 4, 5$. Zu unterscheiden ist, ob ein Rest nur einmal oder ob er mehrere Male in die Summe eingehen darf. Erweitert wird die Fragestellung dadurch, dass man auch negative Summanden zulässt. Am Schlusse wird die Behandlung von kubischen Resten bei Combinationen zur zweiten und dritten Classe gegeben. No.

E. Schering. Neuer Beweis des Reciprocitätssatzes für die quadratischen Reste. Gött. Nachr. 1879. 217-224.

E. Schering. Nouvelle démonstration de la loi de réciprocité dans la théorie des résidus quadratiques. C. R. LXXXVIII. 1073-1075.

Unter $\mathfrak{AB}(x)$ werde der absolut kleinste Bruchrest der Grösse x verstanden, unter

$$\mathfrak{Anz.}_{\mu,\nu}\,\mathfrak{Pos.}\,F(\mu,\nu,\ldots),\quad \mathfrak{Anz.}_{\mu,\nu}\,\mathfrak{Neg.}\,F(\mu,\nu,\ldots)$$

die Anzahl der positiven, bez. der negativen Werthe von $F(\mu,\nu,\ldots)$, wenn die Argumente μ, ν gegebene Zahlenreihen durchlaufen. Die Gauss'sche für den quadratischen Charakter von n nach m charakteristische Zahl ist dann

$$\mathfrak{Anz.}_{\mu}\,\mathfrak{Neg.}\,\mathfrak{AB}\frac{\mu n}{m},\quad \mu = 1,\ 2,\ 3\ldots\frac{m-1}{2};$$

dies lässt sich umsetzen in

$$\mathfrak{Anz.}_{\mu,\nu}\,\mathfrak{Pos.}\left(\frac{\mu n}{m}+\tfrac{1}{2}-\nu\right)-\mathfrak{Anz.}_{\mu,\nu}\,\mathfrak{Pos.}\left(\frac{\mu n}{m}-\nu\right)$$

$$=\mathfrak{Anz.}_{\mu,\nu}\,\mathfrak{Pos.}\left(\frac{\mu}{m}+\frac{\nu}{n}-\tfrac{1}{2}\right)-\mathfrak{Anz.}_{\mu,\nu}\,\mathfrak{Pos.}\left(\frac{\mu}{m}-\frac{\nu}{n}\right)$$

$$\left(\mu = 1,\ 2,\ 3,\ldots\frac{m-1}{2},\quad \nu = 1,\ 2,\ 3,\ldots\frac{n-1}{2}\right).$$

Durch Vertauschung von m und n, Addition, und unter Beachtung von

$$\mathfrak{Anz.}_{\mu,\nu}\,\mathfrak{Pos.}\left(\frac{\mu}{m}-\frac{\nu}{n}\right)+\mathfrak{Anz.}_{\mu,\nu}\,\mathfrak{Pos.}\left(\frac{\nu}{n}-\frac{\mu}{m}\right)=\frac{m-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}$$

folgt dann die Gleichung

$$\mathfrak{Anz.}_{\mu}\,\mathfrak{Reg.}\,\mathfrak{AB}\,\frac{\mu n}{m}+\mathfrak{Anz.}_{\nu}\,\mathfrak{Reg.}\,\mathfrak{AB}\,\frac{\nu m}{n}$$
$$=2\mathfrak{Anz.}_{\mu,\nu}\,\mathfrak{Pos.}\left(\frac{\mu}{m}+\frac{\nu}{n}-\frac{1}{2}\right)-\frac{m-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2},$$

in welcher der Beweis des Reciprocitätsgesetzes enthalten ist.

No.

J. Petersen. Reciprocitetssätningen. Zeuthen Tidsskr. (4) III. 86-90.

Ein neuer Beweis des erweiterten Reciprocitätssatzes, welcher an Einfachheit und Natürlichkeit gewiss alle bisher bekannten übertrifft. Es seien a und b ungrade relative Primzahlen und $b>a$. Die Zahlen $a, 3a, 5a \dots (b-2)a$ geben dann bei der Division mit b als Reste alle ungraden Zahlen $<b$, aber mit verschiedenen Vorzeichen, und es ist $\left(\frac{a}{b}\right)=\pm 1$, je nachdem die Anzahl der negativen Reste grade oder ungrade ist. Von diesen Resten werden diejenigen, welche kleiner als a sind, eben $\left(\frac{b}{a}\right)$ bestimmen. Man hat also nur zu untersuchen, wie viele negative Reste sich unter denjenigen befinden, deren numerische Werthe zwischen a und b liegen. Die gesuchte Anzahl ergiebt sich ohne Schwierigkeit als gleich der Anzahl von Gliedern in der Reihe

$$\frac{b}{a},\ \frac{2b}{a},\ \frac{3b}{a}\dots\frac{(\alpha-1)b}{a},\quad \left(\alpha=\frac{b-a}{2}\right),$$

deren nächste kleinere ganze Zahl ungrade ist. Da diese Anzahl sich leicht bestimmen lässt, erhält man hieraus den Satz bewiesen für ungrade a und b. Der Fall, wo eine dieser Zahlen grade ist, reducirt sich auf die Untersuchung von $\left(\frac{2}{a}\right)$, was sich bei Be-

trachtung der Reste von 1.2, 3.2, 5.2 sofort bewerkstelligen lässt.

Gm.

J. Petersen. A new proof of the theorem of reciprocity. Am. J. II. 285-287.

Es seien a und $b > a$ zwei ungrade Primzahlen; bildet man

$$ka - 2mb = r \quad \text{für} \quad k = 1, 3, 5, \ldots b-2$$

und ein solches m, dass r seinen absolut kleinsten Werth hat, so ist die Anzahl der negativen r grade oder ungrade, je nachdem $\left(\frac{a}{b}\right) = +1$ oder $= -1$ wird. Umgekehrt wird $\left(\frac{b}{a}\right)$ durch die in dem obigen Systeme enthaltenen Gleichungen

$$(a-2m)b - (b-k)a = r \quad \text{für} \quad 2m = 2, 4, \ldots a-1$$

bestimmt; der Ueberschuss der negativen Reste der ersten Reihe über die der zweiten ist folglich gleich der Anzahl der Systeme k, m, welche $-b < r = ka - 2mb < -a$ liefern, oder für $a = b - 2\alpha$ gleich der Anzahl derjenigen Brüche der Reihe

$$\frac{b}{\alpha}, \quad \frac{2b}{\alpha}, \quad \ldots \frac{(\alpha-1)b}{\alpha},$$

für welche die nächst kleinere ganze Zahl ungrade ist. Für ein grades α ist diese Anzahl grade, für ein ungrades hängt sie vom mittleren Bruche $\frac{1}{2}b$ ab. Hieraus folgt

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{a}\right) = (-1)^{\frac{a-1}{2}\frac{b-1}{2}}.$$

Siehe das vorstehende Referat.

No.

E. Lucas. Sur les propriétés caractéristiques des nombres 5 et 7. Nouv. Ann. (2) XVIII. 74-77.

Zusammenhang der beiden Theoreme: „5 ist die einzige Zahl der Form $x^2 + (x+1)^2$, deren Quadrat von gleicher Form $y^2 + (y+1)^2$ ist.“ „7 ist die einzige Zahl der Form $2u^2 - 1$, deren Quadrat von gleicher Form $2v^2 - 1$ ist.“

No.

S. Günther. Beitrag zur Theorie der congruenten Zahlen. Prag. Ber. 1878. 289-295.

Ableitung einer einfachen und sicheren Methode zur Untersuchung, ob

$$x^2+a=y^2, \quad x^2-a=z^2$$

für ein gegebenes a rationale Lösungen zulässt. No.

E. C. Une propriété du nombre 365. N. C. M. V. 325.

$$365 = 10^2+11^2+12^2 = 13^2+14^2.$$

Mn.

J. M. de Tilly. Correspondance. N. C. M. V. 437-448.

Herr Tilly zeigt, dass die obige Eigenschaft der Zahl 365 nur ein specieller Fall ist von

$$x^2+(x+1)^2+\cdots+(x+y)^2 = (x+y+z)^2+\cdots+(x+2y+z-1)^2,$$

wenn

$$x = y(y+z-1)\pm\sqrt{y(y+1)(y+z-1)(y+z)}$$

eine rationale Zahl ist. Mn. (O.)

S. Réalis. Développements sur quelques théorèmes d'arithmétique. Nouv. Ann. (2) XVIII. 500-509.

Die Arbeit enthält Erörterungen, welche der Verfasser als Scholien bezeichnet, zu den bekannten Sätzen über die Zerlegung der Zahlen in die Summe von zwei, drei und vier Quadraten. Die ohne Beweis gegebenen, mit numerischen Beispielen reichlich versehenen Betrachtungen knüpfen an gewisse algebraische Identitäten an, von welchen die einfachste hier mitgetheilt werden mag:

$$[\alpha^2+\beta^2-\gamma^2]^2+[(\gamma-\alpha)^2+(\gamma-\beta)^2-\gamma^2]^2$$
$$=[\alpha^2+(\alpha-\gamma)^2-(\alpha-\beta)^2]^2+[\beta^2+(\beta-\gamma)^2-(\beta-\alpha)^2]^2.$$

Schl.

— — Quelques identités. N. C. M. V. 91-93.

1) Das Product zweier Zahlen in ihre Summe kann kein Cubus sein. 2) Wenn eine grade Zahl die Summe dreier Quadrate ist, ist sie in vier Quadrate zerlegbar.

$$3)\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} = n_1-\frac{1}{2}n_2+\frac{1}{3}n_3\ldots-(-1)^n n_n.$$

4) Wenn $2p = a+b+c$, so ist

$$a^2+b^2+c^2 = p^2+(p-a)^2+(p-b)^2+(p-c)^2.$$

Geometrische Anwendungen. Mn. (O.)

E. Lucas. Sur l'analyse indéterminée biquadratique. N. C. M. V. 183-186.

Es sei die unbestimmte Gleichung $y^2 = f(x)$ in rationalen Zahlen aufzulösen, wo $f(x)$ eine Function vierten Grades mit rationalen Coefficienten ist. Man setze $y\varphi(x) = F(x)$, wo φ vom Grade p und x^p die Einheit zum Coefficienten hat, $F(x)$ vom Grade $p+2$ ist. Es muss dann sein: $F(x)^2 = f(x)\,\varphi(x)^2$, eine Gleichung vom Grade $2p+4$, die $2p+3$ unbekannte Coefficienten hat. Wenn man $2p+3$ rationale Lösungen von $y^2 = f(x)$ kennt, kann die Gleichung vom Grade $2p+4$ dazu dienen, eine weitere zu finden.

Mn. (O.)

Th. Pepin. Sur quelques équations indéterminées du second degré et du quatrième. Acc. P. N. L. XXXII. 79-128.

Th. Pepin. Sur la réduction d'une formule biquadratique à un carré. Acc. P. N. L. XXXII. 166-202.

Das Referat über diese beiden Arbeiten wird in Zusammenhang mit andern Arbeiten des Verfassers über ähnliche Gegenstände im nächsten Bande erfolgen. O.

S. Günther. Ueber die unbestimmte Gleichung $x^3+y^3 = a^3$. Prag. Ber. 1878. 112-120.

Versuch, die Unmöglichkeit der rationalen Lösbarkeit von $x^3+y^3=a^3$ einfach darzuthun.
No.

E. Lucas. Sur l'analyse indéterminée du troisième degré. Démonstration de plusieurs théorèmes de M. Sylvester. Am. J. II. 178-186.

$f(x, y, z) = 0$ sei als Curve dritten Grades in homogenen Coordinaten aufgefasst; x_1, y_1, z_1 ein Punkt derselben mit rationalen Coordinaten. Die Tangente in x_1, y_1, z_1 liefert beim Durchschnitt mit $f=0$ einen zweiten Punkt mit rationalen Coordinaten. Ist x_2, y_2, z_2 eine zweite rationale Lösung von $f=0$, so liefert der Schnittpunkt der Geraden, welche durch jene beiden Punkte bestimmt ist, eine dritte, ebenso der durch fünf rationale Lösungen bestimmte Kegelschnitt eine sechste beim Schnitte mit $f=0$. Vgl. F. d. M. X. 147. 1878.
No.

Th. Pepin. Étude sur quelques questions d'arithmétique supérieure. Acc. P. N. L. XXXV. 281-302.

Die Arbeit zerfällt in drei Theile. Im ersten Theil behandelt der Verfasser das Gleichungssystem

$$2v^2 = u^2+t^2, \quad 3w^2 = t^2+2u^2.$$

Dies System war von Herrn Lucas Nouv. Ann. (2) XVI. 409 (und später von Gerono (2) XVII. 381, s. F.d.M. IX. 1877. p. 136; X. 1878. p. 145) behandelt worden. Herr Pepin zeigt, dass die Lösung des Herrn Lucas nicht vollständig sei, sich aber durch eine geringe Modification der Methode vervollständigen lasse. Theil II. beschäftigt sich mit der Gleichung $x(x+1)(2x+1) = y^2$, deren Lösung ebenfalls vervollständigt wird. Der dritte Theil endlich beschäftigt sich mit einer Abhandlung von Krafft in den Novi Commentarii Acc. Petrop. III. 109. Es handelt sich in derselben um die Auffindung von ganzzahligen Werthen von a und m, die den Ausdruck $a\pm 1\pm\sqrt{2a-m}$ rational und zu einem Vielfachen von m machen. (Die Citate in der Arbeit aus den Nouv. Ann. sind zum Theil falsch.)
O.

S. Réalis. Question d'analyse indéterminée. N. C. M. V. 126-128.

Die Gleichung

$$z_1^3 + z_2^3 + \cdots + z_n^3 = (5n+3)z^3$$

ist immer auf unendlich viel verschiedene Arten in ganzen positiven oder negativen Zahlen lösbar.

Mn. (O.)

Th. Pepin. Sur l'équation $7x^4 - 5y^4 = 2z^2$. Liouville J. (3) V. 405-425.

Die Gleichung lässt in der Form

$$5(x^4 - y^4) = 2(z^2 - x^4)$$

Factorenzerlegung zu, welche auf zwei Systeme von Formeln führt. Es tritt hierbei ein Zusammenhang mit anderen Gleichungen, z. B. mit der folgenden

$$\lambda^4 - 140k^4 = g^2, \quad 4\lambda^4 - 35k^4 = f^2$$

zu Tage, derart, dass aus den vollständigen Lösungen der einen die aller andern abgeleitet werden können. Das erste System der Formeln hängt von den rationalen Auflösungen der Gleichung

$$2(7\eta^2+5)\xi^2 + 4\xi\eta + (1-\eta^2) = 0$$

ab; diese werden nach einer Euler'schen Methode geliefert, indem man zu $\xi = 0$, $\eta = -1$ den zweiten Wurzelwerth $\xi_1 = \frac{1}{6}$ bestimmt, welcher $\eta = -1$ entspricht, dann zu ξ_1 und η das System ξ_1 und $\eta_1 = \frac{23}{31}$ u. s. w. Aehnlich wird das zweite System der Formeln behandelt. Der Beweis der Vollständigkeit wird durch Zurückführung einer beliebigen Lösung auf eine andere mit kleineren Zahlenwerthen geliefert. Durch die Transformation $x = m+n$, $y = m-n$ gelangt man schneller zu den beiden Systemen von Lösungsformeln, doch lässt sich auf diesem Wege der Beweis der Vollständigkeit nicht geben.

No.

Th. Pepin. Théorèmes d'analyse indéterminée. C. R. LXXXVIII. 1255-1257.

Wenn p eine der Primzahlen 5, 37, 73, 113, 337, 349, 353 u. s. w., von der Form $5m^2+4mn+9n^2$ ist, so hat die Gleichung $px^4-41y^4 = z^2$ keine rationale Lösung. Verfasser theilt noch 16 ähnliche Theoreme über die Unlösbarkeit der Gleichung $px^4-qy^4 = z^2$ in rationalen Zahlen mit, wenn die Primzahlen p durch gewisse quadratische Formen darstellbar und q die Determinante der Form ist. Vergleiche hierzu die Arbeit desselben Verfassers in den C. R. LXXVIII. p. 144, über welche im VI. Bande dieses Jahrbuchs p. 113 (1874) referirt worden ist.

Schl.

E. Lucas. Sur l'équation indéterminée biquadratique $Ax^4+By^4 = Cz^2$.

Nouv. Ann. (2) XVIII. 67-74.

Zuerst wird für $x^4+\lambda y^4 = (1+\lambda)z^2$ aus einer Lösung eine neue abgeleitet. Für $\lambda = \frac{\nu}{\mu}$ erhält man das Entsprechende bei $\mu x^4+\nu y^4 = (\mu+\nu)z^2$ und kommt durch folgenden neuen Kunstgriff zur allgemeinen Gleichung. Ist x_0, y_0, z_0 eine Lösung von $Ax^4+By^4 = Cz^2$, so setzt man

$$Ax_0^4\left(\frac{x}{x_0}\right)^4+By_0^4\left(\frac{y}{y_0}\right)^4 = Cz_0^2\left(\frac{z}{z_0}\right)^2;$$

dann ist die Summe der Coefficienten auf der linken Seite gleich dem Coefficienten der rechten Seite.

No.

A. Desboves. Sur la résolution en nombres entiers de l'équation

$$aX^4+bY^4+dX^2Y^2+fX^3Y+gXY^3 = cZ^2.$$

C. R. LXXXVIII. 638-641.

Fermat hat in einem Specialfalle aus einer gegebenen Lösung der im Titel stehenden Gleichung eine andere abgeleitet. Hier werden für beliebige Coefficienten aus einer Lösung acht neue bestimmt, indem der in der vorigen Arbeit erwähnte Kunstgriff des Herrn Lucas angewendet wird.

No.

A. Desboves. Correspondance. Nouv. Ann. (2) XVIII 143-144

Der Brief des Herrn Desboves bezieht sich auf die beiden vorhergehenden Arbeiten. Herr Desboves sucht die Resultate seiner Arbeit gegenüber der des Herrn Lucas genügend in's Licht zu stellen.

O.

Lösungen weiterer Aufgaben über unbestimmte Gleichungen von Moret-Blanc, A. J. F. Meyl, P. Sondat finden sich Nouv. Ann. (2) XVIII. 328, 332-334, 378-379.

O.

R. J. Liouville. Sur l'impossibilité de la relation algébrique $X^n+Y^n-Z^n=0$. C. R. LXXXIX. 1108-1110.

Es wird auf Umwegen die Gleichung

$$X^{n-1}(ZX'-XZ')-Y^{n-1}(YZ'-ZY')=0$$

aus der vorgelegten abgeleitet, wobei X, Y, Z algebraische Functionen einer Veränderlichen bedeuten. Nach dieser ist differentiirt. Es folgt, dass $YZ'-ZY'$ durch X^{n-1} theilbar ist; hieraus wird ein, wie Referent meint, nicht hinlänglich begründeter Schluss über die Unmöglichkeit der Lösung gezogen.

No.

A. Desboves. Mémoire sur la résolution en nombres entiers de l'équation $aX^m+bY^m=cZ^n$. Nouv. Ann. (2) XVIII. 265-279, 398-410, 433-444, 481-500.

Im ersten Abschnitte wird eine Reihe von Identitäten abgeleitet, welche in folgendem allgemeinen Satze ihren Ausdruck finden: Sind $x_0, x_1, \dots x_{m-1}$ beliebige Grössen, bedeuten α_λ die m Wurzeln von $\xi^m-r=0$, so hat

$$\pi(x)=\prod_\lambda(x_0+\alpha_\lambda x_1+\alpha_\lambda^2 x_2+\cdots+\alpha_\lambda^{m-1}x_{m-1})$$

die Eigenschaft, dass $\pi(x).\pi(y)=\pi(z)$ wird, wo die z rational und ganz aus den x, y zusammengesetzt sind. Für Gleichsetzung der x und y. z. B. entsteht dann $\pi^2(x)=\pi(z)$ u, s. w.

Diese Resultate werden zuerst zur Lösung von $aX^3+bY^3=cZ^n$ verwendet. Für $n=2, 3, 4$ findet sich, dass bei beliebigen ganzzahligen a, b eine unendliche Anzahl von Werthen für z gegeben werden kann, welche ganzzahlige Lösungen zulassen, ohne dass $Z=1$ wird. Es werden Formeln angegeben, welche aus einer Lösung ein System von neuen ableiten (E. Lucas), und solche, die aus zwei Lösungen eine dritte bestimmen. In ähnlicher Weise wird $aX^4+bY^4=cZ^n$ behandelt. Es folgen dann allgemeine Untersuchungen über die Bedingungen dafür, dass $aX^m+bY^m=cZ^n$ eine, dass $aX^m+bY^m=cZ^m$ zwei oder drei Lösungen besitzen.

Im letzten Paragraphen werden Anwendungen der abgeleiteten Sätze auf die Lösung numerischer Gleichungen von der hier behandelten Form gegeben. No.

A. E. Pellet. Résolution d'une classe de congruences. C. R. LXXXVIII. 417-418.

Die Congruenz $At^m+Bu^n+C\equiv 0 \pmod{p}$ für eine Primzahl p, wird durch $\mu d d_1$ Systeme von Werthen aufgelöst; d und d_1 bezeichnen die grössten gemeinschaftlichen Theiler von $p-1$ und m resp. n, und μ die Anzahl der den beiden Congruenzen

$$x(x^{\frac{p-1}{d}}-1)\equiv 0 \text{ und } (C+Ax)\cdot\left[\left(-\frac{C+Ax}{B}\right)^{\frac{p-1}{d_1}}-1\right]\equiv 0 \pmod{p}$$

gemeinschaftlichen Wurzeln. Für $m=n=2$ ist μ wenigstens $=2$, wenn $p>3$, und es ergiebt sich der Lagrange'sche Satz, dass für jede Primzahl p zwei ganzzahlige Werthe t und u, welche $<\frac{p}{2}$ sind, gefunden werden können, so dass At^2+Bu^2+C durch p theilbar wird. Schl.

F. J. van den Berg. Bijdrage tot de oplossing van een vraagstuk ent de getallenleer. Nieuw. Arch. V. 47-57.

Handelt über das Problem aus der Zahlenlehre: „Drei zweiziffrige Zahlen zu finden, deren Product eine solche sechsziffrige

Zahl liefert, dass die Ziffern derselben die nämlichen sind, wie die, mit welchen die drei zu findenden Zahlen geschrieben werden; wie z. B.:

$$72 \times 46 \times 89 = 294768.$$

Der Verfasser findet mehr durch Probiren als durch Theorie für Zahlen von ein, ein und zwei Ziffern eine Lösung: für ein, zwei und zwei Ziffern zehn Lösungen; und für drei Zahlen, jede von zwei Ziffern, sechszehn Lösungen, welche alle mitgetheilt werden. Er zeigt auch, wie das Problem für mehrere Zahlen behandelt werden muss, und wie es auf andere Zahlensysteme übertragen werden kann. G.

A. B. Nelson. General rules for the formation of magic squares of all orders. Analyst VI. 73-77.

Kurze Uebersicht über die verschiedenen Methoden zur Bildung magischer Quadrate. Glr. (O.)

E. Lucas. Un problème traité par Euler. N C. M. V. 169.

Es handelt sich um magische Quadrate. Mn. (O.)

Lionnet. Solution d'une question (1323). Nouv. Ann. (2) XVIII. 525-528.

Lösung der Aufgabe: „Man soll die neun Zahlen 1, 2, . . . 9 so auf den Seiten eines gleichseitigen Dreiecks vertheilen, dass immer 4 auf einer Seite liegen, und dass sowohl die drei Summen der Zahlen selbst, als die drei Summen ihrer Quadrate unter einander gleich sind.“ Ein System solcher Zusammenstellung ist z. B.: 2; 4, 9, 5; 1, 6, 8; 3, 7, wo 2, 5, 8 die an die Ecken gehörigen Zahlen bedeuten. O.

Laquière. Note sur la géométrie des quinconces. Bull. S. M. F. VII. 85-92.

Dieser neue Wissenszweig ist sozusagen eine Behandlung der Zahlentheorie mit Hülfe der Coordinatengeometrie; der vorliegende Artikel ist die erste zusammenfassende Darstellung desselben. Man denke sich ein nach allen Seiten unendlich sich erweiterndes Schachbrett; auf ihm werden zwei mit Zellengrenzen zusammenfallende Gerade als orthogonale Axen genommen, die Seite einer Zelle wird zur Einheit genommen, um so für die Coordinaten jeden Eckpunktes einer beliebigen Zelle ganzzahlige Werthe zu erhalten. Die unbestimmte Gleichung $f(x, y) = 0$ kann dann interpretirt werden durch jene Punkte, welche der Curve $f = 0$ angehören und gleichzeitig Eckpunkte sind. Ersetzt man die bisherige Einheit durch deren Hälfte, so treten an die Stelle der Eckpunkte einfach die Mittelpunkte der Schachbrettfelder.

Dies vorausgesetzt, sieht man leicht ein, dass jede durch zwei Punkte hindurchgehende Gerade einen Neigungswinkel von rationaler Tangente besitzt, dass das Quadrat jeder Verbindungslinie commensurabel ist, dass das Produkt aus zwei Summen von je zwei Quadraten selbst wieder als Summe zweier Quadrate dargestellt werden kann. Will man graphisch die diophantische Gleichung $ax + by = c$ lösen, so sucht man alle jene Eckpunkte des Schachbrettes auf, durch welche die durch obige cartesische Gleichung repräsentirte Gerade hindurchgeht. Diese sehr naturgemässe praktische Auflösung gestattet auch eine einfache Fassung der zahlentheoretischen Regeln, nach welchen die algebraische Behandlung solcher Aufgaben zu erfolgen hat.

Gr.

J. J. Sylvester. On certain ternary cubic-form equations. Am. J. II. 280-285, 371-394.

Dies ist erst der Anfang einer grösseren Abhandlung, die von der Zerlegung einer Zahl in die Summe oder Differenz zweier Cuben handeln soll. Das Bisherige sind nur einzelne Excurse; insbesondere über Kreistheilung und von Sylvester näher betrachtete sogenannte Kreistheilungsfunctionen zweiter

Species; und über in- und umgeschriebene Drei- und Vielecke einer Curve dritter Ordnung. Ueber die Abhandlung kann erst nach Vollendung derselben zusammenhängend referirt werden.

Nr.

Hermes. Zurückführung des Problems der Kreistheilung auf lineare Gleichungen (für Primzahlen von der Form 2^m+1). Borchardt J. LXXXVII. 84-114.

Bildet man für eins der construirbaren regulären Primzahlecke $p = \mathfrak{m}+1 = 2^m+1$ unter Zugrundelegung einer bestimmten primitiven p^{ten} Einheitswurzel eine Tabelle, die für $\beta = 1, 2, \dots m$ die zugehörigen ind. β + ind. $(\beta+1)$ liefert, und nimmt von diesen letzteren Zahlen die Reste mod. 2^ν ($\nu = 0, 1, 2, \dots$), so erhalte man $\mathfrak{e}_0^{(\nu)}$ mal den Rest Null, $\mathfrak{e}_1^{(\nu)}$ mal den Rest Eins u. s. w. „Es ist nun möglich, diese für die Kreistheilung wichtigen Anzahlen direct zu erhalten, ohne Aufstellen einer Indextabelle“, und nachdem diese Anzahlen gewonnen sind, ist es möglich, die Perioden η selbst exact zu erhalten. Die Summe $\mathfrak{e}_\alpha^{(\nu)} + \mathfrak{e}_{\alpha+2^{\nu-1}}^{(\nu)}$ ist nämlich gleich $\mathfrak{e}_\alpha^{(\nu-1)}$ und die Differenz derselben beiden $\mathfrak{e}^{(\nu)}$ erhält man durch Auflösen eines Systems von $4^{\nu-3}$ linearen Gleichungen. Für $m = 1, 2, 4$ müssen die Resultate modificirt werden.

No.

R. Lipschitz. Sur des séries relatives à la théorie des nombres. C. R. LXXXIX. 948-950, 985-987.

Für jede reelle positive Zahl ω, welche nicht kleiner ist als 1, besteht die Gleichung

$$\left[\frac{\omega}{1}\right] - \left[\frac{\omega}{2}\right] - \left[\frac{\omega}{3}\right] - \left[\frac{\omega}{5}\right] + \left[\frac{\omega}{6}\right] - \dots = 1,$$

wo $-2, -3, -5, +6, -7, +10, \dots$ die Riemann'sche T-Reihe bilden. Diese enthält alle Zahlen, welche durch kein Quadrat theilbar sind mit dem + oder — Zeichen, jenachdem die Anzahl ihrer Primtheiler grade oder ungrade ist. Sei $f(n)$ die Anzahl

der Theiler von n, $g(n)$ ihre Summe, $\varphi(n)$ die Anzahl der zu n theilerfremden Zahlen $< n$ und $D(n) = \frac{n^2+n}{2}$; setzt man

$$f(1)+f(2)+\cdots+f(u) = F(u),$$
$$g(1)+g(2)+\cdots+g(u) = G(u),$$
$$\varphi(1)+\varphi(2)+\cdots+\varphi(u) = \Phi(u),$$

so ist

$$F(n)-F\left[\left(\frac{n}{2}\right)\right]-F\left[\left(\frac{n}{3}\right)\right]-\cdots = n,$$

$$G(n)-2G\left[\left(\frac{n}{2}\right)\right]-3G\left[\left(\frac{n}{3}\right)\right]-\cdots = n,$$

$$D(n)-D\left[\left(\frac{n}{2}\right)\right]-D\left[\left(\frac{n}{3}\right)\right]-\cdots = \Phi(n).$$

In der zweiten Mittheilung wird angegeben, dass die drei Dirichlet'schen Reihen

$$\sum_1^\infty \frac{f(n)}{n^s}, \quad \sum_1^\infty \frac{g(n)}{n^s}, \quad \sum_1^\infty \frac{\varphi(n)}{n^s},$$

auf die eine Riemann'sche Reihe

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^s} = \zeta(s)$$

zurückgeführt werden können. Sie haben die Werthe

$$\zeta(s)\,\zeta(s), \quad \zeta(s)\,\zeta(s-1), \quad \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}.$$

Der reciproke Werth von $\zeta(s)$ liefert

$$\Pi_a\left(1-\frac{1}{a^s}\right) = 1-\frac{1}{2^s}-\frac{1}{3^s}-\frac{1}{5^s}+\frac{1}{6^s}-\cdots$$

No.

Chr. Zeller. Ueber Summen von grössten Ganzen bei arithmetischen Reihen. Gött. Nachr. 1879. 243-268.

Unter $[a]$ werde das grösste Ganze verstanden, welches in a enthalten ist. Man hat dann für

$$A = \sum_{x=1}^{n}\left[\frac{ax+d}{p}\right], \quad h = \left[\frac{an+d}{p}\right],$$
$$B = \sum_{x=1}^{h}\left[\frac{px-(d+1)}{a}\right]$$

die Beziehung $A+B = hn$, welche die Verallgemeinerung eines Gauss'schen Satzes bildet. Eine andere Ausdehnung liefert die Beziehung

$$\sum_{x=1}^{n}\left[\frac{x^\alpha}{p}\right]+\sum_{x=1}^{q}[\sqrt[\alpha]{xp}] = qn, \quad q = \left[\frac{n^\alpha}{p}\right].$$

Aus dem ersten angeführten Theorem folgt auch

$$\sum_{x=1}^{n}\left[\frac{ax+d}{p}\right] = \sum_{x=0}^{h}\left[\frac{px+q}{a}\right],$$

wenn durch

$$a(n+1)+d = p(h+1)+q$$

die Zahlen h und q in Beziehung gesetzt werden. No.

J. W. L. Glaisher. Theorem in partitions. Messenger (2) IX. 47-48.

Wenn $P(u)$ die Zahl der Theilungen von u in die n Elemente $1, 2, 3, \dots n$ bezeichnet, wo jede Theilung genau r Theile enthält und Wiederholungen nicht ausgeschlossen sind, so ist

$$P(r)+P(r+n)+P(r+2n)+\cdots = n^{r-1},$$
$$P(r+1)+P(r+n+1)+P(r+2n+1)+\cdots = n^{r-1} \quad \text{u. s. w.}$$

Glr. (O.)

Capitel 2.

Theorie der Formen.

C. Jordan. Sur l'équivalence des formes algébriques. C. R. LXXXVIII. 906-908.

Bezeichnet man zwei Formen F, Φ, von der Ordnung m und von n Variabeln, als algebraisch äquivalent, wenn sie durch eine unimodulare lineare Substitution in einander überführbar sind, als arithmetisch äquivalent und derselben Classe angehörig, wenn die Coefficienten der Formen und der Substitution zugleich ganze

(reelle oder complexe) Zahlen sind, so kündigt Jordan den Beweis des Satzes an: dass die einer Form F (mit ganzen Coefficienten und von nicht verschwindender Discriminante) algebraisch äquivalenten Formen in eine begrenzte Zahl von Classen zerfallen.

Diese Erweiterung bekannter Sätze soll im Wesentlichen auf dem von Korkine und Zolotareff eingeschlagenen Wege gewonnen sein. Nr.

G. Frobenius. Theorie der linearen Formen mit ganzen Coefficienten. Borchardt J. LXXXVIII. 96-117.

Enthält eine Form einer bilinearen Classe (mod. k) $r+r$ Variable und keine weniger als $r+r$, so heisst r der Rang der Classe (mod. k). Damit zwei Formen mod. k äquivalent sind, ist es nothwendig und hinreichend, dass sie in Bezug auf jeden Divisor von k denselben Rang haben. Bezeichnet man mit (A, k) die Anzahl der durch A dargestellten incongruenten Werthsysteme mod. k, so kann die Aequivalenz von A und B auch durch $(A, h) = (B, h)$ für jeden Theiler h von k ausgedrückt werden. Jede bilineare Form lässt sich auf eine Weise in eine reducirte Form $A \equiv \sum_1^r g_\lambda x_\lambda y_\lambda$ (mod. k) überführen; dabei ist r der Rang der Form, alle g sind Theiler von k, und g_λ ein Theiler von $g_{\lambda+1}$; es heisse g_λ die λ^{te} Invariante von A (mod. k); dann folgt die Aequivalenz zweier Formen aus der Gleichheit der entsprechenden Invarianten, und umgekehrt. Die Invarianten hängen derart mit den Elementartheilern zusammen, dass die ϱ^{te} Invariante einer Form (mod. k) der grösste gemeinsame Divisor von k und dem ϱ^{ten} Elementartheiler der Form ist. Sind zwei bilineare Formen (mod. k) äquivalent, so kann die eine durch unimodulare Substitutionen in eine der anderen congruente transformirt werden, ausser wenn in ihnen die Anzahl der Variabeln jeder Reihe dem Range n gleich ist. Ist in letzterem Falle h der grösste gemeinsame Theiler ihrer Determinanten $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades mod. k, so ist, damit die eine durch unimodulare Substitutionen in eine der

andern congruente transformirt werden könne, nothwendig und hinreichend, dass ihre Determinanten n^{ten} Grades mod. hk congruent sind. No.

J. Gierster. Neue Relationen zwischen den Classenzahlen der quadratischen Formen von negativer Determinante. Gött. Nachr. 1879. 277-281.

Entsprechend den acht Kronecker'schen Formeln (vgl. F. d. M. VII. 1875. p. 102) werden aus den von Herrn F. Klein für das Ikosaeder gegebenen Modulargleichungen neue Formeln hergeleitet; es scheint nur eine einzige Combination zu bestehen, welche aus beiden Formelreihen erhalten werden kann. No.

H. Poincaré. Sur quelques propriétés des formes quadratiques. C. R. LXXXIX. 344-346, 897-899.

Mittheilungen über eine Arbeit, in welcher jeder quadratischen Form eine complexe Zahl zugeordnet wird; die Betrachtung dieser mit Hülfe bestimmter Integrale zu berechnenden „Correlativzahlen“ soll zur Entscheidung über die Aequivalenz zweier Formen, die Lösung der Pell'schen Gleichung u. s. w. ausreichen. No.

Th. Pepin. Sur un théorème de Legendre. Liouville J. (3) V. 21-31.

Legendre hat in seiner Zahlentheorie den Satz aufgestellt: „Kann

$$\varDelta = px^2 + 2qxy + ry^2$$

auf zwei verschiedene Arten als Summe dreier Quadrate

$$\varDelta = (mx+ny)^2+(m'x+n'y)^2+(m''x+n''y)^2$$
$$= (m_1x+n_1y)^2+(m_1'x+n_1'y)^2+(m_1''x+n_1''y)^2$$

dargestellt werden, wo dann auch

$$pq-r^2 = f^2+g^2+h^2 = f_1^2+g_1^2+h_1^2$$

wird, so ist $pq-r^2$ weder eine Primzahl, noch das Doppelte einer

solchen." Beim Beweise hatte Legendre den Fall $f^2 = f_1^2$ übersehen; diesen behandelt der Herr Verfasser. No.

A. Markoff. Sur les formes quadratiques binaires indéfinies. Clebsch Ann. XV. 381-407.

Die Form

$$(a_0, b_0, c_0) = a_0\xi^2 + 2b_0\xi + c_0$$

kann so zubereitet werden, dass sie, gleich Null gesetzt, eine positive Wurzel >1, eine negative <1 besitzt. Durch die Kettenbruchentwickelung beider wird eine Reihe von Transformationen geliefert, welche die Formen geben

$$(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), \dots (a_{-1}, b_{-1}, c_{-1}), (a_{-2}, b_{-2}, c_{-2}) \dots$$

Der Werth von (a_0, b_0, c_0) kann nicht unter den kleinsten Werth der Glieder von $\cdots -a_2, -a_1, a_0, a_1, a_2, \dots$ sinken. Ist $a_k = L_k\sqrt{D}$, und soll das Minimum von $L_k \geqq \frac{2}{3}$ sein, so giebt es fünf entsprechende Reihen, deren eine von einer neuen Reihe von Indices $-r_2, -r_1, r_0, r_1, r_2, \dots$ abhängt, bei welcher dasselbe stattfindet, u. s. f. Daraus folgt, dass man eine unendliche Anzahl von Formenclassen der Determinante D finden kann, deren Minima $>\frac{2}{3}\sqrt{D}$, und solcher, deren Minima $= \frac{2}{3}\sqrt{D}$ sind. Fordert man, dass $L_k \geqq l > \frac{2}{3}$ sei, so ergiebt sich eine ähnliche Anzahl von Reihen, nur das dieselbe abbrechen muss. Es giebt also nur eine endliche Anzahl von Classen der Form (a', b', c') mit der Determinante D, deren Minima $\geqq l\sqrt{D}$ sind. In diesem Falle sind $b':a'$ und $c':a'$ rational, und das Minimum wird für endliche Werthe der Variabeln x', y' erreicht. No.

S. Roberts. On the impossibility of the general extension of Euler's theorem on the product of two sums of 2^m squares where m is >3. Quart. J. XVI. 159-170.

Setzt man

$$(x^2+y^2)(\xi^2+\eta^2) = P^2+Q^2,$$

wo P, Q in x, y, ξ, η linear sind, eliminirt x, y aus $P=0$, $Q=0$, so erhält man die Bedingung dafür, dass $P^2+Q^2=0$ sei, in Form einer Determinante, welche eine Potenz von $\xi^2+\eta^2$ sein muss, hier also die erste. Auf Grund dieser Bemerkung kann die Determinante gebildet und die Form für P, Q bestimmt werden. Bei der Multiplication von je vier Quadraten kann durch systematisches Probiren gleichfalls die Determinante in ξ, η hergestellt werden; so kommt man zum Euler'schen Satze. Alle möglichen Determinantenbildungen für je 16 Quadrate führen auf Widersprüche. No.

M. Rocchetti. Solution d'une question (1311.)
Nouv. Ann. (2) XVIII. 426-427.

Sind α, β, γ, δ positive oder negative ganze Zahlen, und setzt man

$$P=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\delta(\alpha+\beta+\gamma),\quad Q=\beta^2+\gamma^2+\delta^2-\alpha(\beta+\gamma+\delta),$$
$$R=\gamma^2+\delta^2+\alpha^2-\beta(\gamma+\delta+\alpha),\quad S=\delta^2+\alpha^2+\beta^2-\gamma(\delta+\alpha+\beta),$$

so lässt sich $P^2+Q^2+R^2+S^2$ in zwei Factoren zerlegen, von denen der eine eine Summe von vier, der andere von drei Quadraten ist. O.

Capitel 3.

Kettenbrüche.

V. Schlegel.*) Beweis des Euler'schen Bildungsgesetzes für die Näherungswerthe von Kettenbrüchen.
Schlömilch Z. XXII. 402-404. 1877.

Der Verfasser beweist folgenden Satz: „Bezeichnet man mit $(abcd\dots)$ die Summe der Ausdrücke, welche aus dem Producte

*) Die vorstehende Arbeit ist durch einen von der Redaction nicht verschuldeten Zufall im Jahrgang 1877 nicht berücksichtigt worden. Das Referat wird daher hier nachgeholt. O.

abcd... dadurch hervorgehen, dass man auf alle möglichen Arten eine grade Anzahl zusammenstehender Factoren weglässt, so ist der echte Kettenbruch x mit den Nennern $a, b, c, d\ldots$

$$x = \frac{[bcd\ldots]}{[abcd\ldots]}.\text{“}$$

Hierin ist unter einem echten Kettenbruche derjenige zu verstehen, dessen Zähler sämmtlich gleich 1 sind. Für ein Product, von welchem sämmtliche Factoren weggelassen sind, ist 1 zu setzen und als grade Anzahl gilt auch Null. Der Beweis geschieht durch den Schluss von n auf $n+1$. O.

Ch. Hermite. Sur une extension donnée à la théorie des fractions continues par M. Tchébychef. Borchardt J. LXXXVIII. 10-16.

Sind a und b gegebene Zahlen, so giebt es unendlich viele Systeme ganzer Zahlen x, y derart, dass dem absoluten Werthe nach $x-ay-b<\frac{1}{2y}$ ist. Es wird eine Methode zur Auffindung von x, y angegeben; dieselbe führt zur Lösung der Aufgabe: „Wenn u,v zwei willkürliche Functionen von x sind, sollen zwei ganze Functionen X und Y von x gefunden werden, derart, dass $X-uY-v$, nach absteigenden Potenzen von x geordnet, mit einer möglichst hohen negativen Potenz von x beginnt.“

No.

S. Roberts. On forms of numbers determined by continued fractions. Proc. L. M. S. X. 29-41.

In seinem Berichte über die Fortschritte der Zahlentheorie hatte Smith gewisse Theoreme von Göpel (dessen Inauguraldissertation, 1835) verallgemeinert; dieselben bezogen sich auf die Form jener Kettenbrüche, in welche nach Lagrange alle Quadratwurzeln entwickelt werden können, und welche bekanntlich bei gleichbleibendem Theilzähler eine Periode in den Theil-

nennern aufweisen. Herr Roberts untersucht nun, welche Eigenschaften $\sqrt{A}$ besitzen muss, damit die Periode ein Mittelglied (nicht deren zwei) erhalte, und welche Eigenschaften speciell wieder diesem Mittelgliede zukommen. Er theilt eine Menge von Detailsätzen mit, welche er durch Studium der einzelnen möglichen Fälle erhalten hat; dieselben dürfen insbesondere von Jenen, welche sich mit der Pell'schen Gleichung $x^2-ay^2=b$ beschäftigen, nicht unberücksichtigt gelassen werden.

Gr.

O. Callandreau. Note sur l'emploi des fractions continues algébriques pour le calcul des coefficients $b_s^{(i)}$ de Laplace. J. de l'Éc. Pol. XXVIII 91-104.

Das Referat über diese Arbeit erfolgt im XII. Abschn. Cap. 2.

Schl.

J. D. H. Dickson. On the numerical calculation of a class of determinants and on continued fractions. Proc. L. M. S. X. 226-228.

Siehe Abschn. II. Cap. 3. p. 120.

T. N. Thiele. Bemärkninger om periodiske Kjädebrökers Konvergens. Zeuthen Tidsskr. (4) III. 70-74.

Veranlasst durch eine Lösung der Aufgabe, den Werth des unendlichen periodischen Kettenbruchs

$$x = 4 + \cfrac{1}{-1 + \cfrac{1}{-\frac{1}{2} + \cfrac{1}{-1 + \cfrac{1}{-1 + \cfrac{1}{-1 + \cfrac{1}{x}}}}}}$$

zu bestimmen, macht der Verfasser auf ein eigenthümliches Divergenzphänomen aufmerksam. Die Näherungsbrüche der ersten Periode sind der Reihe nach 4, 3, $\frac{7}{3}$, 1, 2, $\frac{8}{5}$. Die Wurzeln der erhaltenen Gleichung des zweiten Grades sind $\frac{8}{5}$ und 1. Die Näherungsbrüche φ_n der $(n+1)^{\text{ten}}$ Periode bestimmen sich aus der Gleichung

$$\frac{\varphi_n - \frac{8}{5}}{\varphi_n - 1} = \frac{\varphi - \frac{8}{5}}{\varphi - 1} \cdot (\tfrac{1}{4})^n,$$

woraus sich ergiebt, dass sie sich alle der Grenze $\frac{8}{5}$ nähern, mit Ausnahme des 4^{ten} Näherungsbruches, welcher immer gleich 1 wird. Der Kettenbruch oscillirt deshalb zwischen den beiden Wurzeln. Dieses Verhalten ist ein typisches für alle convergenten periodischen Kettenbrüche, indem sie, wenn man einen Convergenzwerth einführt, welcher der einen Wurzel der bestimmenden Gleichung gleich ist, zwischen deren beiden Wurzeln oscilliren. Dieses wird durch die Betrachtung der anharmonischen Verhältnisse von vier willkürlichen Convergenzwerthen bewiesen.

Gm.

K. E. Hoffmann. Ueber die Kettenbruchentwickelung für die Irrationale 2^{ten} Grades. Grunert Arch. LXIV. 1-8.

Verfasser will die verschiedenen Lösungen der Pell'schen Gleichung

$$x^2 - Ay^2 = 1$$

in einer einzigen geschlossenen Formel darstellen. Indem er den periodischen Kettenbruch

$$z_0 + \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \cdots + \frac{1}{z_n} = \frac{D_{0,n}}{D_{1,n}}$$

setzt, wo

$$\sqrt{A} = z_0 + 1:(z_1 + 1:(z_2 + \cdots + 1:(z_2 + 1:(z_1 + 1:(2z_0 + 1:(z_1 + \cdots)$$

ist, gelangt er zu der die Pell'sche deckenden Bedingungsgleichung

$$D_{0,n-1}^2 - AD_{1,n-1}^2 = (-1)^n.$$

Weiter wird

$$\xi_1 = D_{0,n-1} + D_{1,n-1}\sqrt{A}, \qquad \xi_2 = D_{0,n-1} - D_{1,n-1}\sqrt{A}$$

gesetzt, um als allgemeine Lösungen die folgenden zu erhalten:

$$D_{0,rn-1} = c_1\xi_1^r + c_2\xi_2^r,$$
$$D_{1,rn-1} = \gamma_1\xi_1^r + \gamma_2\xi_2^r.$$

Hier ist $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$, $\gamma_1 = -\gamma_2 = \frac{1}{2\sqrt{A}}$ zu setzen. Da unter dieser Voraussetzung die Gleichung

$$(D_{0,n-1}^2 - AD_{1,n-1}^2)^r = D_{0,rn-1}^2 - AD_{1,rn-1}^2 = (-1)^{rn}$$

besteht, so ist in der That die gestellte Aufgabe gelöst. Ausser den independenten werden auch noch bequemere Recursionsformeln angegeben. Gr.

K. E. Hoffmann. Die Verwandlung der Irrationalen n^{ten} Grades in einen Kettenbruch. Grunert Arch. LXIV. 9-18.

Die vorgezeichnete Aufgabe ist bereits in früheren Jahrgängen der nämlichen Zeitschrift von Grebe und Seeling gelöst worden; hier wird sie jedoch in einer mehr systematischen Weise angegriffen. Die massgebende Idee ist nämlich die, die bekannte Lagrange'sche Entwickelung der Quadratwurzel zu verallgemeinern. Ist z_0 die grösste in $\sqrt[n]{A}$ enthaltene ganze Zahl, so wird

$$\sqrt[n]{A} = z_0 + \frac{\sqrt[n]{A} - z_0}{1} = z_0 + M_1$$

und

$$\frac{1}{\sqrt[n]{A} - z_0} = z_1 + \frac{\sqrt[n]{A^{n-1}} + z_0\sqrt[n]{A^{n-2}} + \cdots + z_0^{n-2}\sqrt[n]{A} - e_1'}{d_1} = z_1 + M_2$$

gesetzt, unter z_1 die grösste in $\frac{1}{M_1}$ enthaltene ganze Zahl verstanden. Nun wird wieder der Bruch $\frac{1}{M_2}$ auf einen rationalen

Nenner gebracht, u. s. w. Die allgemeine Durchführung des Verfahrens führt begreiflicherweise zu sehr complicirten Formeln; ohne die vom Verfasser consequent und auf dieses Problem zum ersten Male angewandten Kettenbruchdeterminanten wäre ein übersehbares Resultat überhaupt nicht zu erreichen gewesen.

Gr.

J. W. L. Glaisher. On a property of vulgar fractions. Phil. Mag. 1879.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit historischen Notizen und den Beweisen für folgende Eigenschaften der gewöhnlichen Brüche: 1) Wenn alle eigentlichen Brüche, in kleinsten Zahlen geschrieben, Zähler und Nenner haben, die eine gegebene Grösse n nicht überschreiten, und man ordnet sie dann nach ihrer Grösse, so ist jeder dieser Brüche gleich dem Bruche, dessen Zähler und Nenner resp. gleich der Summe der Zähler und Nenner der beiden ihm nächsten Brüche ist. Ist z. B. $n = 7$, so sind die Brüche:

$$\tfrac{1}{7},\ \tfrac{1}{6},\ \tfrac{1}{5},\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{2}{7},\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{2}{5},\ \tfrac{3}{7},\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{3}{5},\ \tfrac{2}{3},\ \tfrac{5}{7},\ \tfrac{3}{4},\ \tfrac{4}{5},\ \tfrac{5}{6},\ \tfrac{6}{7},$$

und es ist

$$\frac{1}{6} = \frac{1+1}{7+5}, \quad \frac{1}{5} = \frac{1+1}{6+4}, \quad \frac{2}{3} = \frac{3+5}{5+7}.$$

2) Die Differenz zweier aufeinanderfolgender Brüche ist gleich dem reciproken Werthe des Productes ihrer Nenner.

Der Beweis der Sätze beruht auf den Eigenschaften der Kettenbrüche.

Csy. (O.)

N. Alexéeff. Sur l'extraction d'une racine d'un nombre. Bull. S. M. F. VII. 167-171.

Das Näherungsverfahren, welches in dieser Arbeit auseinandergesetzt wird, beruht darauf, dass das geometrische Mittel zweier Zahlen zwischen dem harmonischen und arithmetischen Mittel derselben Zahlen liegt. Wenn also $N = ab$ und $a > b$ ist, so dass $b < \sqrt{N} < a$, so ist auch

$$\frac{2N}{a+b} < \sqrt{N} < \frac{a+b}{2};$$
$$\frac{2N}{a_1+b_1} < \sqrt{N} < \frac{a_1+b_1}{2};$$
$$\frac{2N}{a_2+b_2} < \sqrt{N} < \frac{a_2+b_2}{2}$$

u. s. f., wenn

$$a_1 = \frac{2N}{a+b}, \quad a_2 = \frac{2N}{a_1+b_1} \cdots,$$
$$b_1 = \frac{a+b}{2}, \quad b_2 = \frac{a_1+b_1}{2} \cdots$$

gesetzt wird. Dabei ist

$$b < b_1 < b_2 \cdots < b_k < \sqrt{N} < a_k < \cdots a_2 < a_1 < a.$$

Schl.

Vierter Abschnitt.

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Combinationslehre.

D. Bierens de Haan. Note sur le nombre de fois, qu'avec un nombre donné de dés, on peut jeter une somme donnée; et sur une application de cette règle. Arch. Néerl. XIV. 370-392.

Uebersetzung eines früheren Aufsatzes. Siehe F. d. M. X. 1878. p. 157.

G.

D. André. Détermination du nombre des arrangements complets où les éléments consécutifs satisfont à des conditions données. Bull. S. M. F. VII. 43-63.

Auf den ersten Seiten der Abhandlung erläutert der Verfasser seine allgemeine Methode zur Bestimmung der Anzahl der nach den gegebenen Bedingungen für die Aufeinanderfolge der Elemente zulässigen Complexionen. Diese Methode setzt sich aus vier aufeinander folgenden Operationen zusammen, von denen die zwei ersten combinatorischer, die beiden letzten algebraischer Natur sind. Darauf werden nach dieser Methode vier specielle Probleme behandelt und gelöst, von denen das erste hier angeführt werden mag: „Wie viele verschiedene Worte von n Buchstaben können mit einem Alphabet, welches v Vocale und c Consonanten enthält, gebildet werden, wenn vorgeschrieben wird,

dass in den Worten niemals mehr als zwei Vocale oder zwei Consonanten auf einander folgen sollen." Schl.

H. Nägelsbach. Eine Aufgabe aus der Combinationslehre. Pr. Erlangen.

Die Aufgabe lautet: „Auf wie viele Arten lassen sich $i+1$ Variationen ohne Wiederholungen k^{ter} Classe aus n Elementen so untereinander stellen, dass nie gleiche Elemente untereinander zu stehen kommen?" In der vorliegenden Abhandlung ist diese Aufgabe für die Fälle $i=1$ und $i=2$ gelöst. Schl.

Th. Sinram. Einige Aufgaben aus der Combinationsrechnung. Grunert Arch. LXIII. 445-447.

Die Anzahl der Complexionen, welche sich aus a Elementen einer Art und b Elementen einer andern Art bilden lassen, wenn der Classenexponent n, und wenn vorgeschrieben ist, dass zu jeder Complexion von den Elementen der ersten Art n-m Elemente und von der zweiten Art m Elemente benutzt werden sollen, ist gleich der Anzahl der Permutationen von n Elementen, unter denen sowohl n-m gleiche, als auch m gleiche Elemente vorkommen. Specielle Fälle. Schl.

W. J. C. Sharp. Solution of a question (5521). Educ. Times XXXII. 98-99.

Hat man n Grössen $a, b, \ldots k, l$, und bezeichnet man mit $(b, c, \ldots k, l)$ das Product von $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Werthen von $1-pq$, wo für p und q irgend welche der Buchstaben $b, c, \ldots k, l$ zu setzen sind, so ist

$$\Sigma a^{n-2}\frac{(bc\ldots kl)}{(a-b)(a-c)\ldots(a-l)}=0.$$

O.

N. Bougaïeff. Lösung eines Schachspielproblems mit Anwendung der numerischen Functionen. Mosk. Math. Samml. IX. 355-360.

P.

A. Meyer. Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitsrechnung. Deutsch bearbeitet von E. Czuber. Leipzig. Teubner.

Das als Manuscript hinterlassene Original ist erst von Folie, dann von Czuber bearbeitet worden. Beide Bearbeiter haben das Eine und das Andere selbständig hinzugefügt. Der Inhalt ist nach dem uns vorliegenden Bericht in Grunert Archiv LXV. Lit. B. CCLVII. 11 folgender: Grundregeln, Wahrscheinlichkeiten wiederholter Versuche, Bernoulli's Theorem, mathematische und moralische Hoffnung, Wahrscheinlichkeiten der Ursachen und künftigen Ereignisse, Satz von Bayes, Satz von Laplace über die Wahrscheinlichkeit der Mittelwerthe von Beobachtungen, Theorie der Beobachtungsfehler, Wahrscheinlichkeiten, welche sich auf das Menschenleben beziehen, Lebensversicherungen, Wahrscheinlichkeiten von Zeugenaussagen und Urtheilen, Fehlertheorie nach Laplace und nach Bienaymé, Ausdehnung des Brenoulli'schen Theorems auf Factorielle von Binomen. O.

W. Ermakoff. Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Kiew. 1879. (Russisch).

Diese Arbeit enthält eine elementare Darstellung der Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung nebst einer bedeutenden Anzahl von Aufgaben. (Ein eingehendes Referat siehe Darboux Bull. (2) III. 461-462). P.

J. B. J. Liagre. Calcul des probabilités et théorie des erreurs avec des applications aux sciences d'observation en général et à la géodésie en particulier. Deuxième édition par C. Peny.

Der Inhalt dieses 1852 in erster Auflage erschienenen

Werkes ist: „I. Wahrscheinlichkeit a priori. 1. Einleitung. 2. Zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit. 3. Wahrscheinlichkeit im Fall der Wiederholung von Ereignissen. Satz von Bernoulli. 4. Mathematische Hoffnung, moralische Hoffnung. II. Wahrscheinlichkeit a posteriori. 5. Bestimmung der Wahrscheinlichkeit der Ursachen durch Beobachtungen. Wahrscheinlichkeit eines neuen Ereignisses. 6. Von den Ursachen. Mittel und Grenzen. 7. Von den Gesetzen der Sterblichkeit und der Bevölkerung. Versicherungsgesellschaften für Leben und Sachen. III. Angewandte Wahrscheinlichkeit. 8. Genauigkeit von Beobachtungen. Theorie der Fehler. Mittel und Grenzen. 9. Bestimmung des genauesten Resultats aus mehreren Beobachtungen. Genauigkeit des Resultats (Fall einer einzigen Unbekannten). 10. Genauigkeit der Functionen beobachteter Grössen. 11. Bestimmung des genauesten Resultats aus mehreren Beobachtungen. Genauigkeit des Resultats (Fall mehrerer Unbekannten). Methode der kleinsten Quadrate. Anwendungen auf die Geodäsie.“ Das Werk der Herren Liagre und Peny bietet weder in philosophischer noch in analytischer Beziehung besonders Erwähnenswerthes. Der Haupttheil, der mehr als die Hälfte des Buches einnimmt und am sorgfältigsten bearbeitet ist, ist der die Praxis betreffende. Ein grosser Theil (150 Seiten) ist den Anwendungen auf die Geodäsie gewidmet. Das Buch schliesst mit einem ziemlich ausgedehnten Résumé und mit numerischen Tafeln.

Mn. (O.)

E. L. de Forest. On unsymmetrical adjustments and their limits. Analyst VI. 140-148, 161-170.

Fortsetzung der früheren Arbeiten über denselben Gegenstand (s. F. d. M. IX. 1877. 174-175, X. 1878. 162-164). Eine Reihe von äquidistanten Gliedern

$$\dots u_{-2},\ u_{-1},\ u_0;\ u_1,\ u_2,\dots$$

ist ausgeglichen durch eine Formel, wie

$$u_0' = l_0 u_0 + l_1 u_1 + \cdots + l_4 u_4 + l_{-1} u_{-1} + \cdots + l_{-4} u_{-4},$$

in der die vom mittelsten gleich weit entfernten Coefficienten l

nicht gleich sind, so dass z. B. l_3 nicht gleich l_{-3} ist. Die daraus resultirende Reihe

$$\cdots u'_{-2},\ u'_{-1},\ u_0, \ldots$$

ist weiter durch eine andere unsymmetrische Formel, wie

$$u''_0 = L_0 u'_0 + L_1 u'_1 + L_2 u'_2 + L_{-1} u'_{-1} + L_{-2} u'_{-2}$$

ausgeglichen worden. Der Verfasser betrachtet den Fall, wo die Glieder wiederholt durch dieselbe unsymmetrische Formel ausgeglichen werden und speciell den Fall dieser Wiederholung in's Unendliche. Glr. (O.)

E. L. de Forest. On the development of $[p+(1-p)]^x$. Analyst VI. 65-73.

Es ist bekannt, dass die Binominalcoefficienten in der Entwickelung von $(p+q)^m$, wenn m sehr gross ist, sich den Ordinaten der Wahrscheinlichkeitscurve $y = ce^{-h^2x^2}$ nähern. Dies beweist der Verfasser in einfacherer Weise als es sonst geschieht, und betrachtet weitere damit in Verbindung stehende Gegenstände. Glr. (O.)

C. H. Kummell. Reduction of observation equations which contain more then one observed quantity. Analyst VI. 97-105.

Bemerkungen über die Behandlung eines Gleichungensystems von der Form

$$f(a, b, c, \ldots, x+\delta x, y+\delta y, \ldots) = 0$$

mittelst der Methode der kleinsten Quadrate. Glr. (O.)

C. H. Kummell. Revision of proof of the formula for the error of observation. Analyst VI. 80-81.

Zusatz zu der Arbeit des Verfassers in Bd. III. des Analyst (siehe F. d. M. VIII. 1876. p. 115.) Glr. (O.)

C. Carpmael. On the values of the constants in the equation

$$ {}_rA_r x^{(r)} + {}_rA_{r-1} x^{(r-1)} + \cdots + {}_rA_t x^{(t)} + {}_rA_0 - y_x = 0 $$

obtained by the method of least squares, from the $n+1$ values of y_x when $x = 0, 1, 2, \ldots n$; n being greater than r. Monthl. Not. XXXIX. 489-504.

Als bekannt wird vorausgesetzt, dass der Werth einer Grösse y_x, (deren angenäherter Werth bekannt ist, wenn $x = 0$, und $x = 1, 2, \ldots n$) ausgedrückt werden kann als die Summe einer Reihe von Factoriellen der Form ${}_rA_t\, x^{(t)}$, wo ${}_rA_t$ der Coefficient von $x^{(t)}$ ist, wenn $x^{(r)}$ die höchste Factorielle der Reihe ist. Gegenstand der Untersuchung ist die Bestimmung der Werthe der Coefficienten ${}_rA_t$, und der Werthe, welche die Summe der Quadrate der Differenzen zwischen den gegebenen Werthen von y und diesen durch die Formel gegebenen zu einem Minimum machen. Das Symbol $x^{(r)}$ bezeichnet $x(x-1)\ldots(x-r+1)$. Glr. (O.)

F. Bing. Om aposteriorisk Sandsynlighed. Zeuthen Tidsskr. (4) III. 1-22.

L. Lorenz. Bemärkninger til Hr. Bings Afhandling: „Om aposteriorisk Sandsynlighed". Zeuthen Tidsskr. (4) III. 57-66.

F. Bing. Svar til Professor L. Lorenz. Zeuthen Tidsskr. (4) III. 66-70.

L. Lorenz. Gjensvar til Hr. Direktör F. Bing. Zeuthen Tidsskr. (4) III. 118-122.

F. Bing. Nogle Bemärkninger i Anledning af „Gjensvaret". Zeuthen Tidsskr. (4) III. 122-131.

Mit dem Namen Bayes' Regel bezeichnet Herr Bing in der ersten der angeführten Abhandlungen die bekannte Formel

$$ x_s = \frac{q_s\, p_s}{q_1 p_1 + q_2 p_2 + \cdots + q_r p_r}, $$

d. h.: die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine gewisse Ursache gewirkt hat, ist proportional, sowohl der apriorischen Wahr-

scheinlichkeit q_s, dass diese Ursache zur Wirkung komme, als derjenigen p_s, welche dieselbe, wenn wirkend, der wirklich eingetroffenen Begebenheit ertheilen würde. Theoretisch ist dieser Satz zwar correct, bei den Anwendungen desselben zeigt sich aber fast immer die Schwierigkeit, dass die Grössen q_s nicht bekannt sind und eigentlich nur durch eine Hypothese festgestellt werden können. Will man z. B. mittelst Herausziehen von Proben die Wahrscheinlichkeit der gegebenen Zusammensetzung einer Urne bestimmen, dann kann man, je nachdem man die herausgezogenen Kugeln auf verschiedene Weise classificirt, für die gestellte Frage ganz verschiedene Antworten erhalten. Aehnliches kann auch in der Sterblichkeitsstatistik vorkommen, indem man aus der Beobachtung, dass von $l+d$ Personen im Laufe eines Jahres d gestorben sind, eine andere Bestimmung der Wahrscheinlichkeit, noch ein Jahr zu überleben, erhält, als wenn man weiss, wie die d gestorbenen Personen sich auf die beiden Hälften des Jahres vertheilen. Der Verfasser stellt sich die Aufgabe, einen neuen Ausdruck für diese Wahrscheinlichkeit so zu bestimmen, dass dieser Widerspruch vermieden wird. Da sich dies als unmöglich zeigt, schliesst er, „dass es gar keine aposteriorische Wahrscheinlichkeit giebt, wenn man nicht von vorn herein die wirkenden Ursachen kennt.“ Dieser Aufsatz gab zu einer lebhaften Polemik zwischen dem Verfasser und Professor Lorenz Anlass. Letzterer erklärt sich zwar mit Herrn Bing in Beziehung auf den Schluss einverstanden, betrachtet ihn aber eigentlich als selbstverständlich. Uebrigens polemisirt er besonders gegen die von Bing gegebene Behandlung des erwähnten Sterblichkeitsproblems.

Gm.

C. M. Piuma. Soluzione di un problema elementare nel calcolo delle probabilità. Battaglini G. XVIII. 360-372.

Aus einer Urne, welche B Zettel enthält, die mit den Zahlen 1 bis B bezeichnet sind, werden drei Zettel gezogen. Man verlangt zu wissen, wie zahlreich unter den $\frac{B(B-1)(B-2)}{6}$ mög-

lichen Fällen die Fälle sind, in denen die Summe der gezogenen Zahlen gleich oder kleiner ist als eine gegebene Zahl C.

Der Verfasser zeigt zunächst, dass die Grenzen der Summe aus den drei gezogenen Zahlen 6 und $3(B-1)$ sind, und dass, wenn man $C \gtreqless 3\,(B-1)$ setzt, die gesuchte Anzahl $= \frac{B(B-1)\,(B-2)}{6}$ ist. Die Untersuchung wird daher auf den Fall beschränkt, wo C zwischen 6 und $3(B-1)$ liegt.

Wenn $C < B+4$, ist eine Summenbildung überhaupt nur möglich, wenn keiner der Summanden B überschreitet. Bei dieser Beschränkung fällt die Lösung zusammen mit der Beantwortung der Frage, in wie vielfach verschiedener Weise den Gleichungen

$$\varphi+\psi+\chi = 6,\ \varphi+\psi+\chi = 7, \dots\ \varphi+\psi+\chi = H, \dots \varphi+\psi+\chi = C$$

genügt werden kann, wenn

$$6 < H < C;\quad 0 < \varphi < \psi < \chi \text{ und } \chi \leqq B.$$

Daran knüpft sich die Untersuchung der Fälle, wo $C \gtreqless B+4$, mit Unterscheidung derjenigen hier auszuschliessenden Summen C, welche entstehen, wenn einer der Summanden oder zwei derselben die Zahl B überschreiten. Ls.

A. MacFarlane. On a question in probabilities.
Educ. Times XXXII. 18-19.

In einem kürzlich erschienenen Werke „Principles of the algebra of logic“ entwickelt der Herr Verfasser eine „Algebra des Qualitativen“, welche eine Verallgemeinerung der Algebra des Quantitativen ist. Um die Fruchtbarkeit der ersteren für Probleme der Wahrscheinlichkeit zu erweisen, wendet er seine Gesetze auf die von Herrn A. Martin u. A. behandelte Aufgabe an, welche F. d. M. IX. 1877. 152 erwähnt ist. Die Lösung ergiebt sich in der Form:

$$p_1 p_2 + \tfrac{0}{0}(1-p_1),$$

also übereinstimmend mit der des Herrn Cayley, doch mit Hülfe nur einer unbekannten Grösse. M.

C. J. MONRO. On traditional testimony. Educ. Times XXXII. 44-46.

Der Verfasser bemerkt zu der Lösung obiger Aufgabe, dass für die gesuchte Wahrscheinlichkeit folgende Grössen von Wichtigkeit sind: 1) die Wahrscheinlichkeit, dass die Person B das Ereignis erzählt, wenn es sich ereignet hat, 2) die Wahrscheinlichkeit, dass B das Ereignis erzählt, wenn es sich nicht ereignet hat, 3) die Wahrscheinlichkeit, dass A bezeugt, B habe es erzählt, wenn B es gethan hat, und 4) die Wahrscheinlichkeit, dass A bezeugt, B habe es erzählt, wenn B es nicht gethan hat.

M.

W. A. WHITWORTH. Note on „Choice and Chance." Messenger (2) VIII. 129.

Beweis der Prop. XLVI. der dritten Ausgabe aus des Verfassers Werke „Choice and Chance". Der Satz heisst: „Wenn μ die Wahrscheinlichkeit einer Operation ist, die in einem Versuch Erfolg hatte, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese in n Versuchen nicht bei k auf einanderfolgenden vorkommt, gleich dem Coefficienten von x^n in der Entwickelung von

$$\frac{1-\mu^k x^k}{1-x+(1-\mu)\mu^k x^{k+1}}.$$

Glr. (O.)

Lösungen weiterer Aufgaben über Wahrscheinlichkeit von W. A. WHITWORTH, S. TEBAY, W. J. MAC DONALD, W. J. C. MILLER, H. C. ROBSON, A. MAC FARLANE, C. J. MONRO, G. HEPPEL, J. A. KEALY finden sich Educ. Times XXXI. 50-52, 54, 100-103; XXXII. 74-76, 90, 92.

O.

D. MC ALLISTER. The law of the geometric mean. Proc. of London XXIX. 367-376.

Das Vorliegende ist ein Auszug aus der Arbeit, die unter dem Titel: „On the law of geometric mean in the theory of

errors" im Quart. J. XVII. 175-194 1880 publicirt ist. Das Referat wird daher im Jahrgang 1880 erfolgen. Cly. (O.)

F. GALLON. The geometric mean in vital and social statistics. Proc. of London XXIX. 362-367.

Der Verfasser will zeigen, dass in der betreffenden Classe von Fällen das geometrische Mittel, als Grundlage für ein Gesetz der Häufigkeit der Fehler (Frequency of error) vorzuziehen sei dem arithmetischen Mittel, welches zur Aufstellung des durch die Formel $y = e^{-h^2x^2}$ ausgedrückten Gesetzes benutzt worden ist. Die Bemerkungen des Verfassers wurden Herrn Donald Mc Allister übergeben, der mit einer Untersuchung der mathematischen Theorie beschäftigt ist. Cly. (O.)

G. DOSTOR. Limite de l'erreur que l'on commet en substituant, dans un calcul, la moyenne arithmétique de deux nombres à leur moyenne géométrique. Grunert Arch. LXIII. 220-221.

Der Fehler ist kleiner als der Quotient aus dem Quadrat der Differenz der beiden ungleichen Zahlen und der achtfachen kleineren Zahl. Schl.

M. L. LALANNE. De l'emploi de la géométrie pour résoudre certaines questions de moyennes et de probabilités. Liouville J. (3) V. 107-130.

Der Verfasser zeigt in dieser Abhandlung an verschiedenen Aufgaben, dass die Lösung derselben durch die Anwendung der Geometrie wesentlich erleichtert wird. Die von ihm gewählten Beispiele sind:

1) Welches sind die Mittelwerthe aus den zuerst ihrer Grösse nach geordneten drei Seiten der unendlich vielen Dreiecke, deren Seiten nur der Bedingung unterworfen sind, dass sie in den gegebenen Grenzen a und b eingeschlossen sind.

Wird die kleinste Seite des Dreiecks mit x, die grösste mit z, die dazwischen liegende mit y bezeichnet, so gelten die fünf Bedingungsgleichungen

$$x \geqq a, \quad z \leqq b, \quad x \leqq y, \quad y \leqq z, \quad z \geqq x+y.$$

Die Gleichheitszeichen bestimmen die Grenzwerthe, welche der Lösung zur Grundlage dienen. x, y, z werden als rechtwinklige Coordinaten betrachtet und die vorstehenden Gleichungen als die Gleichungen von 5 Ebenen aufgefasst, welche ein Pentaeder ausschneiden, bei dem die Coordinaten der einzelnen Punkte, aus denen es besteht, den obigen Bedingungen genügen. Nun wird gezeigt, dass die Coordinaten des Schwerpunktes dieses Pentaeders, welche sich ohne Schwierigkeit bestimmen lassen, die Lösung der Aufgabe enthalten.

2) Ein Stock von der Länge l bricht in drei Stücke; welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich aus den drei Stücken ein Dreieck bilden lässt?

Durch geometrische Betrachtungen findet sich fast unmittelbar die Lösung gleich $\frac{1}{4}$.

3) Welche Wahrscheinlichkeit hat es, dass alle Wurzeln der Gleichungen

$$a) \qquad z^2 + pz + q = 0,$$
$$b) \qquad z^3 + pz + q = 0$$

reell sind, wenn p und q in den Grenzen $\pm P$ und $\pm Q$ eingeschlossen sind, und alle Werthe der Coefficienten p und q innerhalb dieser Grenzen gleich wahrscheinlich sind. Die Wahrscheinlichkeiten finden sich leicht durch geometrische Betrachtungen. Sie sind für

$$a) \qquad \frac{P^2 + 12Q}{24\,Q},$$

$$b) \qquad \frac{2\sqrt{3}}{45} \cdot \frac{P^{\frac{3}{2}}}{Q}.$$

Die Abhandlung enthält ausserdem die analytische Lösung der Aufgabe, den Mittelwerth einer Function mehrerer Variablen zu bestimmen.

Ls.

J. P. Gram. Om Raekkeudviklinger, bestemte ved Hjaelp af de mindste Kvadraters Methode. Kjobenhavn. Diss.

Der Verfasser dieser interessanten Abhandlung geht davon aus, dass man bei der näherungsweisen Berechnung von Werthen einer Function, welche sich schlecht für die numerische Rechnung eignet, an deren Stelle eine convergente Reihe zu setzen pflegt, und er erinnert daran, dass der Fehler, den man begeht, wenn man diese Reihe bei irgend einem Gliede abbricht, nicht nur von der Anzahl der benutzten Glieder, sondern auch von dem Argument, für welches der Functionswerth gesucht wird, abhängig ist. Dieser Fehler kann so gross werden, dass die benutzten Glieder der Reihe ein ganz unzutreffendes Bild der Function geben, während man durch andere passend gewählte Coefficienten der Reihe eine viel grössere Näherung erreichen würde, ohne dass man nöthig hätte, die Anzahl der Glieder zu vermehren. Dies führt auf die Aufgabe, die Reihenentwickelung in einer solchen Weise vorzunehmen, dass man sicher ist, allemal die beste Näherung zu gewinnen, welche mit der benutzten Anzahl von Gliedern, deren analytische Form vorher bestimmt ist, erzielt werden kann. Gleichzeitig wird gezeigt, wie sich diese Näherungsausdrücke, die der Verfasser Interpolationsreihen nennt, zu Interpolationen und Ausgleichungen verwenden lassen.

Es sei gegeben eine Anzahl von ν Beobachtungswerthen o_x, welche als Werthe einer vorläufig unbekannten Function des Arguments x betrachtet werden mögen. Das Gewicht dieser Beobachtungen werde durch v_x bezeichnet, und es sollen diese Beobachtungswerthe durch eine Reihe y_x, deren Constanten mit Hülfe der Methode der kleinsten Quadrate zu bestimmen sind, ausgedrückt werden. Es ergiebt sich hieraus die Bedingungsgleichung $\Sigma v_x(o_x - y_x)^2$ ein Minimum.

Je nachdem wir von der Reihe y_x 1, 2 ... n Glieder benutzen wollen, bezeichnen wir dieselbe mit $\overset{(1)}{y}\, \overset{(2)}{y} \ldots \overset{(n)}{y}$ und bestimmen

$$\overset{(1)}{y} = a_{11} X_1,\ \overset{(2)}{y} = a_{21} X_1 + a_{22} X_2, \ldots \overset{(n)}{y} = a_{n1} X_1 + a_{n2} X_2 + \cdots + a_{nn} X_n,$$

wo $X_1 X_2 \ldots X_n$ bestimmte Functionen von x sind, und die Coeffi-

cienten a_{11}, a_{21}, a_{22} ... in der bekannten Weise aus der obigen Bedingungsgleichung abgeleitet werden.

Setzt man aber

$$\overset{(n)}{y} = \overset{(1)}{y} + \{\overset{(2)}{y} - \overset{(1)}{y}\} + \{\overset{(3)}{y} - \overset{(2)}{y}\} + \cdots + \{\overset{(n)}{y} - \overset{(n-1)}{y}\}$$

oder

$$= a_{11} X_1 + \{(a_{21} - a_{11}) X_1 + a_{22} X_2\}$$
$$+ \{(a_{31} - a_{21}) X_1 + (a_{32} - a_{22}) X_2 + a_{33} X_3\} + \cdots$$

so zeigt sich, dass sich das umwandeln lässt in

$$\overset{(n)}{y} = A_1 \psi_1(x) + A_2 \psi_2(x) + \cdots + A_n \psi_n(x),$$

wo $\psi_m(x)$ eine lineare bestimmte Function von $X_1 X_2 \ldots X_m$ ist, und die Coefficienten $A_1 A_2 \ldots$ aus den gegebenen Beobachtungswerthen und ihren Gewichten abgeleitet werden. Es ergiebt sich dann schliesslich

$$y_x = \frac{\Sigma v_x o_x \psi_1}{\Sigma v_x \psi_1^2} \psi_1 + \frac{\Sigma v_x o_x \psi_2}{\Sigma v_x \psi_2^2} \psi_2 + \frac{\Sigma v_x o_x \psi_3}{\Sigma v_x \psi_3^2} \psi_3 + \cdots,$$

und diese Reihe giebt stets, wo immer sie abgebrochen wird, die beste Näherung, welche mit dem gegebenen $\overset{(n)}{y}$ erzielt werden kann.

Durch Vermittelung der Annahme, dass die Beobachtungen für eine Reihe von äquidistanten Argumenten mit der Differenz h gegeben sind, kommt der Verfasser, indem er h gegen die Grenze hin kleiner werden lässt, zu einer Reihe, welche den bestmöglichen Ersatz bildet für eine in dem Intervall von α bis β irgendwie bestimmte Function $f(x)$. Dieselbe hat die Form

$$y = \frac{\int_\alpha^\beta v_x f(x) \psi_1 \, dx}{\int_\alpha^\beta v_x \psi_1^2 \, dx} \psi_1 + \frac{\int_\alpha^\beta v_x f(x) \psi_2 \, dx}{\int_\alpha^\beta v_x \psi_2^2 \, dx} \psi_2 + \cdots$$

Von dieser Form zunächst ausgehend werden im zweiten Abschnitt die Grade der Näherung und die Convergenzbedingungen dieser unendlichen Interpolationsreihe näher untersucht, während der dritte Abschnitt die Interpolationsreihen aus verschiedenen „Entwickelungsfunctionen" y_x ableitet und auf verschiedene Functionen $f(x)$ anwendet.

Der vierte Abschnitt kehrt zu den Ableitungen bei Beobachtungswerthen, welche für äquidistante Argumente gegeben

sind, zurück, und der fünfte Abschnitt erläutert die Anwendung zu Ausgleichungen und Interpolationen an verschiedenen, der Praxis entlehnten Zahlenbeispielen. Ls.

D. J. A. Samot. New formulae for the calculation of the probabilities which occur in the question of invalidity or permanent incapacity of work. Journ. of Act. London 1879.

J. Dienger. Zur Invaliditätsfrage. Rundsch. d. Vers. 1879.

Ist p_a die Wahrscheinlichkeit für einen a-jährigen noch ein Jahr zu leben; i_a die Wahrscheinlichkeit für ein a-jährigen Nichtinvaliden im Laufe des nächsten Jahres invalid zu werden, so findet Samot für einen Nichtinvaliden (im Alter a):

1) $p_a - \frac{(1+p_a)\,i_a}{2}$ als Wahrscheinlichkeit, am Ende des nächsten Jahres noch als Nichtinvalide zu leben.

2) $\frac{(1+p_a)\,i_a}{2}$ dann noch zu leben, aber als Invalide.

3) $\frac{(1-p_a)\,i_a}{2}$ im Laufe des Jahres erst invalid zu werden und dann zu sterben.

4) $(1-p_a)\left(1-\frac{i_a}{2}\right)$ als Invalide zu sterben.

Dienger zeigt, dass er mit abweichender Bezeichnung diese Resultate, in der Hauptsache übereinstimmend, bereits früher veröffentlicht hat, und erläutert, worin die Abweichungen zwischen seinen Formeln und denen von Samot ihren Grund haben.

Ls.

T. B. Sprague. On the construction of a combined marriage and mortality table from observations made as to the rates of marriage and mortality among any body of men and on the calculation of the value of annuities and assurances that depend on the con-

tingency of marriage as well as death and their application to determine the rate of premium for an insurance against the contingency of a bachelor of a given age leaving issue. Journ. of Act. 1879.

Der ausgedehnte Titel dieser interessanten Abhandlung giebt über deren Inhalt so ausreichend Auskunft, dass es kaum erforderlich erscheint, Weiteres hinzuzufügen, zumal der Raum nicht erlaubt, die Formeln und deren Ableitung hier mitzutheilen.

Ls.

J. Dienger. Berechnung der Wittwenrente.

J. Dienger. Kapitalversicherung auf den Todesfall des von zwei Versicherten zuerst sterbenden. Oesterreich. Vers. Z. 1879.

Ls.

E. B. Seitz. Solution of a question (5957). Educ. Times XXXII. 79.

Zwei Punkte werden beliebig in einem Dreieck angenommen. Die diese verbindende Gerade theilt das Dreieck in zwei Theile. Der mittlere Werth des grösseren Theiles ist dann, wenn das Dreieck gleich Eins gesetzt wird,

$$\tfrac{7}{12} + \tfrac{1}{6}\log 2.$$

O.

A. B. Evans and E. B. Seitz. Solutions of a problem. Analyst VI. 60-61, 82-83.

Lösungen des bekannten Problems: Drei Punkte werden in einem Kreise willkürlich angenommen. Die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass das von diesen gebildete Dreieck ein spitzwinkliges ist. Sie ist $\frac{4}{\pi^2} - \frac{1}{8}$.

Glr. (O.)

E. B. Seitz. Solution of a question (5816). Educ. Times XXXII. 57-58.

Zwei gleiche Kugeln berühren sich von aussen. Nimmt man in jeder Kugel willkürlich einen Punkt an, so ist die mittlere Entfernung zwischen ihnen $\frac{11}{5}r$ und die Wahrscheinlichkeit, dass diese Entfernung kleiner als der Durchmesser, gleich $\frac{13}{35}$.

O.

Lösungen weiterer Aufgaben über geometrische Wahrscheinlichkeit von E. B. Seitz, R. E. Riley, A. W. Scott, S. B. Woolhouse, A. Martin, S. Roberts, Nash, Crofton, C. J. Monro, G. Heppel, T. R. Terry, Hart, S. Watson, Matz finden sich Educ. Times XXXI. 31, 55, 61-64, 65-66, 69-73, 75-76, 84; XXXII. 24-26, 47-48, 70, 80, 99-101, 104-105, 106, 107-109.

O.

Fünfter Abschnitt.

Reihen.

Capitel 1.

Allgemeines.

G. ENESTRÖM. Ett konvergenskriterium srärs borjan af 1700 talet. Öfv. v. Stockh. 1879.

Der Verfasser zeigt, wie Stirling schon 1730 in seinem „Methodus differentialis“ ein Convergenzkriterium für unendliche Reihen gegeben hat, welches auch für unendliche Producte gilt. Dies Kriterium wird in modern mathematischer Sprache ausgedrückt und die Bedeutung desselben besonders für unendliche Producte hervorgehoben. S. d. Bd. p. 38. M. L.

D. ANDRÉ. Sur la sommation d'une espèce particulière de séries. C. R. LXXXVIII. 740-741.

Vorliegende kurze Notiz enthält die Resultate einer Abhandlung, deren Gegenstand die Ermittelung der Summe aller derjenigen convergenten Reihen ist, deren allgemeines Glied in der Form

$$U_n = \frac{p(p+1)(p+2)\dots(p+n-1)}{1.2.3\dots n} u_n x^n$$

erscheint, wo n irgend eine nicht negative Zahl, p eine positive

oder negative nicht ganze Zahl, und u_n das allgemeine Glied irgend einer im eigentlichen Sinne recurrenten Reihe ist.

M.

J. L. W. V. Jensen. Om Multiplicationsreglen for tvende uendelige Räkker. Zeuthen Tidsskr. (4) III. 95-96; N. C. M. V. 430-432.

Beweis, dass das Product der beiden unendlichen convergenten Reihen

$$u_0+u_1+u_2+\cdots \quad \text{und} \quad v_0+v_1+v_2+\cdots$$

durch die unendliche convergente Reihe

$$w_0+w_1+w_2+\cdots,$$

wo

$$w_p = v_0 u_p + v_1 u_{p-1} + \cdots v_p u_0$$

darstellbar ist, sobald die eine Reihe der Moduln mod. u oder mod. v convergent ist.

Gm.

E. Catalan. Solution d'une question (360). N. C. M. V. 53-64.

Wenn die Zahlen $u_1, u_2, \ldots u_n$ continuirlich gegen eine endliche Grenze zu wachsen, so ist die Reihe

$$u_1-u_2+u_3 \ldots \pm u_n \mp \cdots$$

unbestimmt, d. h. sie wächst nicht unbegrenzt und nähert sich auch nicht einer endlichen Grenze.

Mn. (O.)

Stéphanos. Sur une propriété remarquable des nombres incommensurables. Bull. S. M. F. VII. 81-83.

Jede beliebige Zahl A kann nur auf eine Art durch einen Ausdruck von der Form

$$A = \frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{1.2} + \frac{a_3}{1.2.3} + \frac{a_4}{1.2.3.4} + \cdots$$

dargestellt werden, worin die Coefficienten $a_1, a_2, a_3 \ldots$ ganze positive Zahlen sind, welche durch die Bedingungen

$$A - \frac{a_1}{1} - \frac{a_2}{1\,.\,2} - \frac{a_3}{1\,.\,2\,.\,3} - \cdots - \frac{a_i}{1\,.\,2\ldots i} < \frac{1}{1\,.\,2\ldots i}$$

($i = 1, 2, 3\ldots$) bestimmt werden. Aus einer zweiten vom Verfasser angegebenen Bedingung für diese Coefficienten soll erkennbar sein, ob die durch einen solchen Ausdruck mit unbestimmt vielen Gliedern dargestellten Zahlen commensurabel sind oder nicht. Schl.

J. Tychowicz. Ueber den Taylor'schen Lehrsatz im Allgemeinen nebst Angabe der wichtigsten Restformen. Pr. Lemberg.

Der Taylor'sche Satz und die Restausdrücke werden nach der von Herrn L. Zmurko verbesserten Methode des Entdeckers abgeleitet, wobei als Ausgangspunkt die Formel dient, welche die Glieder der Hauptreihe durch die Glieder der r^{ten} Differenzenreihe ausdrückt. Unter der Voraussetzung, dass Grenzwerthe für die Differenzquotienten existiren, und dieselben die entsprechenden Differentialquotienten seien (was nicht immer zutrifft), erhält man die Formel

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \cdots + \frac{h^{r-1}}{(r-1)!} f^{(r-1)}(x) + \lim_{n=+\infty} E_n,$$

$$E_r = \frac{h^r}{r} \sum_{k=0}^{n-r} \binom{n-k-1}{r-1} \frac{\Delta^r f(x+k.\delta)}{\delta^r} \quad (n\delta = h).$$

Um die Ergänzung auf dem angegebenen Wege in die üblichen Formen zu bringen, sind jedoch noch beschränkende Annahmen nothwendig, deren Angabe in der Schrift durchaus fehlt. Um z. B. die Lagrange'sche Formel

$$\lim_{n=+\infty} E_r = \frac{h^r}{r!} f^{(r)}(x+\theta h) \qquad 0 \leqq \theta \leqq 1$$

zu erhalten, wäre anzunehmen, dass $\Delta^r f(x') : \delta^r$ für alle Werthe x' des Intervalles $x \ldots x+h$ gleichmässig zum Grenzwerthe $f^{(r)}(x)$ convergirt. Der Verfasser bringt auch den unrichtigen Satz wieder, dass, wenn die gegebene Function sammt allen Differential-

quotienten zwischen x und $x+h$ endlich und stetig ist, die Ergänzung sich dem Grenzwerthe Null nähere. St.

P. Appell. Sur un théorème concernant les séries trigonométriques. Grunert Arch. LXIV. 95-96.

Der Herr Verfasser will für den von Herrn G. Cantor in Borchardt J. LXXII. 130 (s. F. d. M. II. 1870. 218) bewiesenen Satz einen einfacheren Beweis geben, macht aber dabei die nicht zulässige Annahme, dass der absolut grösste Werth, welchen die Function

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

für alle Werthe von x innerhalb $(\alpha \ldots \beta)$ annimmt, mit unbegrenzt wachsendem n in gleichem Grade sich der Null nähert.

M.

H. Gyldén. Sur la sommation des fonctions périodiques. Ann. de l'Éc. N. (2) VIII. 203-247.

Unter diesem Titel sind vereinigt eine Abhandlung von Herrn Gyldén, mehrere Zusätze des Uebersetzers Herrn Callandreau und zwei Noten des Verfassers. Der wesentlichste Theil bezieht sich auf folgende Aufgabe: Gesucht wird

$$y_s = F(0) + F(\pi) + \cdots + F(s\pi),$$

wo s eine ganze Zahl und

$$F(t) = M_0 + M_1 \cos(\psi + \mu t) + M_2 \cos 2(\psi + \mu t) + \cdots,$$

ψ eine Constante und μ eine irrationale Zahl ist.

Es ergiebt sich

$$z_s = y_s - \tfrac{1}{2}F(0) - \tfrac{1}{2}F(s\pi) = \tfrac{1}{2}\int_0^{s\pi} F(t)\,\chi(t)\,dt,$$

wo $\chi(t)$ für alle ganzzahligen n der Bedingung

$$\int_0^{s\pi} \cos n(\psi + \mu t)\,\chi(t)\,dt = \cot \frac{n\mu\pi}{2} \{\sin n(\psi + s\mu\pi) - \sin n\psi\}$$

genügen muss. Durch eine besondere Partialbruchdarstellung

der Cotangente wird folgendes elegante Resultat erhalten:

$$z_i = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[F(t)+b_1^{(i)}\frac{d^2F(t)}{dt^2}+\cdots+b_i^{(i)}\frac{d^{2i}F(t)}{dt^{2i}}\right]\chi_i(t)\,dt,$$

wo

$$\chi_i(t) = \frac{2}{\pi}[\chi_0^{(i)}+2\chi_1^{(i)}\cos 2t+2\chi_2^{(i)}\cos 4t+\cdots],$$

$$\cot\tfrac{1}{2}\pi x = \frac{2P}{\pi}\left[\frac{\chi_0^{(i)}}{x}+\frac{2x\chi_1^{(i)}}{x^2-2^2}+\frac{2x\chi_2^{(i)}}{x^2-4^2}+\cdots\right],$$

$$P = 1-b_1^{(i)}x^2+b_2^{(i)}x^4-\cdots\pm b_i^{(i)}x^{2i}$$
$$= \left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{(2i-1)^2}\right),$$

Die weiteren hiermit in Zusammenhang stehenden Entwickelungen lassen sich des umfangreichen Formelapparates wegen nicht gut auszugsweise wiedergeben; hervorgehoben mögen hier nur gewisse merkwürdige Darstellungen von $\sin x\vartheta$, $\cos x\vartheta$ und ϑ durch trigonometrische Reihen werden. Unter den Zusätzen des Herrn Callandreau sind zu erwähnen die Behandlung derselben Aufgabe für

$$\frac{F(t)}{t} = M_0 + M_1\cos(\psi+\mu t)+\cdots,$$

ferner die kurze Herleitung der oben angeführten Summationsformel auf einem von Abel angegebenen Wege, der zugleich eine Erweiterung des Resultats ermöglicht, endlich die Bemerkungen über die interpolatorische Berechnung der Coefficienten in trigonometrischen Reihenentwickelungen. Die beiden Noten von Herrn Gyldén beziehen sich auf die trigonometrischen Reihen, deren Summe für gewisse Intervalle der Variablen constant ist, und auf die Anwendung dieser Reihen in der Störungstheorie.

B.

O. Bonnet. Note sur la formule qui sert de fondement à une théorie des séries trigonométriques. Darboux Bull. (2) III. 480-484.

Die Note enthält einen sehr einfachen auf geometrische

Betrachtungen gestützten Beweis der für die Theorie der Fourier'schen Reihe wichtigen Formel

$$\lim_{\alpha=1} \int_a^b \frac{(1-\alpha^2) f(x)\, dx}{1+\alpha^2-2\alpha\cos x} = \pi\{f(+0)+f(-0)\},$$

falls $-2\pi < a < 0$ und $2\pi > b > 0$ ist. Hr.

Capitel 2.

Besondere Reihen.

J. G. Wallentin. Zur Lehre von den Differenzenreihen. Grunert Arch. LXIII. 56-62.

Verfasser weist die bekannten Fundamentalsätze über Differenzenreihen, sowie einige neue Relationen auf sehr kurzem Wege mit Anwendung des Binomialtheorems nach, indem er den symbolischen Operationszeichen $\Delta^1, \Delta^2, \Delta^3 \dots \Delta^n$ für die Bildung der $1, 2, 3 \dots n^{\text{ten}}$ Differenzen während der Rechnung den Begriff von Grössen supponirt, im Resultate jedoch auf die ursprüngliche Bedeutung derselben zurückgeht. Schl.

E. Hain. Geometrische Summation einer arithmetischen Reihe. Grunert Arch. LXIII. 336-337.

Beruht darauf, dass jede ungrade Zahl $2m+1$ die Differenz zweier Quadrate $(m+1)^2-m^2$ ist. Construirt man also mehrere Quadrate über den Seiten $1, 2, 3 \dots n$, so dass sie einen Eckpunkt und den rechten Winkel an demselben gemeinschaftlich haben, so wird durch die Summation der Zwischenräume zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Quadraten ersichtlich, dass

$$1+3+5 \cdots + (2n+1) = n^2$$

ist. Schl.

Moret-Blanc. Solution de deux questions (1299, 1300). Nouv. Ann. (2) XVIII. 470-475.

Die Summe der Quadrate der n ersten ganzen Zahlen ist niemals gleich dem Zwei-, Drei- oder Sechsfachen eines Quadrates. Dasselbe gilt von der Summe der n ersten dreieckigen Zahlen. O.

M. C. Stevens. Solution of a problem. Analyst VI. 60.

Beweis, dass die Summe von 5 auf einanderfolgenden Quadraten kein Quadrat sein kann. Glr. (O.)

S. Günther. Zwei einfache Methoden zur Summation von Potenzreihen. Bair. Bl. XV. 62-66.

In doppelter Weise, deren erste wenigstens in den Lehrbüchern nirgends angewandt zu werden scheint, wird die Bestimmung des Summenausdruckes $(1^p+2^p+\cdots+n^p)$ auf die Auflösung eines Systemes linearer Gleichungen zurückgeführt. Auch wird gezeigt, dass die Determinanten, insbesondere das sogenannte Differenzenproduct, mit Vortheil zur Auflösung jener Gleichungen verwendet werden können. Gr.

E. B. Seitz and H. Gander. Solution of a problem. Analyst VI. 58.

Beweis, dass

$$1^9+2^9+3^9+\cdots+n^9 = \tfrac{1}{5}(16s^5-20s^4+12s^3-3s^2),$$

wo

$$s = 1+2+3+\cdots+n.$$

Glr. (O.)

D. Bierens de Haan. Herleiding van gelyknamige machten. Nieuw Arch. V. 208-210.

Dieser kurze Aufsatz enthält einige elementar algebraische

Formeln zur Reduction von gleichnamigen Potenzen mittelst der Identitäten:

$$(\Sigma p)^2 = \Sigma p^2 + 2\Sigma pq,$$
$$(\Sigma p)^3 = \Sigma p^3 + 3\Sigma p^2 q + 6\Sigma pqr,$$
$$(\Sigma p)^4 = \Sigma p^4 + 4\Sigma p^3 q + 6\Sigma p^2 q^2 + 12\Sigma p^2 qr + 24\Sigma pqrs.$$

G.

G. Dostor. Sommation directe et élémentaire des quatrièmes, cinquièmes et sixièmes puissances des n premiers nombres entiers. Grunert Arch. LXIII. 435-440.

G. Dostor. Sommes des dix premières puissances des n premiers nombres entiers, et des cinq premières puissances des n premiers nombres impairs. Relations entre ces diverses sommes. Grunert Arch. LXIV. 310-321.

G. Dostor. Méthode directe pour calculer la somme des puissances α des n premiers nombres entiers. Nouv. Ann. (2) XVIII. 459-464, 513-518.

Der Inhalt dieser drei Abhandlungen ist aus den Titeln ersichtlich. Die dritte ist nur eine zusammenfassende Bearbeitung der ersten beiden. Die Summe der α^{ten} Potenzen der ersten n natürlichen Zahlen lässt sich durch die Methode der unbestimmten Coefficienten für jeden ganzzahligen Werth von α in folgender Weise direct bestimmen, ohne die Formeln für die Summen der niedrigeren Potenzen vorauszusetzen: Es ist

$$\sum_1^n n^\alpha = A_0 n^{\alpha+1} + A_1 n^\alpha + \cdots + A_{\alpha-1} n^2 + A_\alpha n = \varphi(n),$$

$$\sum_1^n (n-1)^\alpha = \varphi(n) - \frac{1}{1}\frac{\partial\varphi}{\partial n} + \frac{1}{1.2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial n^2} - \frac{1}{1.2.3}\frac{\partial^3\varphi}{\partial n^3} + \cdots;$$

aber

$$\Sigma n^\alpha - \Sigma(n-1)^\alpha = n^\alpha,$$

folglich

$$n^\alpha = \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \frac{1}{1.2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial n^2} + \frac{1}{1.2.3}\frac{\partial^3\varphi}{\partial n^3} - \cdots.$$

Diese Identität ergiebt die zur Bestimmung der Coefficienten A_0. $A_1 \ldots A_\alpha$ ausreichende Zahl linearer Gleichungen. Schl.

Th. Sinram. Einige Sätze über Reihen. Grunert Arch. LXIII. 103-108.

Die Summe der 3^{ten} und 5^{ten} Potenzen einer Anzahl auf einander folgender Glieder einer arithmetischen Reihe ist durch die Summe dieser Glieder theilbar. Schl.

Bombled. Sur la série $1+2^p x+3^p x^2+\cdots$. N. C. M. V. 95-97.

Man findet:

$$X_n-\frac{n}{1}X_{n-1}+\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}X_{n-2}+\cdots=xX_n.$$

Macht man

$$n=0,\ 1,\ 2,\ 3\ldots n,$$

so findet man:

$$X_n(1-x)^{n+1}=1+A_n x+B_n x^2+\cdots+B_n x^{n-3}+A_n x^{n-2}+x^{n-1}.$$

Die Coefficienten lassen sich unter allgemeiner Form darstellen. So ist der Coefficient von x^{k-1}

$$k^n-\frac{n+1}{1}(k-1)^n+\frac{(n-1)n}{1\,.\,2}(k-2)^{n+1}\ldots.$$

Mn. (O.)

T. R. Terry, R. Knowles. Solutions of a question (5970). Educ. Times XXXII. 21-22.

Bezeichnet man mit S_r die unendliche Reihe

$$\frac{1\,.\,2\,.\,3\ldots r}{1!}+\frac{2\,.\,3\,.\,4\ldots(r+1)}{2!}+\frac{3\,.\,4\,.\,5\cdots(r+2)}{3!}+\cdots,$$

so ist

$$S_r=(2r-1)\,S_{r-1}-(r-1)\,(r-2)\,S_{r-2}.$$

O.

F. J. Studnička. Ueber die deduktive Begründung des Binomialsatzes. Casopis VIII. 145-150. (Böhmisch)

Hat den Zweck, das mathematische Programm der Mittel-

schule zu erweitern durch die Berücksichtigung von negativen und gebrochenen Exponenten. Std.

J. W. L. Glaisher. Note on an expansion of Euler's. Messenger (2) IX. 45-46.

Die Notiz bezieht sich auf das Gesetz der Bildung der Glieder in der Entwickelung von

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^4)(1-x^8)\dots.$$

Glr. (O.)

Crofton, J. L. Kitchin, T. R. Terry. Solutions of two questions (6065, 6096). Educ. Times XXXII. 87.

Ist

$$u_n = x^n + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\,.\,4}x^{n-4} + \cdots,$$

so ist

$$x^n = u_n - \frac{n(n-1)}{2}u_{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\,.\,4}u_{n-4} + \cdots.$$

Die zweite Aufgabe behandelt einen ähnlichen Gegenstand.

O.

W. Walton. Note on an inequality. Messenger (2) VIII. 133-134.

Neuer Beweis der Ungleichheit: a sei grösser oder kleiner als 1. Wenn dann n eine positive ganze Zahl ist, so ist

$$\frac{a^{2n+2}-1}{a(a^{2n}-1)} > \frac{n+1}{n}.$$

Glr. (O.)

Lionnet. Note sur la série $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$. Nouv. Ann. (2) XVIII. 509-513.

Der Herr Verfasser beschäftigt sich mit den verschiedenen Grenzwerthen für die Reihe $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$ bei verschiedener

Gruppirung der Glieder. Bekanntlich ist der Grenzwerth für die Reihe

$$(1-\tfrac{1}{2})+(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4})+(\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{6})+\cdots=\log 2.$$

Dagegen ist der Grenzwerth von

$$(1-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4})+(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{6}-\tfrac{1}{8})+(\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{10}-\tfrac{1}{12})+\cdots=\tfrac{1}{2}\log 2;$$

ferner der von

$$(1+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{2})+(\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{7}-\tfrac{1}{4})+(\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{11}-\tfrac{1}{6})+\cdots=\tfrac{3}{2}\log 2,$$

aber die Reihe

$$(1-\tfrac{1}{2})+(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{4})+(\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{11}-\tfrac{1}{6})+\cdots$$

ist divergent. M.

F. Polster. Eine neue unendliche Reihe, welche zur Berechnung der Ludolphine sehr bequem ist. Bair. Bl. XV. 155-158.

Mittelst der beiden Reihen

$$\frac{\pi}{4}=\frac{2}{1.3}+\frac{2}{5.7}+\frac{2}{9.11}+\frac{2}{13.15}+\cdots$$

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{2}{3.5}-\frac{2}{7.9}-\frac{2}{11.13}-\frac{2}{15.17}-\cdots$$

lässt sich jeweils π berechnen. Da aber die Convergenz keine rasche ist, so addirt der Verfasser beide Reihen in verschiedener Weise, so dass er zwei neue Reihen für $\frac{\pi}{2}$ erhält. Diese verbindet er in ähnlicher Weise und fährt so fort, bis ihm endlich zwei Reihen für 16π zu Gebote stehen; auch diese addirend findet er

$$32\pi=64+\frac{64}{1.3}+\frac{64.2}{1.3.5}+\frac{64.6}{1.3.5.7}+\frac{32.6.8}{1.3.5.7.9}+\frac{16.6.8.10}{1.3.5.7.9.11}+\cdots.$$

Dividirt man auf beiden Seiten mit 64, so erhält man eine in der That recht brauchbare Reihe für $\frac{\pi}{2}$. Im XVI. Band der bair. Blätter (p. 107) macht jedoch Hess zu dieser Reihe die

folgende Bemerkung: „Dieselbe ergiebt sich unmittelbar aus der bekannten Reihe

$$\operatorname{arctang} z = \frac{z}{1+z^2}\left[1+\tfrac{2}{3}\left(\frac{z^2}{1+z^2}\right)+\frac{2.4}{3.5}\left(\frac{z^2}{1+z^2}\right)^2+\cdots\right],$$

wenn man darin $z=1$ setzt; es dürfte daher mehr die von Herrn Polster gegebene Ableitung, als die Reihe selbst neu zu nennen sein.“ Gr.

F. Polster. Transformation der Leibniz'schen Reihe für die Ludolph'sche Zahl. Grunert Arch. LXIII. 447-448.

R. Hoppe. Bemerkungen über die Transformation der Leibniz'schen Reihe im vorigen Theile. Grunert Arch. LXIV. 214-215.

Herr Polster transformirt die Leibniz'sche Reihe

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

in die Form:

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{k!}{1.3\ldots(2k+1)}.$$

Herr Hoppe theilt mit, dass diese Transformation bereits früher in verschiedenen Schriften enthalten sei, so in Euler's Institutiones calculi differentialis, II. 1755; ferner in dessen allgemeinerer Reihe für $\frac{1+x^2}{x}\operatorname{arctg} x$; ebenso in der allgemeineren Entwickelung, welche E. Catalan 1865 in den Mém. de Belg. XXXIII. gegeben. Siehe auch das vorhergehende Referat.

M.

D. Edwardes, G. Turriff. Solutions of a question (5971). Educ. Times XXXII. 40.

Wenn n eine ungrade Zahl ist, so ist ihr reciproker Werth gleich der Reihe

$$\frac{n}{2!}\cdot 2 - \frac{(n+1)\,n(n-1)}{4!}\,2^2 + \frac{(n+2)\,(n+1)\,n(n-1)\,(n-2)}{6!}\,2^3 + \cdots + \frac{1}{2n}\cdot 2^n.$$

Der Beweis geschieht durch Entwickelung von

$$\tfrac{1}{2}\log\frac{1+x^2}{(1-x)^2}=\tfrac{1}{2}\log\left(1+\frac{2x}{(1-x)^2}\right)$$

in Reihen. O.

G. Lemoyne. Sulla convergenza dell' espressione infinita $x^{x^{x \text{ in inf.}}}$. Genova. Tip. Sambolino.

Die Zahlen

$$x^x=x_1,\quad x^{x_1}=x_2,\quad x^{x_2}=x_3\ldots x^{x_{n-1}}=x_n$$

nähern sich für $\lim n=+\infty$ einem endlichen Grenzwerthe $E(x)=y$ nur, wenn

$$e^{-\frac{1}{e}}\leqq x\leqq e^{\frac{1}{e}}.$$

Da somit die Gleichung besteht

$$x^y=y,$$

so kann man y nach Potenzen von $\log x$ entwickeln, wodurch man, gültig für alle genannten Werthe von x, erhält

$$y=1+\log x+\frac{3}{1.2}(\log x)^2+\frac{4^2}{1.2.3}(\log x)^3+\cdots.$$

Diese Gleichung wurde für

$$e^{-\frac{1}{e}}<x\leqq 1$$

schon von Eisenstein (Crelle J. XXVIII.) bewiesen.

St.

G. Dobinski. Eine Reihenentwickelung. Grunert Arch. LXIII. 108-110.

Für die Summe

$$S_n=\sum_{x=1}^{x=\infty}\frac{x^n}{x!}$$

wird die Formel hergeleitet:

$$S_n=1+S_0+\binom{n-1}{1}S_1+\binom{n-1}{2}S_2+\binom{n-1}{3}S_3+\cdots$$

und diese auf die Entwickelung von e^{e^x} nach Potenzen von x angewendet. M.

D. Besso. Dimostrazione elementare di alcune formole pel calcolo dei seni e coseni. Ann. d'Ist. Tecn. di Roma. 1879.

Der Herr Verfasser beweist auf elementarem Wege ohne Zuhülfenahme der Reihenentwickelung für sinus und cosinus die Näherungsformeln

$$\sin\alpha=\alpha,\quad \alpha-\frac{\alpha^3}{6},\quad \alpha-\frac{\alpha^3}{6}+\frac{\alpha^5}{120}-\cdots$$

$$\cos\alpha=1,\quad 1-\frac{\alpha^2}{2},\quad 1-\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\alpha^4}{24}-\cdots,$$

wobei er sich ausser der Ungleichheit

$$\sin\alpha<\alpha<\operatorname{tg}\alpha$$

folgender Hülfssätze bedient:

1) Sind die Zahlen $x_1\ x_2\ x_3\ldots$ durch die Relationen

$$x_1=\frac{x}{a}+\frac{1}{b},\quad x_2=\frac{x_1}{a}+\frac{1}{b},\quad x_3=\frac{x_2}{a}+\frac{1}{b},\ldots$$

worin a und b positive ganze Zahlen sind, mit einander verbunden, so nähert sich x_h mit wachsendem h der Grenze $\frac{a}{b(a-1)}$, und zwar bilden die x eine bis zu dieser Grenze stets wachsende oder stets abnehmende Reihe von Zahlen.

2) Besteht die Reihe von Ungleichheiten

$$A<B+X_1-M_1,\quad A<B+X_2-M_2,\ldots A<B+X_h-M_h\ldots,$$

worin die M sämmtlich grösser als eine positive Zahl Q sind, und die X einer gegebenen Zahl C sich beliebig nähern, dann ist $A<B+C$; ebenso folgt aus den Ungleichheiten $A>B+X_h+M_h$, dass $A>B+C$. Hr.

P. Mansion. Démonstration élémentaire de la formule de Stirling. N. C. M. V. 44-51, 51-53.

Reproduction eines Artikels der Herrn Glaisher und Cayley aus dem Quart. J. Nr. 57. p. 57-63 (s. F. d. M. IX. 1877. p. 190). Es sei

$$f(x)=\left(\frac{3+x}{3-x}\right)^3\left(\frac{5+x}{5-x}\right)^5\cdot\cdot\left(\frac{2n+1+x}{2n+1-x}\right)^{2n+1}.$$

Man entwickele $lf(x)$ in eine Reihe, setze $x=1$ und gehe dann von den Logarithmen zu den Numeris über. Man findet dann:

$$1.2.3\dots n = n^{n+\frac{1}{2}}.e^{-n+t},$$

$$t = (n+\tfrac{1}{2})l\left(1+\frac{1}{n}\right)-u,$$

wo u eine gewisse Reihe ist. Mit Hülfe elementarer Rechnungen kann man zeigen, dass t zwischen C und $Ce^{\frac{1}{12n}}$ liegt, wo $C=\sqrt{2\pi}$. Herr Catalan sucht in einer hinzugefügten Note die Grenze von u für $n=\infty$ und leitet daraus verschiedene bemerkenswerthe Folgerungen ab.

Mn. (O.)

Gohierre de Longchamps. Sur les nombres de Bernoulli. Ann. de l'Éc. N. (2) VIII. 55-80.

Der Herr Verfasser leitet die bekannte Entwickelung der Summe

$$S_{x,k} = \sum_{n=1}^{n=x} n^k$$

nach fallenden Potenzen von n mit Hülfe einer neuen Methode her, die aus leicht zu beweisenden Identitäten gewonnen wird. Den Ausgangspunkt bildet die Identität

$$S_{x,k+1} = (x+1)\,S_{x,k}-(S_{1,k}+\dots+S_{x,k}),$$

welche durch eine besondere Gruppirung der k^{ten} Potenzen in die x^2 Fächer eines Quadrates erhalten wird. Mit Hülfe derselben wird nun zunächst gezeigt, dass die Reihe

$$S_{x,k} = A_k x^{k+1} + B_k x^k + (P_{k,1}x^{k-1} + P_{k,2}x^{k-2} + \dots + P_{k,i}x^{k-i} + \dots + P_{k,k-1}x)$$

eine ganze Function $(k+1)^{\text{ten}}$ Grades von x ohne constantes Glied ist, und dass

$$A_k = \frac{1}{k+1},\quad B_k = \frac{1}{2},\quad P_{k,1} = \frac{1}{12},\quad P_{k,2} = P_{k,4} = P_{k,6} = \dots = 0.$$

Hierauf wird bewiesen, dass

$$P_{k,1} = \alpha_1\frac{k}{12},\quad P_{k,3} = \alpha_2\frac{k(k-1)(k-2)}{12^2},\ \dots,$$

wo die α_1, α_2 ... durch die Formel

$$(2i+1)\alpha_i = -\sum_{p=1}^{p=i-1} \alpha_p \alpha_{i-p}$$

bestimmt werden. Der Uebergang zu den Bernoulli'schen Zahlen geschieht dann durch die Relation

$$\pm B_i = \alpha_i \frac{1.2\ldots 2i}{12^i}.$$

Der Herr Verfasser stellt hierauf die Formeln zur Berechnung der α_i und der B_i übersichtlich zusammen. Zum Schluss wird durch Vergleichung mit den bisher zur Ermittelung der Bernoulli'schen Zahlen gegebenen Methoden die Einfachheit der hier dargelegten Berechnungsweise veranschaulicht. Es enthält dieser letzte Abschnitt eine ziemlich ausführliche Uebersicht über die die Bernoulli'schen Zahlen betreffende Literatur. M.

Stern. Zur Theorie der Bernoulli'schen Zahlen.
Borchardt J. LXXXVIII. 85-95.

Ganz ähnliche Betrachtungen, wie die, durch welche der Herr Verfasser in einer früheren Abhandlung über die Euler'schen Zahlen oder die Secantencoefficienten (Borchardt J. LXXIX. 67; s. F. d. M. VI. 1874. 103) zu einem das Scherk'sche Theorem bedeutend verallgemeinernden Satze gelangte, werden hier auf die Tangentencoefficienten angewendet, die mit den Bernoulli'schen Zahlen durch die von Euler gefundene Relation

$$T_{2\nu-1} = 2^{2\nu-1}(2^{2\nu}-1)\frac{B_\nu}{\nu}$$

verbunden sind. Während die Euler'schen Zahlen ganze Zahlen sind, die abwechselnd mit 1 oder 5 schliessen, endigen die ebenfalls ganzzahligen Tangentencoefficienten, abgesehen von $T_1 = 1$, mit 2 oder mit 6, je nachdem sie in der Form T_{4m+3} oder T_{4m+1} enthalten sind. Und dieser Satz ist wieder, wie mit Hülfe des auch in der früheren Arbeit benutzten Kummer'schen Satzes gezeigt wird, ein ganz specieller Fall einer viel allgemeineren Eigenschaft der Tangentencoefficienten. Auch aus diesen Tan-

gentencoefficienten lassen sich Reihen bilden, bei welchen man aus den bekannten n letzten Ziffern einer hinlänglichen Anzahl der ersten Glieder die letzten n Ziffern aller folgenden Glieder durch eine allgemeine Formel finden kann. M.

D. André. Développements de $\sec x$ et de $\operatorname{tang} x$. C. R. LXXXVIII. 965-967.

Die Theorie der alternirenden Permutationen, welche Herr André nächstens in einem besonderen Mémoire behandeln wird, führt zu einer Entwickelung von $\operatorname{tang} x$ und $\sec x$ nach Potenzen von x, deren Coefficienten auf sehr einfache Weise und unabhängig von jeder anderen Entwickelung gewonnen werden können. In der vorliegenden Note ist eine Uebersicht über die betreffende Methode gegeben. M.

C. le Paige. Sur le développement de $\cot x$. Extrait d'une lettre à M. Hermite. C. R. LXXXVIII. 1075-1077.

Die Integration der in der N. C. M. III. 45-47. (s. F. d. M. IX. 1877. p. 247) gegebenen Differenzenreihe

$$\frac{2p+1}{2} P_{2p} = P_2 P_{2p-2} + P_4 P_{2p-4} + \cdots + P_{2p-2} P_2$$

führt zu einer independenten Entwickelung von $x \cot x$ in der Form

$$(x\sqrt{6P_2}) \cot(x\sqrt{6P_2}) = 1 - 2P_2 x^2 - 2P_4 x^4 - \cdots.$$

Ferner gestattet die obige Formel, wegen der Relation

$$P_{2n} = \pm\tfrac{1}{2} \frac{B_{2n-1}}{2n!} (24 P_2)^n,$$

an die Stelle der zu berechnenden Bernoulli'schen Zahlen die Berechnung von Functionen zu setzen, die durch eine recurrente Reihe gegeben sind, deren 2tes Glied den Coefficienten 1 hat. Diese und analoge Formeln sind in den Ann. scient. de Bruxelles. I. 43 ff. (s. F. d. M. VIII. 1876. p. 147) gegeben. M.

W. Küttner. Zur Theorie der Bernoulli'schen Zahlen.
Schlömilch Z. XXIV. 250-252.

Unter Benutzung der Relation

$$C_{n,p}+C_{n-1,p}+C_{n-2,p}+\cdots+C_{1,p}=C_{n+1,\,p+1},$$

wo $C_{n,p}$ die Anzahl der Combinationen aus n Elementen zur p^{ten} Classe bedeutet, gewinnt der Herr Verfasser die Formel:

$$\sum_{i=1}^{i=m} i^p = p!\,C_{m+1,\,p+1}+(p-1)!\,S_{1,p-1}\,C_{m+1,p} \\ +(p-2)!\,S_{2,\,p-2}\,C_{m+1,\,p-1}+\cdots+C_{m+1,2}.$$

Hier ist

$$S_{1,p}=\sum_{n=1}^{n=p} n,\quad S_{2,p}=\sum_{n=1}^{n=p} n\,S_{1,n},\ \text{etc.}$$

Mit Hülfe dieser Formel ergiebt sich alsdann die independente Darstellung der n^{ten} Bernoulli'schen Zahl in der Form:

$$B_n=(-1)^{n+1}\left\{\tfrac{1}{2}+\sum_{i=0}^{i=2n-2}(-1)^{i+1}\frac{(2n-1-i)!}{2n+1-i}\,S_{i,2n-i}\right\}.$$

M.

G. Dobinski. Goniometrische Reihen. Grunert Arch. LXIII. 380-392.

Aus einigen goniometrischen Formeln, wie

$$\cot\frac{\alpha}{2}-\cot\alpha=\frac{1}{\sin\alpha},\qquad \cos 2\alpha=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}\alpha},$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\cot\alpha-2\cot 2\alpha,\qquad \sin\alpha.\sin^2\frac{\alpha}{2}=\tfrac{1}{4}(2\sin\alpha-\sin 2\alpha),$$

$$\sin^4\alpha=\sin^2\alpha-\tfrac{1}{4}\sin^2 2\alpha$$

u. ä. werden durch successive Substitution von

$$\alpha=x,\ 2x,\ 4x,\ldots\quad\text{oder}\quad\alpha=x,\ \frac{x}{2},\ \frac{x}{4},\ldots$$

und nachherige Addition einige goniometrische Reihen gewonnen.

M.

G. Dobinski. Summirung einiger Arcusreihen.
Grunert Arch. LXIII. 393-400.

Der Herr Verfasser benutzt, wie in einer früheren Note

(Grunert Arch. LXI. p. 434; siehe F. d. M. X. 1878. p. 193) die Gleichung

$$\sum_{x=1}^{n} [f(x)-f(x-1)] = f(n)-f(0),$$

um Reihen für Summen von der Form

$$\sum_{1}^{\infty} \text{arc tg} \frac{1}{p+qx+rx^2}$$

u. ä. herzuleiten. M.

J. W. L. Glaisher. Summation of a class of trigonometrical series. Rep. Brit. Ass. 1879.

Zur Kennzeichnung der in der Abhandlung behandelten Reihen mögen die folgenden dienen:

$$(1)\quad \text{Arctang}\frac{x^m}{a^m}+\text{Arctang}\frac{x^m}{(a-\pi)^m}+\text{Arctang}\frac{x^m}{(a+\pi)^m}+\cdots,$$

$$(2)\quad \text{Arctang}\frac{x^m}{a^m}+\text{Arctang}\frac{x^m}{(a-b)^m}$$
$$+\text{Arctang}\frac{x^m}{(a+b)^m}+\text{Arctang}\frac{x^m}{(a-2b)^m}+\cdots,$$

$$(3)\quad \text{Arctang}\frac{x^m}{1^{2n}}+\text{Arctang}\frac{x^m}{3^{2n}}+\text{Arctang}\frac{x^m}{5^{2n}}+\cdots.$$

Csy. (O.)

Moret-Blanc. Solution d'une question (1259). Nouv. Ann. (2) XVIII. 321-322.

Entwickelt man $(1-2\alpha x+\alpha^2)^n$ nach Potenzen von α, so hat die Entwickelung immer eine ungrade Zahl von Gliedern, und es sind die Coefficienten der gleich weit von der Mitte entfernten Glieder gleich der Ordnungsgrösse etc. O.

R. R. Webb. On Legendre's coefficients. Messenger (2) IX. 125-126.

Einfache Methode zur Auffindung der Differentialgleichungen, denen P_n und Q_n genügen, wo

$$\frac{1}{(1-2\mu h+h^2)^{\frac{1}{2}}} = 1+P_1 h+\cdots+P_n h^n+\cdots,$$

$$\frac{1}{(1-2\mu h+h^2)^{\frac{1}{2}m}} = 1+Q_1 h+\cdots+Q_n h^n+\cdots.$$

Glr. (O.)

F. Minding. Eine Anwendung der Differenzenrechnung.
Bull. de St. Pétersb. XXV.

In diesem Aufsatze wird die Summation der Reihe

$$S_m = a^m+(a+1)^m x^1+(a+2)^m x^2+(a+3)^m x^3+\cdots,$$

wo x ein echter Bruch ist, vorgenommen. Man erhält

$$S_m = \frac{C_0+C_1 x+C_2 x^2+\cdots+C_m x^m}{(1-x)^{m+1}},$$

wo

$$C_0 = a^m,\quad C_1 = (a+1)^m-(m+1)_1 a^m,$$
$$C_2 = (a+2)^m-(m+1)_1(a+1)^m+(m+1)_2 a^m, \ldots .$$

P.

H. J. Krantz. Solutions de questions proposées.
Nouv. Ann. (2) XVIII. 19-23.

Unter den von Bourguet aufgestellten und von dem Verfasser bewiesenen Sätzen sind folgende zwei hervorzuheben:

I. Die Reihe

$$a^{\frac{1}{m}}+a^{\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}}+a^{\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}}+\cdots$$

convergirt für $a<\frac{1}{e}$ und divergirt für $a\overline{\gt}\frac{1}{e}$.

II. Die Reihe

$$\frac{m}{n}+\frac{m(m+1)}{n(n+1)}+\frac{m(m+1)(m+2)}{n(n+1)(n+2)}+\cdots$$

ist convergent für $n-m>1$ und divergent für $n-m\leqq 1$. Die Beweise ergeben sich aus einem von Raabe herrührenden Convergenzkriterium.

Schl.

Lösungen von weiteren Aufgaben über specielle Reihen von Nash, Evans, E. B. Elliott, H. Stabenow, W. A. Whitworth, A. Laisant, F. Pisani finden sich Educ. Times XXXI. 29-30, 88, 95-96; XXXII. 37-38; Nouv. Ann. (2) XVIII. 330, 340.

O.

Sechster Abschnitt.

Differential- und Integralrechnung.

Capitel 1.

Allgemeines (Lehrbücher etc.)

J. Hoüel. Cours de calcul infinitésimal. Tome I. 1878. Tome II. 1879. Paris. Gauthier-Villars.

Herrn Hoüel's Compendium der Differential- und Integralrechnung, dessen erste zwei Bände jetzt vollendet vorliegen, giebt uns einen neuen Beweis von der Geschicklichkeit des Verfassers in der Bearbeitung mathematischer Lehrbücher. Die Veränderungen, welche die in den Jahren 1871 und 1872 von dem Herrn Verfasser herausgegebenen autographirten Vorlesungen über den Infinitesimalcalcul in dieser neuen Ausgabe nach Form und Inhalt erfahren haben, sind wesentlicher als es bei flüchtiger Durchsicht des ersten Heftes erschien. Abgesehen von der typographischen Ausstattung, um welche sich Herr Gauthier-Villars verdient gemacht hat, finden sich an den verschiedensten Stellen, sowohl in der Theorie, wie in den Anwendungen und Uebungen Verbesserungen und Zusätze, welche dem Werke einen ganz neuen Werth verleihen. — Die Einleitung, welche 102 Seiten umfasst, enthält in ihrem ersten Kapitel eine Theorie des Operationen-Calculs, die nach dem Vorgange Grass-

mann's rein abstract nur auf den combinatorischen Eigenschaften der Operationen basirt wird. Eine Anwendung dieser allgemeinen Principien auf die Theorie der complexen Variabeln ist Gegenstand des zweiten Capitels; hier acceptirt der Herr Verfasser die Methode von Hankel (Vorlesungen über die complexen Zahlen), behält aber die Grassmann'schen Bezeichnungen bei. Das Schlusscapitel der Einleitung enthält eine einfache, gedrängte Darstellung der Principien der Determinanten und der Elimination, soweit ihre Kenntnis für das Folgende nothwendig ist.

Buch I. trägt die Ueberschrift: Fundamentale Principien der Infinitesimal-Rechnung. Bei der Entwickelung der Principien ist der Herr Verfasser hier in noch höherem Grade, als in den autographirten Vorlesungen, bemüht gewesen, möglichst grosse Strenge mit Klarheit in der Darstellung zu vereinigen und hat die Rathschläge und Winke, welche die Herren Darboux, Schwarz u. a. nach Durchsicht der früheren Ausgabe mitgetheilt, mit Erfolg benutzt. Seitdem Duhamel das „Princip der Substitution der unendlich kleinen Grössen" geschaffen, so betont die Vorrede, giebt es nur eine wirklich strenge Methode, unter welcher Form man sie auch einkleide und welchen Namen man immerhin ihr beilege, ob „Methode der unendlich kleinen Grössen" oder „Methode der Grenzen". Das Duhamel'sche Princip besteht darin, dass man bei der Bestimmung der Grenzen von Verhältnissen oder Summen gewisser Hülfs-Variabeln, die man „unendlich kleine Grössen" nennt, ein Unendlichkleines durch ein anderes Unendlichkleines, dessen Verhältnis zum ersteren die Grenze 1 hat, ersetzen kann. Behält man dieses Princip im Auge, so kann man sich ohne Scheu der Sprache und der Bezeichnung der unendlich kleinen Grössen bedienen, die vor der sogenannten Methode der Grenzen den Vorzug der Exactheit und Einfachheit hat. Aber, um dieses Princip anwenden zu können, muss man die Ordnung der relativen Grösse zweier unendlich kleinen Grössen untersuchen und entscheiden, wann man die eine gegen die andere vernachlässigen darf. Diese Untersuchung der Grenze des Verhältnisses führt zu der Untersuchung der Ableitungen, mit deren Studium die Entwickelung der Analysis des Unendlich

kleinen beginnen muss. Alsdann wird der Begriff der Differentiale in die Rechnung eingeführt. Das Differential ist von der Form

$$dy = (y' + \varepsilon)\,dx,$$

wo y' die Ableitung der Function $y = f(x)$; hier heisst $y'dx$ „Haupttheil" des Differentials. An diese Principien schliesst der Herr Verfasser sofort die Definition des bestimmten Integrals, aus dem dann der Begriff des unbestimmten Integrals abgeleitet wird. Sehr ausführlich ist die nun folgende Behandlung der Ableitungen höherer Ordnung und der Eigenschaften der Functionaldeterminante. Wie überhaupt sämmtliche Theile des Werkes, so schliesst auch dieser Abschnitt der Theorie mit zahlreichen Uebungen.

Das zweite Buch enthält „analytische Anwendungen der Infinitesimal-Rechnung", nämlich mannigfache Reihenentwicklungen nach Taylor und Maclaurin, Werthe unbestimmter Ausdrücke, Maxima und Minima, wobei eine sehr einfache Methode zur Bestimmung der Vorzeichen des Maximums und Minimums zu erwähnen ist, und die Zerlegung rationaler Functionen in Partialbrüche. Zu der analytischen Anwendung der Integral-Rechnung gehört die Integration rationaler Functionen, die binomischen Differentiale, die vielfachen Integrale, die Euler'schen Integrale, wobei von der Dirichlet'schen Formel zahlreiche Anwendungen gemacht werden, endlich die näherungsweise Berechnung bestimmter Integrale. Hier wird die Euler'sche Approximations-Formel nach einer von Imschenetsky gegebenen Methode bewiesen. Zahlreiche numerische Beispiele dienen zur Erläuterung des Vorgetragenen.

Das erste Buch des zweiten Bandes behandelt die geometrischen Anwendungen der Infinitesimalrechnung und zwar Cap. 1 Anwendungen der Differentialrechnung auf ebene Gebilde, Tangenten, Normalen, Asymptoten, Bogenlänge, Inflexionspunkte, Krümmung, Enveloppen, singuläre Punkte ebener Curven. Den Schluss dieses Capitels bildet eine kurze Entwickelung der Methode der Aequipollenzen, die eine fruchtbare Anwendung des Algorithmus der complexen Grössen auf geometrische Probleme gestattet. Es folgt im zweiten Capitel die Geometrie dreier Di-

mensionen, die Raumcurven, die Krümmung der Flächen, die Anwendung krummliniger Coordinaten auf die Flächentheorie und Verwandtes. Das letzte Capitel enthält Anwendungen der Integralrechnung auf geometrische Gebilde, also Quadratur, Cubatur, Schwerpunktsbestimmungen, Trägheitsmomente u. s. w. Die Theorie der Differentialgleichungen ist Gegenstand des IV. und V. Buches, und zwar behandelt das erstere Gleichungen und Gleichungs-Systeme mit einer unabhängigen Variabeln, das andere hingegen Gleichungen mit mehreren unabhängigen Variabeln. Besonders hervorzuheben ist der Beweis des Fundamentalsatzes, dass jede Differentialgleichung ein Integral hat. Hier folgt der Herr Verfasser dem Vorgange Cauchy's in dessen Calcul intégral, éd. Moigno. Ferner die Anwendung der Integration einiger Differentialgleichungen nach der Methode von Euler und Laplace, die Darstellung einer Function $f(x)$ durch ein bestimmtes Integral $\int e^{ux}\varphi(u)\,du$. Hier sind die Vorlesungen von Spitzer benutzt. Von den symbolischen Bezeichnungen macht Herr Hoüel eine geschickte Anwendung; auch dehnt er dieselbe auf den Fall aus, wo die Potenzen der Charakteristik der Ableitung D_x durch Factorielle ersetzt werden.

Im dritten Bande, der die Theorie der Functionen einer complexen Variablen und deren Anwendung auf die Theorie der elliptischen Functionen enthält (Buch VI.), finden sich noch wesentlichere Veränderungen und Zusätze, als in den vorigen Büchern, im Vergleich mit den autographirten Vorlesungen. Ueber diesen, sowie über den im Druck befindlichen vierten Band, welcher ganz neu hinzugefügt ist, werden wir im nächsten Jahrgange zu berichten haben. M.

O. Schlömilch. Vorlesungen über einzelne Theile der höheren Analysis. Dritte Auflage. Braunschweig. Vieweg und Sohn.

E. Catalan. Cours d'analyse de l'université de Liège. Seconde édition revue et augmentée. Algèbre. Calcul différentiel. Première partie du calcul intégral.
Paris. Gauthier-Villars. 8°.

Der Inhalt dieses Buches ist folgender:

Algebra. I. Reihen und Logarithmen: Reihen, Permutationen, Combinationen, binomischer Satz, Theorie der Logarithmen, Anwendungen. II. Ableitungen: Derivirte, Discussion der Functionen, primitive Functionen, logarithmische Reihen. III. Das Imaginaire. IV. Theorie der Gleichungen: Fundamentalprincip. Transformation der Gleichungen. Grenzen der Wurzeln. Existenz reeller Wurzeln. Untersuchung commensurabler Wurzeln. Wurzeln, die zweien Gleichungen gemeinsam sind. Gleiche Wurzeln. Satz von Sturm. Gleichungen dritten und vierten Grades. Reciproke Gleichungen. Binomische Gleichungen. Untersuchung incommensurabler Wurzeln. Auflösung der transcendenten Gleichungen. Zerlegung rationaler Brüche.

Differentialrechnung: I. Unendlich Kleines und Differentiale. II. Regeln der Differentialrechnung. III. Analytische Anwendungen: Reihen von Taylor und Maclaurin. Exponentialfunctionen und Logarithmen. Unbestimmte Formen. Maxima und Minima. IV. Geometrische Anwendungen: Aufgaben über Berührung und Krümmung ebener und räumlicher Curven. Einhüllende Curven und Flächen. Integralrechnung: I. Einfache Integrale. II. Vielfache Integrale. III. Geometrische Anwendungen. (Quadratur, Rectification, Cubatur).

Der Gang, den Herr Catalan einschlägt, ist überall klar und streng. Auch finden sich überall gut gewählte Beispiele und Uebungen. Mn. (O.)

E. Mc Clintock. An essay on the calculus of enlargement. Am. J. II. 101-161.

Der Calculus of Enlargement, die Vergrösserungsrechnung, ist in gewisser Hinsicht eine Ausdehnung der Rechnung mit endlichen Differenzen, in anderer Hinsicht eine Modification des

Operationen-Calculs. Ein wesentlicher Zweig des neuen Calculs ist die Differential- und Integralrechnung, einschliesslich der Variationsrechnung. Die Basis des Calculs ist die bekannte Operation

$$E = 1 + \varDelta,$$

oder die Operation

$$E^h x = x + h,$$

$$E^h \varphi(x) = \varphi(x+h).$$

Das E ist zugleich das fundamentale Symbol; andere Symbole werden nur dann gebraucht, wenn sie Functionen von E sind, wie z. B. das Symbol der Differentiation $\frac{d}{dx}$ oder D, wenn

$$D = \log E.$$

Auf diese Weise wird die symbolische Methode zu einem Wissenschaftszweige, und es werden die durch solche Symbole bezeichneten Operationen genau definirt und vollständig discutirt. Die Gleichung

$$E = \varepsilon^D$$

oder ihre Umkehrung

$$D = \log E$$

bildet gleichsam das Band zwischen der Differentialrechnung und dem Operationen-Calcul. Die Differentiation ist diejenige Operation, deren Symbol der Logarithmus des Symbols der Vergrösserung ist. Man hat

$$D\varphi(x) = \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} \quad (h = 0).$$

Da nun D eine Function von E ist, so gelten alle Theoreme, die für $\varphi(E)$ gefunden sind, auch für D, folglich allgemein auch für $\psi(D)$, wenn

$$\varphi(x) = \psi(\log x)$$

gesetzt wird. Jedes Theorem in der Theorie der Logarithmen führt zu einem entsprechenden Theorem in der Theorie der Differentiation.

Der Herr Verfasser beginnt nun mit der Theorie der Logarithmen (§ 8-20). Alle Sätze für diese fliessen aus der als Definition zu Grunde gelegten Reihe Mercator's:

$$\log(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \cdots.$$

Wird der Antilogarithmus von y durch das Symbol ε^y bezeichnet, und definirt durch die Reihe

$$x = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2.3}y^3 + \cdots,$$

so ergiebt sich für ganz beliebige Werthe von x und y

$$\varepsilon^x \varepsilon^y = \varepsilon^{x+y}.$$

Auf die Theorie der Logarithmen folgt dann (§ 21-34) eine allgemeine Theorie der Operationen. Hierbei werden folgende drei algebraische Gesetze zu Grunde gelegt:

$$x(y+z) = xy + xz,$$
$$xy = yx,$$
$$x^m x^n = x^{m+n},$$

d. h. das Gesetz der Distribution, der Commutation und der Indices. Aus der Definition von E^h als Symbol der Operation, die $\varphi(x)$ in $\varphi(x+h)$, was auch h bedeute, verwandelt, fliesst dann die Theorie der Functionen von E (§ 35-40). Darauf folgt eine analytische Theorie der Differentiation (§ 41-59), worin Taylor's Theorem entwickelt wird, und für D, als Function von E, allgemeine, allen solchen Functionen zukommende Eigenschaften aufgestellt werden. Der nächste Abschnitt (§ 60-78) behandelt eingehender die Natur der Operation der Differentiation, wie sie durch die symbolische Definition $D = \log E$ gegeben ist. Daran schliesst sich eine Theorie der Factoriellen (§ 79-103), und im letzten Abschnitt die Theorie des Multiplications-Calculs (§ 104-114), der darin besteht, dass man nicht h zu x addirt, sondern $\varphi(x)$ in $\varphi(x\varepsilon^h)$ verwandelt. M.

Capitel 2.

Differentialrechnung (Differentiale, Functionen von Differentialen. Maxima und Minima).

O. Stolz. Ueber die Grenzwerthe der Quotienten. Clebsch Ann. XV. 556-559.

In diesem Nachtrage zu dem Aufsatze im XIV. Bande der Annalen (s. F. d. M. X. 1878. 202) macht Herr Stolz auf ein Lemma aufmerksam, das in einer Note des Herrn V. Rouquet (Nouv. Ann. (2) XVI. 113; s. F. d. M. IX. 1877. 203) sich findet. Dieses führt auf sehr einfache Weise zu einem Satze der Differentialrechnung, den auf anderem Wege Herr Du Bois-Reymond, Clebsch Ann. XIV. 502 (s. das folgende Referat) gefunden hat.

M.

P. du Bois-Reymond. Ueber Integration und Differentiation infinitärer Relationen. Clebsch Ann. XIV. 498-506.

Die Aufgabe der Integration infinitärer Relationen, von der die Bestimmung von $\lim[f(x):\varphi(x)]$ aus $\lim[f'(x):\varphi'(x)]$ im Grunde nicht verschieden ist, wird unter etwas allgemeineren Voraussetzungen über die Functionen $f(x)$, $\varphi(x)$ gelöst, als Referent angegeben hatte (vgl. F. d. M. X. 1878. p. 202). Schwieriger ist es, Bedingungen aufzufinden, unter welchen aus der Existenz von $\lim[f(x):\varphi(x)]$ auf die von $\lim[f'(x):\varphi'(x)]$ geschlossen werden darf oder nicht. Bezüglich der Frage, für welche Classe von Functionen überhaupt der Quotient von irgend zwei derselben einen Grenzwerth besitzt, lassen sich gegenwärtig kaum mehr als Vermuthungen äussern.

St

W. Matzka. Ueber fundamentale Functions-Grenzen der Analysis. Prag. Ber. 1878. 262-272.

Die Ermittelung der Grenzwerthe von Functionen, besonders der Potenz, der Exponentialfunction und des Logarithmus, welche gewöhnlich ein einleitendes Capitel der Differentialrechnung ausmacht, geschieht ohne inneren Zusammenhang und für jede der genannten Functionen gesondert, obwohl diese Functionen aus einander hervorgehen. Diesem systemwidrigen Mangel soll durch den vorliegenden Aufsatz abgeholfen werden. Zunächst wird gezeigt, dass die Grenzgleichung

$$\lim_{u=1} \frac{u^n - 1}{u - 1} = n$$

für jede Zahl u und für jeden Werth des Exponenten n gilt. Aus dieser folgt die Grenzgleichung

$$\lim_{\alpha=0} \frac{(1+\alpha)^n - 1}{\alpha} = n;$$

für solche α, die von Null verschieden sind, wird unter Benutzung eines ausgleichenden Factors ϑ

$$(1+\alpha)^n = 1 + \vartheta . n\alpha$$

gefunden. Mit Hülfe solcher ausgleichenden Factoren und Exponenten wird der Uebergang von Grenzgleichungen zu allgemein gültigen Gleichungen bewerkstelligt. Auf diesem Hülfsmittel beruht die Methode, die der Herr Verfasser bereits seit 1859 in seinen Vorträgen über algebraische Analysis und Differentialrechnung bei der Grenzbestimmung der drei Functionsgattungen benutzt. M.

P. Mansion. Notes sur quelques principes fondamentaux d'analyse. Soc. scient. de Brux. III. B. 259-266.

Die Grenze einer Function zweier Variabeln $F(x, y)$ für $x = x_0$, $y = y_0$ kann verschieden sein, je nachdem x und y sich gleichzeitig ihrer Grenze nähern oder nicht. Es folgt daraus, dass die Regel für die Derivation zusammengesetzter Functionen und die für bestimmte Integrale in Beziehung auf einen variabeln Parameter nicht in allgemeiner Weise aufgestellt werden kann, weil es einige Vorsicht erfordert, um zu beweisen, dass der Rest in der Taylor'schen Reihe sich Null nähert, wenn die Derivirten alle continuirlich sind. Mn. (O.)

N. Trudi. Nota intorno alla derivata di ordine qualunque del prodotto di più variabili. Rend. di Nap. XVIII. 181-188.

J. L. W. V. Jensen. Independent Fremstilling af nogle höjere Differentialkvotienter. Zeuthen Tidsskr. (4) III. 90-95.

Der Verfasser beweist die folgende Formel

$$\frac{d^n f(\varphi(x))}{dx^n} = \frac{1}{(n)} f^{(n)}\varphi(x)\left[\frac{d^n.(\varphi(z)-\varphi(x))^n}{dz^n}\right]_{z=x}$$
$$+\frac{1}{(n-1)} f^{(n-1)}\varphi(x)\left[\frac{d^n(\varphi(z)-\varphi(x))^{n-1}}{dz^n}\right]_{z=x}+\cdots$$
$$+f'(\varphi(x))\left[\frac{d^n(\varphi(z)-\varphi(x))}{dz^n}\right]_{z=x}$$

und findet mittelst derselben die höheren Differentialquotienten von $f(x)$ für die speciellen Fälle

$$\varphi(x)=x^n,\quad \varphi(x)=e^x,\quad \varphi(x)=l.x,$$

letztere durch Benutzung der bekannten Grundformel

$$e^x=\lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n,\quad l_x=\lim\frac{x^a-1}{a}.$$

Gm.

E. W. Hobson. Proof of Rodrigues' theorem. Messenger (2) IX. 52-53.

Rodrigues' Satz lautet:

$$\frac{1}{(n-m)!}\frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}(x^2-1)^n=(x^2-1)^m\frac{1}{(n+m)!}\frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}(x^2-1)^n.$$

Des Verfassers Beweis beruht auf der Betrachtung der Coefficienten von h^{n-m} und h^{n+m} in dem Product

$$(x-1+h)^n\,(x+1+h)^n.$$

Glr. (O.)

J. W. L. Glaisher. On Rodrigues' theorem. Messenger (2) IX. 55-60.

Geschichte des Satzes von Rodrigues mit Bezugnahme auf die für denselben gegebenen Beweise. Auch wird der Satz bewiesen:

$$\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(x^2+a^2)^{n-\frac{1}{2}}=1^2.3^2\ldots(2n-1)^2\frac{a^{2n}}{(x^2+a^2)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

Glr. (O.)

J. W. L. Glaisher. On a symbolic theorem involving repeated differentiations. Proc. of Cambr. III. 269-271.

Der Satz heisst:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}-a^2\right)^n \frac{e^{ax}}{x} = (-1)^n . 2^n . n! \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n \frac{e^{ax}}{x}.$$

Glr. (O.)

J. W. L. Glaisher. On certain symbolic theorems of Prof. Crofton's. Quart. J. XVI. 257-263.

Herr Glaisher veröffentlicht in diesem Artikel fünf Sätze, die ihm Prof. Crofton ohne Beweise zusandte, mit seinen eigenen Beweisen; nämlich: Wenn $D = \frac{d}{dx}$ und $\exp u = e^u$,

(I.) $$\exp(\tfrac{1}{2}a^2D^2).F(x) = \exp\left(-\tfrac{1}{2}\frac{x^2}{a^2}\right).F(a^2D).\exp\left(\tfrac{1}{2}\frac{x^2}{a^2}\right).$$

(II.) $$\exp(\tfrac{1}{2}x^2).\exp(\tfrac{1}{2}D^2).\exp(\tfrac{1}{2}x^2).F(x)$$
$$= \exp(\tfrac{1}{2}D^2).\exp(\tfrac{1}{2}x^2).\exp(\tfrac{1}{2}D^2).F(x).$$

(III.) $$\exp(-\tfrac{1}{2}x^2).f(D).\exp(\tfrac{1}{2}x^2).F(x)$$
$$= \exp(\tfrac{1}{2}D^2).f(x).\exp(-\tfrac{1}{2}D^2).F(x).$$

(IV.) $$\exp(\tfrac{1}{2}a^2D^2).\exp(\tfrac{1}{2}b^2x^2).F(x)$$
$$= \frac{1}{(1-a^2b^2)^{\frac{1}{2}}}\exp\left(\frac{\tfrac{1}{2}b^2x^2}{1-a^2b^2}\right).\exp\{\tfrac{1}{2}a^2(1-a^2b^2)D\}.F\left(\frac{x}{1-a^2b^2}\right)$$
$$= \frac{1}{(1-a^2b^2)^{\frac{1}{2}}}\exp\left(-\tfrac{1}{2}\frac{x^2}{a^2}\right).F(a^2D).\exp\left(\frac{\tfrac{1}{2}x^2}{a^2(1-a^2b^2)}\right).$$

(V.) $$\Phi\left(\frac{d}{dD}\right).f(D).F(x) = \Phi(x-x').f(D).F(x),$$

(wo x' $f(D)$ vorangeht, x folgt).

Mi.

Crofton. Theorems in the calculus of operations. Quart. J. XVI. 323-332.

Der Artikel Crofton's hängt mit der Publication Glaisher's im Quart. J. XVI. p. 257-263 zusammen. Von Boole's Formeln

(Cambr. Math. J. Ser. 1. Vol. IV.)

$$(1) \qquad f(D+\varphi'x)X = \varepsilon(-\varphi x)f(D)\varepsilon(\varphi x)X\ldots$$

und

$$(2) \qquad f(x+\varphi'D)X = \varepsilon(\varphi D)f(x)\varepsilon(-\varphi D)X\ldots$$

ausgehend, giebt Herr Crofton die Entwickelung von 16 Sätzen ähnlicher Art, die theilweise schon bei Boole und Glaisher vorkommen. Mi.

J. W. L. Glaisher. Certain symbolic theorems derived from Lagrange's series. Quart. J. XVI. 263-268.

Der Artikel enthält 15 aus der Lagrange'schen Reihe unschwer ableitbare Sätze, von denen ein Theil schon von Cayley aufgestellt ist. Mi.

E. Mc Clintock. On a theorem for expanding functions of functions. Am. J. II. 348-353.

Es handelt sich um die Entwickelung von Functionen

$$\psi(f(x),\quad f_1(x),\quad f_2(x)\ldots)$$

unter Anwendung der Symbole des Derivations-Calcüls. Als besonderer Fall des allgemeinen Theorems der Entwickelung ergiebt sich die Formel

$$\varphi(fx) = \varphi a + xD\varphi a + \tfrac{1}{2}x^2D^2\varphi a + \frac{1}{2.3}x^3D^3\varphi a + \cdots,$$

wo

$$fx = a + bx + \tfrac{1}{2}cx^2 + \frac{1}{2.3}dx^3 + \cdots,$$

$$D = b\frac{d}{da} + c\frac{d}{db} + \cdots.$$

Ein specieller Fall ist das Taylor'sche Theorem. Auch ergiebt sich der symbolische Beweis des Theorems von Faa de Bruno (Théorie des formes binaires, Turin 1876, p. 130):

$$\psi(fx, f_1x, \ldots f_{n-1}x, f_nx) = (1 + xD + \tfrac{1}{2}x^2D^2 + \cdots)\ \psi(\alpha, \beta, \ldots \iota, \varkappa),$$

wenn man die Principien des Calculus of Enlargement anwendet.

M.

J. J. WALKER, A. BUCHHEIM. Solutions of a question (5748). Educ. Times XXXI. 34-35.

Wenn x, y, z der Gleichung $\alpha x+\beta y+\gamma z=0$ genügen und $u=0$ eine ternäre Form p^{ter} Ordnung ist, so lässt sich der Ausdruck

$$\beta\gamma^2 y\left\{\frac{d^2u}{dx^2}\left(\frac{du}{dy}\right)^2+\frac{d^2u}{dy^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2-2\frac{d^2u}{dx\,dy}\frac{du}{dx}\frac{du}{dy}\right\}$$
$$+\beta^2\gamma z\left\{\frac{d^2u}{dx^2}\left(\frac{du}{dz}\right)^2+\frac{d^2u}{dz^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2-2\frac{d^2u}{dz\,dx}\frac{du}{dz}\frac{du}{dx}\right\}$$

transformiren in die symmetrische Form:

$$\alpha\beta\gamma\left\{(p-1)\frac{du}{dx}\frac{du}{dy}\frac{du}{dz}+x\frac{d^2u}{dy\,dz}\left(\frac{du}{dx}\right)^2\right.$$
$$\left.+y\frac{d^2u}{dz\,dx}\left(\frac{du}{dy}\right)^2+z\frac{d^2u}{dx\,dy}\left(\frac{du}{dz}\right)^2\right\}.$$

O.

R. RAWSON. Solution of a question (5793). Educ. Times XXXI. 36-37.

Wenn

$$u_i=\left\{\left(\frac{d}{dx}\right)^i f(x)\right\}^2-\frac{A+B_i-B}{A+B_i}\left\{\left(\frac{d}{dx}\right)^{i-1}f(x).\left(\frac{d}{dx}\right)^{i+1}f(x)\right\},$$

und

$$u_i=0,\quad u_{i+1}=0,\ldots\quad u_{i+w}=0,$$

so ist

$$\frac{\left(\frac{d}{dx}\right)^w u_i}{u_{i+w}}=\frac{A+B_{i+w}}{A+B_i}\cdot\frac{\left(\frac{d}{dx}\right)^i f(x)}{\left(\frac{d}{dx}\right)^{i+w}f(x)}.$$

Der Beweis geschieht durch den Schluss von n auf $n+1$.

O.

JOSÉ J. LANDERER. Nuevos métodos para hallar las derivadas y las differenciales de las funciones circulares. Cron. cient. II. 1879. 297-300.

Ch. Forestier. Notice sur la formule de L'Hopital donnant la vraie valeur des fonctions qui prennent la forme indéterminée $\frac{0}{0}$, et nouvelle démonstration de cette formule. Mém. de Toul. (7) X. 482-489.

E. B. Elliott. On duplication of results in maxima and minima. Messenger (2) IX. 121-122.

Der folgende einfache Satz wird bewiesen und auf einige Beispiele angewandt: Die Grössen zweier verbundener veränderlicher Grössen, deren jede ausgedrückt ist in Werthen einer festen Grösseneinheit ihrer eigenen Art, seien A und B. Man nehme ferner an, dass, während die Grösse von A in A' festgehalten wird, der grösste (oder kleinste) Werth, den B annehmen kann, B' ist. Wenn dann das Verhältnis $B':A'$ für alle Werthe von A' constant ist, soll auch gelten, dass, wenn B denselben festen Werth B' behält, der kleinste (oder grösste) Werth, den A annehmen kann, A' ist. Glr. (O.)

D. Besso. Teoremi elementari sui massimi e minimi. Ann. d. Ist. Techn. di Roma 1879.

Es werden eine Reihe von Ungleichheiten auf elementarem Wege bewiesen, aus denen unmittelbar entsprechende Theoreme über das Maximum oder Minimum gewisser Functionen sich ableiten lassen. Zur Illustration dieses Verfahrens möge hier ein Beispiel genügen: Bedeuten $xyz\dots$ und $\alpha\beta\gamma\dots$ positive Grössen, so gilt die Ungleichheit

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{y}{\beta}\right)^{\beta}\left(\frac{z}{\gamma}\right)^{\gamma}\dots<\left(\frac{x+y+z\dots}{\alpha+\beta+\gamma\dots}\right)^{\alpha+\beta+\gamma+\dots}$$

für jedes System von Werthen der $x, y, z\dots$ und $\alpha, \beta, \gamma\dots$ ausser, wenn

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}=\cdots,$$

in welchem Falle die beiden vorstehenden Ausdrücke einander gleich sind. Daraus wird der Satz gefolgert:

Das Maximum der Function $x^\alpha y^\beta z^\gamma \dots$, falls die Summe der positiven Variablen $x, y, z, \dots$ constant ist, und das Minimum der Summe $x+y+z+\cdots$, falls die Function $x^\alpha y^\beta z^\gamma \cdots$ constant ist, tritt ein, sobald

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}=\cdots,$$

welchen Werth auch die positiven Constanten $\alpha, \beta, \gamma \dots$ haben mögen. Hr.

C. Rodenberg. Ueber ein Maximumproblem. Schlömilch Z. XXIV. 63-64.

Die Aufgabe ist: Eine gegebene Zahl so in Summanden zu zerlegen, dass ihr Product ein Maximum wird. Die Bedingung des Maximums ergiebt sofort, dass alle Summanden einander gleich sein müssen. Dann findet man, dass ein solcher $= e$, und das Maximum $= e^{\frac{a}{e}}$ ist. Insbesondere folgt noch, dass das Product integrirender Theile von e stets $< e$ ist. H.

Le Cointe. Sur une question de minimum. Nouv. Ann. (2) XVIII. 23-31.

Die Aufgabe, die in dieser Arbeit behandelt wird, ist folgende: Es seien $X_1, X_2, X_3, \dots X_m$ m lineare Functionen von n Variabeln $x, y, z, \dots w$, so dass

$$X_i = a_i x + b_i y + c_i z + \cdots + k_i w + l_i.$$

Man soll die Summe S der Quadrate von m dieser Functionen finden, so dass dieselbe ein Minimum wird. O.

A. Martin, W. Siverly. Solutions of a question (2191). Educ. Times XXXII. 98.

Bestimmung des grössten Rechtecks, welches einem Cycloidenbogen einbeschrieben werden kann. O.

Capitel 3.

Integralrechnung.

BIRKENMAJER. Algebraische Integration algebraischer Functionen. Poln. Arb. 1879 (Polnisch.)

Dn.

J. R. RYDBERG. Om algebraiska integraler till algebraiska funktioner. Lund Act. Univ. XV.

Siehe Abschn. VII. Cap. 1.

H. GEBHARD. Zur Integration irrationaler Ausdrücke. Grunert Arch. LXIII. 334-336.

Um die Integrale

$$\int P\partial x \quad \text{und} \quad \int \frac{\partial x}{P}$$

zu berechnen, wo

$$P^n = x^n + \sum_{k=1} (-1)^k \frac{n(n-k-1)(n-k-2)\dots(n-2k+1)}{1.2\dots k} p^{2k} x^{n-2k},$$

wird der letztere Ausdruck durch die Substitution $x = p(e^\lambda + e^{-\lambda})$ in

$$P^n = p^n(e^{n\lambda} + e^{-n\lambda})$$

verwandelt. Gemäss den 2 Theilen von

$$\partial x = pe^\lambda \partial\lambda - pe^{-\lambda}$$

zerlegt sich das erstere Integral in

$$F(\lambda) + F(-\lambda),$$

wo

$$F(\lambda) = p^2 \int e^\lambda \sqrt[n]{e^{n\lambda} + e^{-n\lambda}}\, \partial\lambda.$$

Durch die Substitution

$$e^\lambda \sqrt[n]{e^{n\lambda} + e^{-n\lambda}} = v$$

geht dieser Ausdruck über in

$$F(\lambda) = \tfrac{1}{2} p^2 \{v - f(v)\};\; f(v) = \int \frac{\partial v}{1-v^n}.$$

Geht man auf x und P zurück, so wird

$$\int P\partial x = \tfrac{1}{2}\left\{Px+p^2\left[f\left(\frac{Pr_1}{p}\right)+f\left(\frac{Pr_2}{p}\right)\right]\right\},$$

wo r_1 und r_2 die Wurzeln der Gleichung

$$r^2+\frac{x}{p}r+1=0$$

sind. Nach analogem Verfahren findet man:

$$\int\frac{\partial x}{P} = \tfrac{1}{2}\left\{f\left(\frac{pr_1}{P}\right)+f\left(\frac{pr_2}{P}\right)\right\}.$$

H.

W. J. Stringham. Some general formulae for integrals of irrational functions. Am. J. II. 188-190.

Entwickelung des Integrals

$$\int(x+h)^m(X+h)^n\partial x,$$

wo

$$aX+c=\sqrt{a^2x^2+2acx+b^2},$$

für grade und ungrade Exponenten. H.

A. Alexéeff. Intégration des irrationnelles du deuxième degré. C. R. LXXXIX. 403-405.

Eine successive Annäherung an die Quadratwurzel aus einer Zahl N erhält man, indem man nach Zerlegung von N in 2 Factoren a, b diese als erste Näherungswerthe, ihr arithmetisches und harmonisches Mittel, deren Product wieder $=N$ ist, als zweite, u. s. f. betrachtet. Ist dann $\frac{P_n}{Q_n}$ der grössere, $\frac{NQ_n}{P_n}$ der kleinere n^{te} Näherungswerth, so ergiebt sich:

$$2P_n=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{2^n}+(\sqrt{a}-\sqrt{b})^{2^n};\ 3Q_n\sqrt{N}=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{2^n}-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^{2^n}.$$

Von diesem schon früher mitgetheilten Verfahren macht der Verfasser nunmehr Anwendung auf approximative Darstellung eines Integrals von der Form

$$F=\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{N}},$$

dessen n^{ter} Näherungswerth dann folgenden Ausdruck hat:

$$F = 2^{1-n}\int_0^x \frac{a-b}{ab'-ba'}\,\frac{dP_n}{P_n} - \int_0^x \frac{(a'-b')\,dx}{ab'-ba'}$$

mit dem Näherungsgrade von

$$\frac{(a-b)^{2^n}}{P_n Q_n},$$

wo a', b' Differentialquotienten nach x bezeichnen. Er führt die Integration durch an dem Beispiel

$$a = 1-k^2x^2,\quad b = 1-x^2.$$

Sie erfordert indess die Zerlegung in Factoren:

$$P_n = A(x_1^2-x^2)(x_2^2-x^2)\dots(x_q^2-x^2),$$

wo $q = 2^{n-1}$ gesetzt ist. Es ergiebt sich:

$$2qF = \sum_{\mu=1}^{\mu=q} x_\mu \log\left(\frac{x_\mu+x}{x_\mu-x}\right).$$

Dann werden die Logarithmen noch in Reihen nach Potenzen von x entwickelt. H.

R. R. Webb. On an elementary integral. Messenger (2) IX. 124.

Beweis des Satzes: Wenn

$$\frac{d\theta}{1+e\cos\theta} = \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-e^2)}},$$

so ist

$$\frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^{n+1}} = \frac{d\varphi(1-e\cos\varphi)^n}{(1-e^2)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

Glr. (O.)

Closterhalfen. Zur Behandlung der Kubatur der Kugel und einzelner Kugelstücke. Pr. Duisburg.

Die vom Verfasser im Schulunterrichte befolgte Behandlungsweise besteht darin, dass er erst Grenzwerthe von Summen

berechnet, welche die zur Kubatur erforderlichen Integralformeln repräsentiren, dann mittelst derselben die Integration direct und ohne Kunstgriff vollzieht. Von der bekannten, äusserst vereinfachenden geometrischen Transformation wird also kein Gebrauch gemacht. H.

Capitel 4.

Bestimmte Integrale.

V. C. L. M. E. Frakkers. Ondoorloopendheid onder het integraalteeken. Diss. Leiden.

Die Schrift behandelt die Discontinuität unter dem Integralzeichen. Die Anschauungsweisen Poisson's und Cauchy's werden mit Beispielen erläutert. Sodann werden auch einige Untersuchungen Lejeune-Dirichlet's und Riemann's besprochen und der complicirtere Fall behandelt, dass die Discontinuität bei Doppelintegralen vorkommt. Auch die imaginären Functionen werden hierbei eingeführt, doch beschränkt sich der Verfasser auf Cauchy's Methode und fügt nichts Neues zu. G.

P. C. V. Hansen. Om Integration af Differentialer med flere uafhängige variable. Zeuthen Tidsskr. (4) III. 165-170.

Wie für eine einzige veränderliche Grösse das bestimmte Integral mit gewissen Beschränkungen als die Summe seiner einzelnen Elemente aufgefasst werden kann, so ist dasselbe auch für ein Integral von einem Differential mit mehreren Variablen der Fall. Der Kürze wegen beschränkt der Verfasser seinen Beweis, der übrigens ganz allgemein geführt werden kann, auf den Fall dreier Variablen. Die Methode ist dieselbe, welche in der Theorie complexer Variabeln angewandt wird. Von besonderem Interesse dürfte das Resultat sein, dass unter gewissen

Bedingungen auch hier der Integrationsweg geändert werden kann, ohne den Werth des bestimmten Integrales zu verändern.

Gm.

G. Helm.*) Ueber die partielle Summation. Schlömilch Z. XXII. 400-402. 1877.

Der Herr Verfasser zeigt, wie sich die Formel für die partielle Summation

$$\sum_a^b \alpha_n\beta_n = \sum_a^b s_n(\beta_n-\beta_{n+1}) + s_b\beta_{b+1} - s_{a-1}\beta_a, \quad (s_n = \sum_k^n \alpha_m, \; k<a)$$

nicht blos zur Herleitung der Formel für die partielle Integration, sondern auch zur Ableitung verschiedener anderer Sätze aus der Theorie der bestimmten Integrale und verwandten Gebieten benutzen lässt. So ergiebt sich aus ihr der Du Bois-Reymond'sche Satz:

$$\int_a^b\left(\varphi\int_a^x fdx\right)dx = -\int_a^b\left(f\int_a^x \varphi dx\right)dx + \int_a^b fdx.\int_a^b \varphi dx,$$

für den Herr Thomae (Schlömilch Z. XX. 475 s. F. d. M. VII. 1875. p. 145) zwei Beweise gegeben hat; ferner der bekannte Mittelwerthsatz:

$$B\int_a^b \varphi\, dx > \int_a^b \varphi\psi\, dx > \beta\int_a^b \varphi\, dx,$$

oder falls ψ stetig,

$$\int_a^b \varphi\psi\, dx = \psi(M).\int_a^b \varphi\, dx;$$

und endlich der Du Bois-Reymond'sche Satz:

$$\int_a^b \varphi\psi\, dx = \psi(a)\int_a^\mu \varphi dx + \psi(b)\int_\mu^b \varphi dx$$

(s. Crelle J. LXIX. 81, F. d. M. I. 1868; Schlömilch Z. XIV. 436; Clebsch Ann. VI. 313).

M.

---

*) Die obige Arbeit ist durch einen von der Redaction nicht ververschuldeten Zufall im Jahre 1877 nicht berücksichtigt worden. Das Referat wird daher hier nachgeholt.

O.

E. Beltrami. Intorno ad una formola integrale.
Rend. Ist. Lomb. (2) XII. 421-426.

Für die in der Theorie der Kugelfunctionen vorkommende Gleichung

$$\int_0^\pi (z-\cos\zeta\sqrt{z^2-1})^n d\zeta = \int_0^\pi \frac{d\varphi}{(z+\cos\varphi\sqrt{z^2-1})^{n+1}}$$

wird ein neuer Beweis gegeben. Ist ζ complexe Function des reellen φ, bestimmt durch die Relation

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = i\operatorname{tg}\frac{\zeta}{2},$$

wo γ constante Complexe, so ergiebt sich direct, dass für ein beliebiges n

$$\left(\frac{\pm i\sin\gamma}{\cos\gamma+\cos\varphi}\right)^{n+1} d\varphi = \mp\left(\frac{\cos\gamma-\cos\zeta}{\pm i\sin\gamma}\right)^n d\zeta.$$

Die Integrale dieser 2 Grössen sind für

$$\cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{z^2-1}}$$

die obigen; es bleibt nur zu beweisen, dass, dem reellen Intervall von φ entsprechend, auch ζ nur dieselben reellen Werthe zu durchlaufen braucht. Setzt man

$$\gamma = \alpha+i\beta,\quad \zeta = \xi+i\eta,$$

so beschreibt der Punkt (ξ, η), während φ reell variirt, die Curve

$$\sin\alpha\sin\xi+\sinh\beta\sinh\eta = 0,$$

welche die reelle Axe in den Punkten $\xi = k\pi$ schneidet. Man kann dann für diesen Lauf die geradlinigen $\eta = 0$ zwischen 2 successiven Schnittpunkten substituiren, wenn nicht besondere Umstände stattfinden, deren Vorhandensein der Verfasser durch Betrachtungen ausschliesst. H.

P. du Bois-Reymond. Détermination de la valeur-limite d'une intégrale qui se présente dans la théorie des séries trigonométriques. Darboux Bull. (2) III. 343-352.

Das Integral, vom Herrn Verfasser auch in Clebsch Ann. VII. p. 257 (siehe F. d. M. VI. 1874. p. 240) betrachtet,

$$J=\int_0^{2\pi}\frac{(1-\varepsilon^2)f(\theta)\,d\theta}{1-2\varepsilon\cos(\theta-\alpha)+\varepsilon^2}\quad(1>\varepsilon>0)$$

hat für $\lim\varepsilon=1$ den Grenzwerth

$$\pi\,[\lim f(\alpha-\delta)+\lim f(\alpha+\delta)]\quad(\lim\delta=0),$$

falls $0<\alpha<2\pi$;

$$\pi\,[\lim f(\delta)+\lim f(2\pi-\delta)],$$

falls $\alpha=0$ ist. Ausreichende Bedingungen für die Gültigkeit des Satzes sind die Endlichkeit und Integrabilität von $f(\theta)$ im Intervalle 0 bis 2π und die Existenz der Grenzwerthe $\lim f(\alpha-\delta)$ und $\lim f(\alpha+\delta)$. St.

Ch. Hermite. Sur l'intégrale $\int_0^{2\pi} f(\sin x.\cos x)\,dx$.

Jorn. d. sc. mat. e astr. II. 65-67.

W. H. Russell. On certain definite integrals. Nr. 5.

Proc. of London XXIX. 361-363.

Fortsetzung der vier früheren Arbeiten (s. F. d. M. X. 1878. p. 209). Die Resultate gehen von Nr. 86 bis 100. Cly. (O.)

D. J. McAdam and C. H. Kummell. Solution of a problem. Analyst VI. 30-47.

Beweis, dass

$$\int_0^{\pi}\frac{\cos\frac{1}{2}(n-1)(\theta+\pi)\,.\,\sin\frac{1}{2}n(\theta+\pi)}{\sin\frac{1}{2}(\theta+\pi)}\,d\theta=\pi.$$

Glr. (O.)

T. R. Terry, H. Stabenow, Wolstenholme. Solutions of a question (5986). Educ. Times XXXII. 52-54.

Ist n eine positive ganze Zahl, $\alpha<\frac{\pi}{2}$ und $1+x\sin\alpha>0$, so ist

$$\int_0^{\alpha}\frac{\sin^{n-2}\theta(n-1-n\sin^2\theta-x\sin\theta)\,d\theta}{(1+x\sin\theta)^{n+1}}=\frac{\cos\alpha\sin^{n-1}\alpha}{(1+x\sin\alpha)^n}.$$

O.

R. Rawson. Solution of a question (5718). Educ. Times XXXII. 83-86.

Beweis, dass

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\log\operatorname{tang} x)^2\, dx = 1.2\ldots 2n\left(1 - \frac{1}{3^{2n+1}} + \frac{1}{5^{2n+2}} - \frac{1}{7^{2n+2}} + \cdots\right),$$

und Behandlung einiger sich daran anknüpfender Fragen.

O.

A. Liwenzoff. Ueber einige bestimmte Integrale. Mosk. Math. S. IX. 565-569.

Es handelt sich um die Auswerthung einiger Integrale von der Form

$$\int_a^b F(z)\,(z-a)^\alpha\,(z-b)^\beta\, dz,$$

wo $F(z)$ endlich und eindeutig auf der Strecke (ab) ist und α, β complexe Grössen sind, deren reeller Theil > -1. P.

Laguerre. Sur l'intégrale $\int_x^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{x}$. Bull. S. M. F. VII. 72-81.

Der rationale Bruch $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ ist dadurch bestimmt, dass er von der Function

$$F(x) = \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}$$

für $x = \infty$, wenn $f(x)$ vom Grade $m \overline{\gtrless} \frac{n}{2}$, nur in der Ordnung $\frac{1}{x^{2m+1}}$ differirt. Es wird bewiesen, dass dann $y = f(x)$ und

$$u_m = \varphi(x) e^{-x} - f(x) \int_x^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{x}$$

Lösungen der Gleichung

$$xy'' + (x+1)y' - my = 0$$

sind, und zwar findet man:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{k=m} \frac{m^2(m-1)^2 \ldots (m-k+1)^2}{k!} x^{m-k}.$$

Die m^{te} Derivation der Differentialgleichung ergiebt eine Lösung in der Form:

$$y = \frac{B}{m!} \int_x^{\infty} \frac{e^{-z}(z-x)^m}{z^{m+1}} dz \quad (B \text{ const.})$$

und nach Identificirung:

$$u_m = -m! \int_x^{\infty} \frac{e^{-z}(z-x)^n}{z^{m+1}} dz.$$

Ferner wird aus der Differentialgleichung die Relation hergeleitet:

$$u_{m+1} = (x+2m+1)\, u_m - m^2 u_{m-1};$$

in derselben Relation stehen dann auch die f und φ. Ihr gemäss kann man u_0 in einen Kettenbruch entwickeln, dessen Nenner sind

$$x+1, \quad x+3, \quad \frac{x+5}{4}, \quad \frac{x+7}{9}, \ldots;$$

es folgt der Beweis, dass derselbe convergirt. Ferner ergiebt sich, dass die Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ reell, ungleich und negativ sind. Dies geht aus der Gleichung

$$\int_{-\infty}^{0} e^x f_n(x)\, \psi(x)\, dx = 0$$

hervor, wo $\psi(x)$ ein Polynomen von niederem als dem n^{ten} Grade ist. Insbesondere folgt daraus:

$$\int_{-\infty}^{0} e^x f_n^2(x)\, dx = (n!)^2.$$

Eine beliebige Function lässt sich in eine Reihe der Form entwickeln:

$$\Phi(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{f_n(x)}{(n!)^2} \int_{-\infty}^{0} e^x f_n(x)\, \Phi(x)\, dx.$$

Hiervon wird auf specielle Functionen Anwendung gemacht.

H.

C. Hermite. Sur l'intégrale $\int_0^1 \frac{z^{a-1}-z^{-a}}{1-z}\,dz$.

Atti di Torino XIV. 91-116.

Das genannte Integral, welches bekanntlich $=\pi\cot a\pi$, wird entwickelt in der Form S_n+R_n, wo

$$S_n = \sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{1}{a+k-1}-\frac{1}{k-a}\right),$$

$$R_n = \int_0^1 \frac{z^{a-1}-z^{-a}}{1-z}\,z^n\,dz\,,$$

und für imaginäres $a=\alpha+i\beta$ die Convergenz der Reihe S dadurch bewiesen, dass für den Modul des Restes die obere Grenze

$$\frac{\sqrt{(1-2\alpha)^2+4\beta^2}}{n-\text{abs.}\alpha}$$

ermittelt wird. Setzt man ia für a und λa für n, so wird S_n für $a=\infty$ unbestimmt, nämlich $=-2i\,\text{arctg}\,\lambda$, dagegen

$$\lim(R_n+S_n) = -\ i\,\text{arctg}\,\lambda - 2i\,\text{arctg}\,\frac{1}{\lambda} = -i\pi$$

unabhängig von λ. Aus der Reihe für $\pi\cot a\pi$ wird nun in bekannter Weise durch Integration die Reihe für $\log\sin a\pi$, und so die Factorenreihe für $\sin a\pi$ hergeleitet; es handelt sich um Bestimmung des Restes, resp. restirenden Factors. Ersterer findet folgenden Ausdruck:

$$\text{mod.}\ R_n' = \frac{n(1-2\alpha)^2}{4(n-\text{abs.}\alpha)} + \frac{\varepsilon(4\beta^2+1)}{4n}\,,$$

wo ε eine Grösse zwischen 0 und 1, und zwar hat man dann:

$$\sin a\pi = \frac{e^{R_n'}}{1+\frac{a}{n}}\,\pi a\prod_{k=1}^{k=n}\left(1-\frac{a^2}{k^2}\right).$$

Die beiden Reste werden dann unter gemeinsamer Form behandelt und entwickelt:

$$\int_{-\infty}^{0}\Phi(x)\,e^{nx}\,dx = S_i \pm \frac{1}{n^i}\int_{-\infty}^{0}\Phi^i(x)\,e^{nx}\,dx,$$

$$S_i = \sum_{k=0}^{k=i-1}(-1)^i\,\frac{\Phi^k(0)}{n^{k+1}}\,.$$

Diese Entwickelung wird angewandt zur Herleitung der Formel:

$$\log\Gamma(a) = (a-\tfrac{1}{2})\log a - a + \log\sqrt{2\pi} + \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x(2-x)-2-x}{x^2(1-e^x)}\, e^{ax}\, dx,$$

welche zuerst für ganze Zahlen a leicht hervorgeht, dann für beliebige a gefolgert wird. Die Formel ist von Binet; für $a=\infty$ fliesst daraus eine Grenzwerthbestimmung von Laplace, wo nur der Rest fehlt. Sie bildet auch den Gegenstand einer Untersuchung von Cauchy, welche nach der gegenwärtigen Methode bedeutend abgekürzt wird. H.

LAGUERRE. Sur l'intégrale $\int_0^z z^n e^{-\frac{z^2}{2}+zx} dz$.

Bull. S. M. F. VII. 12-16.

Die ganzen Functionen

$$\Theta_n(z,x),\ U_n(x),\ V_n(x)$$

sind definirt durch die Entwickelung des Integrals

$$\int_0^z z^n e^{-\frac{1}{2}z^2+zx} dz = -e^{-\frac{1}{2}z^2+zx}\Theta + U_n\int_0^z e^{-\frac{1}{2}z^2+zx} dz + V_n,$$

und zwar muss sein $V_n = \Theta_n(0,x)$. Es ergiebt sich durch Anwendung der derivirten Gleichung auf $n = 0, 1, 2, \dots$

$$U_{n+1} = xU_n + nU_{n-1};\quad \Theta_{n+1} = z^n + x\Theta_n + n\Theta_{n-1}.$$

Die U sind die Coefficienten der Entwickelung

$$e^{\frac{1}{2}z^2+zx} = \sum_{n=0} U_n \frac{z^n}{n!}.$$

Hermite hatte in den C. R. LVIII. eine Reihe entwickelt, von der dies ein besonderer Fall ist.

Ferner werden die Relationen hergeleitet:

$$\Theta_{n+1} = z\Theta_n + \frac{d\Theta_n}{dx} + U_n;\quad U_{n+1} = xU_n + \frac{dU_n}{dx};$$

$$V_{n+1} = \frac{dV_n}{dx} + U_n.$$

Die U_n sind ferner, wie Hermite gezeigt, Lösungen der Gleichung

$$y'' + xy' - ny = 0,$$

und ebenso sind die $H_n = e^{-\frac{1}{2}x^2+zx}\Theta_n$ Lösungen der Gleichung

$$y''+xy'-ny = e^{-\frac{1}{2}x^2+zx}\left(z^{n+1}-zU_n-2\frac{dU_n}{dx}\right).$$

Ferner ergiebt sich die Reihenentwickelung:

$$\Theta_{n+1} = \sum_{m=0}^{m=n} U_m \sum_{\mu=0}^{\mu=\frac{1}{2}(n-m)} (m+\mu)_\mu\,(n-m-\mu)\,(n-m-\mu-1)+\cdots$$
$$+(n-m-2\mu-1)\,z^{n-m-\mu}.$$

Indem man $z=\infty$ setzt, erhält man noch nach einigen Transformationen:

$$\int_{-\infty}^{x}(x-t)^n e^{-\frac{1}{2}t^2}dt = U_n\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{1}{2}t^2}dt+V_n e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

H.

P. Bachmann. Ueber einige bestimmte Integrale.
Clebsch Ann. XV. 424-432.

Aus mehreren bestimmten Integralen für complexe Integrationsvariabeln werden viele einzelne reelle Integralformeln hergeleitet, in allgemeiner Form neu, während auch bekannte Formeln von Poisson, Kummer, Schlömilch und ältere wieder erscheinen. Als Beispiele mögen folgende genannt werden:

$$\int_0^\infty e^{-\varrho^m\cos m\alpha}\cos(\alpha-\varrho^m\sin m\alpha)\,d\varrho = \frac{1}{m}\Gamma\left(\frac{1}{m}\right),$$

$$\int_0^\infty e^{-\varrho^m\cos m\alpha}\sin(\alpha-\varrho^m\sin m\alpha)\,d\varrho = 0$$

vermehrt durch wiederholte Differentiation nach α; dann eine Reihe von Formeln, die sich aus dem Integral

$$\int\frac{e^{azi}\,dz}{z^{2n}+b^{2n}}$$

ergeben, u. a. das specielle Resultat:

$$\int_0^1\frac{ydy}{1-y^4}\left(e^{-ky}\cos ky-e^{-\frac{k}{y}}\cos\frac{k}{y}\right)=\frac{\pi}{4}e^{-k}\sin k.$$

H.

O. Callandreau. Sur une intégrale définie.
C. R. LXXXIX. 90-92.

Eine Erweiterung des von Appell in den C. R. LXXXVII. 874 (siehe F. d. M. X. 1878. p. 207) gegebenen Theorems ist das folgende. Das Integral

$$\int_0^1 \left(A+\frac{B}{x}+\frac{C}{1-x}\right) x^{\frac{\gamma+\gamma'}{2}-1}(1-x)^{\frac{\alpha+\alpha'}{2}+\frac{\beta+\beta'}{2}-\frac{\gamma+\gamma'}{2}} \times F(\alpha,\beta,\gamma,x)\,F(\alpha',\beta',\gamma',x)\,dx,$$

wo

$$A=\left(\frac{\alpha+\alpha'}{2}-\frac{\beta+\beta'}{2}\right)\left(\frac{\beta-\beta'}{2}-\frac{\alpha-\alpha'}{2}\right),$$

$$B=\frac{\gamma-\gamma'}{2}\left(\frac{\gamma+\gamma'}{2}-1\right),$$

$$C=\left(\frac{\gamma-\gamma'}{2}-\frac{\alpha-\alpha'}{2}-\frac{\beta-\beta'}{2}\right)\left(\frac{\gamma+\gamma'}{2}-\frac{\alpha+\alpha'}{2}-\frac{\beta+\beta'}{2}\right)$$

ist und F die Gauss'sche Function bezeichnet, lässt sich im allgemeinen auf Functionen Γ zurückführen. Das Theorem wird aus der Differentialgleichung, welcher die Gauss'sche Function genügt, hergeleitet. Das Theorem von Appell entspricht dem Falle:

$$\gamma-\alpha-\beta=\gamma'-\alpha'-\beta'=m;\quad 1>m>0;\quad \gamma=\gamma'.$$

H.

Appell. Sur la série hypergéométrique et les polynômes de Jacobi. C. R. LXXXIX. 31-33.

Der Herr Verfasser giebt fernere Anwendungen für das in einer früheren Note (C. R. LXXXVII. 874; s. F. d. M. X. 1878. p. 207) ausgewerthete bestimmte Integral. Sie betreffen die Entwickelung der hypergeometrischen Function $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ nach den Jacobi'schen Polynomen

$$X_m = F(\alpha+\beta+m,\ -m,\ \gamma,\ x),$$

und die Entwickelung einer Function von der Form

$$\Sigma A_m F(a+m,\ -m,\ b,\ x),$$

wo die Summation sich auf alle Werthe m erstreckt, welche Wurzeln der Gleichung

$$\varphi(m) = \frac{\Gamma(-m).\Gamma(a+m)}{\Gamma(b+m).\Gamma(b-a-m)}$$

sind. M.

A. F. Entleutner. Entwickelung aller Eigenschaften der Logarithmen und Kreisfunctionen aus dem bestimmten Integral. Grunert Arch. LXIII. 225-266.

Der Begriff des Integrals, definirt als Grenzwerth der Summe seiner Elemente, mithin in seiner Abhängigkeit vom ganzen Integrationswege, wird zu Grunde gelegt und auf $\int \frac{du}{u}$ angewandt, anfänglich mit Abwechselung reeller und rein imaginärer Incremente operirt, um die möglichen Differenzen des Resultats bei allein festen Grenzen auf Vielfache von $2\pi i$ zurückzuführen; dann wird bewiesen, dass eine gleichzeitige Variation keinen andern Werth ergiebt. Die elementaren Eigenschaften der Function werden dann hergeleitet. Die Darstellung des Logarithmus der Complexen in der Form $A+Bi$ liefert ferner die Definition von arctg in der Integralform, deren Eigenschaften nur einer etwas umständlichen Discussion zur Aufstellung bedürfen. Ausserdem geht daraus bei Umkehrung der Functionen der Werth von e^{ix} hervor. H.

P. Helmling. Anwendung der Determinanten zur Darstellung transcendenter Functionen. Universitätsschrift. Dorpat. 1876.

I. Für die Integrale

$$P_m = \int_0^r e^{x^n e^{\mu i}} (r^n - x^n)^m \, dx,$$

wo m eine ganze Zahl $\geqq 0$, n eine beliebige positive Zahl bedeutet, ergeben sich die Recursionsgleichungen

$$n.e^{\mu i}P_m - (nr^n e^{\mu i} + (m-1)n+1)P_{m-1} - (m-1)nr^n P_{m-2} = 0, \quad (m \geqq 2),$$
$$n.e^{\mu i}P_1 - (nr^n e^{\mu i} + 1)P_0 + re^{r^n}.e^{\mu i} = 0.$$

Aus denselben lässt sich P_0 herstellen als Quotient zweier Determinanten vermehrt um ein Restglied mit dem Factor P_m, welcher in eine Reihe von Potenzen von $r^n e^{\mu i}$ entwickelt wird. Die genannten Determinanten erscheinen als ganze Functionen von $nr^n e^{\mu i}$, deren Coefficienten für den Zähler durch Recursionsformeln berechnet werden müssen. Auf ähnliche Weise wird auch das Integral

$$\int_0^r e^{-x^n e^{\mu i}} dx$$

behandelt.

II. Ein ähnliches Verfahren lässt sich anwenden, wenn die zu Grunde liegenden Recursionsgleichungen nicht trinomisch sind, so dass an die Entwickelung in einen Kettenbruch nicht mehr gedacht werden kann. Ein Beispiel dieser Art bietet das Integral

$$\int_0^r e^{-(x^n+s)^2} dx,$$

worin s eine complexe Zahl sein kann.

III. Berechnung des Integrales

$$\int_r^\infty e^{-(x^n+s)^2} dx$$

nach derselben Methode.

Es wird noch bemerkt, dass die Functionen

$$y = e^{\Psi}.\int^\infty e^{-au^{2n} \pm Xu^n} du,$$

worin Ψ, X beliebige Functionen von x bedeuten, derselben linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügen, so dass dadurch ihr vollständiges Integral gefunden ist. St.

A. Liwenzoff. Ueber approximative Quadraturen.
Mosk. Math. S. IX. 569-573.

Es wird die obere Grenze für den absoluten Betrag des Restes $\varDelta$ in der Formel

$$\int_0^a F(x)f(x)\,dx = \Sigma \frac{P_n(\alpha_i)}{Q_n(\alpha_i)} F(\alpha_i) + \varDelta$$

gegeben. Hier ist $\frac{P_n(z)}{Q_n(z)}$ der n^{te} Näherungsbruch in der Kettenbruchentwickelung von

$$\int_0^a \frac{f(x)}{z-x}\,dx;$$

während $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ die n Wurzeln der Gleichung $Q_n(z) = 0$ sind.
P.

R. Tomachevitch. Déduction d'une formule générale pour représenter la dérivée numérique d'une intégrale numérique de diviseurs. Mosk. Math. S. IX. 546-550.
P.

P. G. Tait. On methods in definite integrals. Proc. of Edinb. 1878-1879. 271.

Die Arbeit beschäftigt sich mit verschiedenen Formeln für bestimmte Integrale, welche im Allgemeinen in eine Form gebracht sind, in welcher sie mittelst einer Anzahl unendlicher Reihen summirt werden können. Als einfaches Beispiel giebt der Verfasser

$$\int_0^a f'x\,.da \int_0^x \frac{\varphi' y\,dy}{fa - fy} = \varphi a - \varphi 0.$$

Cly. (O.)

V. Sersawy. Discussion eines mehrfachen Integrales. Grunert Arch. LXIV. 30-46.

Das untersuchte Integral ist

$$\int_0^\infty du \int_a^b f(x) \cos[u\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx,$$

wo $\varphi(x)$ reell und stetig und nebst $f(x)$ eindeutig und endlich ist. Das Intervall a zu b wird in unendlich viele unendlich kleine Theile zerlegt. Es zeigt sich, dass alle Theilintegrale verschwinden, in deren Intervallen $\varphi(x)$ nicht über Null hinweg variirt. Infolge dieses Umstands lässt es sich dazu verwenden, Sätze über die Wurzeln der Gleichung $\varphi(x) = 0$ herzuleiten; z. B. drückt es für $f(x) = 1$ deren Anzahl zwischen a und b aus. Ausserdem werden mehrere Sätze von Sturm daraus entnommen.

H.

W. D. Niven. On certain definite integrals occurring in spherical harmonic analysis and on the expansion in series of the potentials of the ellipsoid and the ellipse. Phil. Trans. CLXX. 379-416.

Den Satz, auf dem die Methode beruht, erhält man durch die Integration von

$$\iint e^{\alpha x+\beta y+\gamma z}\, dS$$

über die Fläche einer Kugel, deren Mittelpunkt Anfangspunkt der Coordinaten ist und deren Radius R ist. Durch Veränderung der Axen nimmt das obige Integral die Form

$$2\pi R \int_{-R}^{R} e^{x\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}\, dx$$

an. Der Werth desselben ist gleich

$$2\pi R\, \frac{e^{R\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}} - e^{-R\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}.$$

Als Reihe dargestellt heisst es:

$$2\pi R^2 \Big\{1 + \frac{R^2}{1.2.3}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) + \cdots + \frac{R^{2i}}{1.2\ldots(2i+1)}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^i + \cdots\Big\}.$$

Wenn daher V eine Function ist, deren Werthe für alle Punkte innerhalb der Kugel durch eine convergente Reihe nach dem Taylor'schen Satze oder durch die symbolische Form

$$e^{x\frac{d}{dx_0}+y\frac{d}{dy_0}+z\frac{d}{dz_0}}V_0$$

ausgedrückt werden können, so ist das Integral $\iint VdS$ erstreckt über die Fläche der Kugel gleich:

$$4\pi R^2\sum_0^\infty \frac{R^{2i}}{1.2\ldots(2i+1)}\cdot\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}+\frac{d^2}{dz^2}\right)^i V_0.$$

Der entsprechende Satz für zwei Dimensionen wird ebenfalls benutzt. Die Methode wird dann angewandt auf verschiedene Integrale, die von der Legendre'schen Function P_m abhängen, einschliesslich des Integrals

$$\iint P_p.P_q.P_r\,dS,$$

das Herr Ferrers in seinem „Treatise on spherical harmonics" gegeben hatte, und des ähnlichen Integrals

$$\iint P_p\,P_q\,P_r\,P_s\,dS$$

(welches bisher nur in Form einer Reihe bekannt war). Ferner werden in eine Reihe von Kugelfunctionen dargestellt die Potentiale 1) einer ellipsoidischen Schale, 2) eines vollen Ellipsoids, 3) einer elliptischen Platte von gleichförmiger Dichtigkeit, 4) eines elektrischen Stromes in einem elliptischen Leiter.

Cly. (O.)

E. B. Elliott, A. W. Cave, Wolstenholme, R. Rawson. Solution of a question (5929). Educ. Times XXXII. 50-52.

Der Flächeninhalt der Fusspunktcurve eines geschlossenen Ovals von einem innern Punkte übertrifft den Flächeninhalt der Fusspunktcurve ihrer Evolute von demselben Punkte um den Flächeninhalt des Ovals. O.

K. Broda. Bestimmung des Inhalts von Fässern. Pr. Karolinenthal

Es werden zuerst 6 Schriften über den Gegenstand auf-

geführt, dann durch Integration die Kubaturen vollzogen, wenn die Erzeugende der Rotationsfläche eine Conchoide, ein Kreis, eine Ellipse, eine Parabel ist, zuletzt der Inhalt elementar, nämlich durch Grenzeneinschliessung, bestimmt. H.

K. ZAHRADNIK. Ueber die Masse des dreiaxigen Ellipsoides. Casopis VIII. 188-189. (Böhmisch).

Enthält eine Integrationsübung. Std.

Capitel 5.

Gewöhnliche Differentialgleichungen.

W. HEYMANN. Bemerkungen zur Differentialgleichung
$$x\varphi(y)+y\psi(y')+\chi(y')=0.$$
Schlömilch Z. XXIV. 252-255.

Die der Ersetzung von Punktcoordinaten durch Liniencoordinaten ähnliche Substitution $x=\frac{dv}{du}$, $y=u\frac{dv}{du}-v$, $y'=u$ ist beachtenswerth, wenn dadurch eine Differentialgleichung $f(x,y,y')=0$ in eine andere $F\left(u,\ v,\ \frac{dv}{du}\right)=0$ transformirt wird, deren Integralgleichung $F_1(u,v,c)=0$ angebbar ist. Um die Integralgleichung der ursprünglichen Gleichung zu finden, hat man dann nur u aus den beiden Gleichungen
$$F(u,ux-y,x)=0 \quad \text{und} \quad F_1(u,ux-y,c)=0$$
zu eliminiren. Dies Princip wird auf die Differentialgleichung
$$x\varphi(y)+y\psi(y')+\chi(y')=0,$$
die als speciellen Fall die Differentialgleichung
$$\sum_{i=0}^{n}(a_ix+b_iy+c_i)\,y'^{n-i}=0$$
umfasst, angewendet, in welchem es zu einer linearen Differentialgleichung zwischen u und v führt. Der allgemeinere Fall,

dass $\chi(y')$ mit dem Factor $(xy'-y)^m$ behaftet ist, gestattet dieselbe Integrationsmethode mit dem Unterschiede, dass dann die Integralgleichung im Allgemeinen nicht mehr nach der willkürlichen Constante algebraisch auflösbar ist. Illusorisch wird die Methode im Falle $\varphi(x) = -x\psi(x)$; dann reducirt sich aber die Differentialgleichung auf die unter dem Namen der Clairaut'schen bekannte. T.

Julius Möller. Integration af differential-eqvationer $F\left(u, \frac{du}{dz}\right) = 0$ med dubbelperiodiska funktioner.

Lund. Ak. Afh. 1879.

Wenn die durch die genannte algebraische Differentialgleichung definirte Function u und folglich auch ihre Derivirte $\frac{du}{dz}$ einwerthige doppeltperiodische Functionen von z sind, so muss bekanntlich die die Gleichung $F(x, y) = 0$ darstellende Curve vom Geschlechte 1 sein, und folglich ihre Coordinaten sich in der Form

$$x = u = \frac{\varphi_m(\alpha) \pm \varphi_{m-2}(\alpha)\cdot\sqrt{f_4(\alpha)}}{f_m(\alpha)},$$

$$y = \frac{du}{dz} = \frac{\varphi_n(\alpha) \pm \varphi_{n-2}(\alpha)\cdot\sqrt{f_4(\alpha)}}{f_n(\alpha)}$$

ausdrücken lassen, wo α ein veränderlicher Parameter ist, und die Ordnungen der ganzen Functionen φ und f von ihren Indices angegeben werden. Dieser Parameter muss aber selbst eine doppeltperiodische Function von z sein, und zwar von der zweiten Ordnung. Man erhält also, durch Differentiation der ersten der obigen Gleichungen und Elimination von u,

$$\left(\frac{d\alpha}{dz}\right)^2 = f_4(z),$$

wodurch α bestimmt wird. Durch gewöhnliche Transformation wird darnach α und damit u entweder in $\lambda(z)$ oder in der Weierstrass'schen Function $\wp(z)$ ausgedrückt.

Die erste vom Verfasser behandelte Gleichung

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^3+3\left(\frac{du}{dz}\right)^2+u^6-4=0$$

wird sowohl mittelst $\lambda(z)$, als $\wp(z)$ integrirt. Im ersten Falle erhält man

$$u=\frac{(2-\sqrt{3})(i\sqrt{3}-1)(1+\sqrt{3}-2.\lambda)\lambda'}{[(11\sqrt{3}-19)\lambda^2+\sqrt{3}-1](\lambda-1)},$$

im zweiten

$$u=-\frac{27\wp\wp'}{2(27\wp^3+1)},$$

In seinen übrigen vier Beispielen macht der Verfasser nur von der Weierstrass'schen Function Gebrauch. Bg.

P. Helmling. Ueber die Integration der allgemeinen Riccati'schen Gleichung $\frac{dy}{dx}+y^2=X$ und der von ihr abhängigen Differentialgleichungen. Jubiläumsschr. Dorpat. Schnakenburg. Leipzig. C. A. Koch. (J. Sengbusch).

Von der Bemerkung ausgehend, dass das Integral der „allgemeinen Riccati'schen Differentialgleichung“ $y'+y^2=X$ (eine beliebige Function von x) im Allgemeinen in endlicher Form nicht darstellbar ist, eine Reihenentwickelung hierfür aber an der Convergenzfrage scheitert und selbst in den speciellen Fällen, wo Convergenz eintritt, zur wirklichen Anwendung wenig oder gar nicht geeignet ist, dass endlich auch mit der durch bestimmte Integrale zu bewerkstelligenden Summation eines, wenn auch beträchtlichen Theils der Maclaurin'schen Reihe, die man auf die Differentialgleichung anwenden kann, hierfür wenig geholfen ist, stellt sich der Herr Verfasser das Problem, die Gleichung auf dem Wege der Näherung zu lösen, d. h. für y eine solche mit einer willkürlichen Constante behaftete Function von x zu finden, dass sie den Ausdruck $y'+y^2-X$ auf einen sehr kleinen Rest reducirt.

Die in Rede stehende Gleichung ist darum von besonderer Bedeutung, weil auf ihre Integration die von drei Classen von

Differentialgleichungen zurückgeführt werden kann, nämlich

$$\alpha)\ y'+X_0+X_1y+X_2y^2 = 0, \qquad \beta)\ X_0y''+X_1y'+X_2y = 0,$$

$$\gamma)\ \sum_{i=0}^{n}(a_i+b_ix+c_ix^2)\frac{d^iy}{dx^i} = 0,$$

wo $X_0\ X_1\ X_2$ ganz beliebige Functionen von x und a_i, b_i, c_i Constante sind. Die hierzu nothwendigen Transformationsformeln werden im I. Abschnitt der Abhandlung geliefert. Im II. Abschnitt wird eine umfassende specielle Art der allgemeinen Riccati'schen Gleichung in endlicher Form integrirt, dabei aber hervorgehoben, dass die Form auch dieser Resultate insofern nicht befriedige, als die verlangten Quadraturen sich nicht allgemein ausführen lassen, und schliesslich gezeigt, wie aus einem particulären Integral der allgemeinen Riccati'schen Gleichung das allgemeine sofort herzustellen ist.

Dem eigentlichen Zwecke der Arbeit ist der III. Abschnitt gewidmet; hierbei erfordern die Fälle einer positiven oder negativen Function X eine gesonderte Behandlung. Das Princip des Näherungsverfahrens beruht z. B. für den ersten Fall auf Folgendem: Setzt man $X = \xi_1^2$, ferner

$$\sqrt{\xi_1^2-\xi_1'} = \xi \quad \text{und} \quad \xi_1' - \frac{d}{dx}\sqrt{\xi_1^2-\xi_1'} = X_1,$$

so ist $X = \xi'+\xi^2+X_1$ und, da X_1 in den meisten Fällen ein sehr kleiner echter Bruch sein wird, ξ ein genähertes particuläres Integral und X_1 ein „Rest der ersten Ordnung." Dem ξ entspricht ein genähertes allgemeines Integral mit demselben Reste X_1. Eine wiederholte Variation der Constanten bringt die Annäherung auf einen hohen Grad, die sich in jedem Falle durch Angabe des Restausdrucks genau beurtheilen lässt. Behufs Schätzung der auftretenden complicirten Integrale in Beziehung auf ihren numerischen Werth werden in einem IV. Abschnitt die nöthigen Hülfsmittel gegeben. T.

G. Halphén. Sur l'intégration d'une équation différentielle. C. R. LXXXVIII. 562-565.

Die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y(y+1)-4x}{8y-1}$$

wird durch die Formeln

$$x = \frac{H^3(3z)\,H^5(z)}{H^8(2z)}, \quad y = \frac{H(4z)\,H^4(z)}{H^5(2z)}$$

integrirt, worin z eine Hülfsvariable und der Modul k die Constante der Integration ist. Der Verfasser stellt sich die Aufgabe, dieselbe Gleichung algebraisch zu integriren. Zunächst wird folgende neue Integrationsformel abgeleitet:

$$x = \frac{[4(1-k^2u)(1-u)-(1-k^2u^2)^2]^3}{2^8(1-k^2u)^4(1-u)^4},$$

$$y = \frac{(1-k^2u^2)(1-2u+k^2u^2)(1-2k^2u+k^2u^2)}{2^3(1-k^2u)^2(1-u)^2},$$

und es handelt sich nunmehr um die Elimination von u, welche durch besondere Kunstgriffe ohne erhebliche Rechnung bewirkt wird. Das allgemeine Integral ist vom 12ten Grade. Hr.

A. G. Greenhill. On Riccati's equation and Bessel's equation. Quart. J. XVI. 294-298.

Die Riccati'sche Differentialgleichung $\frac{du}{dx}+bu^2 = cx^m$, die bekanntlich durch die Substitution $u = \frac{1}{bw}\frac{dw}{dx}$ in die lineare Differentialgleichung $\frac{d^2w}{dx^2}-bcx^mw = 0$ übergeführt werden kann, wird durch die weiteren Substitutionen $w = y\sqrt{x}$, $x^{m+2} = r^2$ für

$$\frac{4bc}{(m+2)^2} = -k^2, \quad \frac{1}{m+2} = n$$

in

$$r^2\frac{d^2y}{dr^2}+r\frac{dy}{dr}+(k^2r^2-n^2)\,y^2 = 0$$

transformirt, welcher die Bessel'sche Function $J_n(kr)$ genügt; die Bedingung, dass die Reihe für J_n abbricht, giebt für die Riccati'sche

Gleichung die bekannte Bedingung $m = \frac{-4i}{2i+1}$, wo i eine beliebige ganze Zahl ist. In ganz analoger Weise lässt sich die allgemeinere Gleichung

$$x^2 w'' + axw' + (bx^m + c)w = 0$$

auf die Bessel'sche Differentialgleichung reduciren, und daher ergiebt sich für ihre Integrabilität in endlicher Form die Bedingung

$$m = \frac{2}{2i+1} \sqrt{(a-1)^2 - 4c}.$$

(cfr. Malmsten, Cambr. Math. J. (2) V. 180).

T.

F. Casorati. Quelques formules fondamentales pour l'étude des équations différentielles algébriques du premier ordre et du second degré entre deux variables et à intégrale générale algébrique. Darboux Bull. (2) III. 42-48.

F. Casorati. Nouvelle théorie des solutions singulières des équations différentielles du premier ordre et du second degré entre deux variables. Darboux Bull. (2) III. 48-59.

F. Casorati. Nota concernente la teoria delle soluzioni singolari delle equazioni algebrico-differenziali di primo ordine e secondo grado. Acc. R. d. L. (3) III. 1-8.

Die beiden ersten Arbeiten sind Uebersetzungen der Mittheilungen, welche dem Ist. Lomb. und der Acc. R. dei Lincei früher gemacht worden sind, und worüber bereits im 8. Bande der F. d. M. p. 181 (1876) berichtet worden ist. In der dritten Arbeit folgen die Beweise der in der zu zweit genannten Arbeit ausgesprochenen Sätze.

T.

G. Mittag-Leffler. Integration utaf en klass af lineera differential-eqvationer. Öfv. v. Stockh. 1879.

Der Verfasser stellt sich folgende zwei Aufgaben: Erstens den allgemeinen Typus der homogenen linearen Differentialgleichungen, deren sämmtliche Integrale eindeutige analytische Functionen rationalen Charakters sind, aufzufinden, und zweitens ein Fundamentalsystem solcher particulären Integrale einer Differentialgleichung dieses Typus wirklich so aufzustellen, dass jedes Integral der Quotient von zwei beständig convergirenden Potenzreihen sei. Die Auflösung der ersten Aufgabe ist durch die Methoden von Herrn Fuchs unmittelbar gegeben. Die zweite Aufgabe kann wieder leicht durch die Principien, welche Herr Weierstrass in seiner Abhandlung: „Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen" entwickelt hat, aufgelöst werden. Die beiden Aufgaben werden im Detail behandelt für den Fall, dass die Differentialgleichung die Form

$$y'' = f(x).y$$

hat.

In den „Comptes rendus" vom 2. Februar 1880 findet sich ein Aufsatz des Verfassers, in dem die beiden Aufgaben für die allgemeine Gleichung zweiter Ordnung

$$y''+f_1(x).y'+f_2(x).y = 0$$

behandelt werden. M. L.

L. W. Thomé. Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen. Borchardt J. LXXXVII. 222-350.

In dieser Arbeit wird die Aufgabe behandelt, die linearen Relationen zu bestimmen, welche zwischen zwei zu verschiedenen Punkten der Constructionsebene gehörigen Fundamentalsystemen von Integralen linearer homogener Differentialgleichungen stattfinden, wenn die Fortsetzung von einem Punkte zum andern längs einer vorgeschriebenen Curve geschieht. Dieses Problem ist bereits von Herrn Fuchs in seiner ganzen, die Darstellung der Functionen complexer Variablen überhaupt umfassenden Allgemeinheit gelöst worden (Borchardt J. LXXV. p. 177 ff., vergl. F. d. M. V. 1873. p. 235). Diese Fortsetzung bietet, wenn man sie successive von Abschnitt zu Abschnitt vornimmt, so dass in jedem

derselben convergente Entwickelungen der Functionen existiren, nicht die geringste Schwierigkeit. Das eigentliche Problem macht sich erst bei folgender Betrachtung geltend. Zieht man durch die singulären Punkte eine sich selbst nicht schneidende geschlossene Linie (Absonderungsschnitt), so hängt die Fortsetzung der Function längs eines Weges L nicht ab von der Gestalt dieser Curve, sondern lediglich von der Lage und Zahl ihrer Durchschnittspunkte mit der Absonderungscurve, so dass die Angabe, wie oft und zwischen welchen singulären Punkten der Absonderungsschnitt von L überschritten wird, allein für die Art der Fortsetzung massgebend ist. Dieser nun einen analytischen Ausdruck zu geben, der, ohne auf die Berechnung der Functionswerthe für die Zwischenpunkte sich zu stützen, den Zusammenhang zwischen den Werthen am Anfang und Ende des Weges L a priori erkennen lässt, war die durch die Natur der Sache gebotene Aufgabe, die Herr Fuchs in der citirten Abhandlung zuerst formulirt und gelöst hat. Demgegenüber ist es als ein Rückschritt zu bezeichnen, wenn Herr Thomé, ohne auf diese Arbeit, ausser in einem gelegentlichen Citat Bezug zu nehmen, die Frage der Fortsetzung auf dem oben erwähnten Wege der successiven Berechnung von Abschnitt zu Abschnitt zu lösen unternimmt, wobei denn von einer unmittelbaren Darstellung des Zusammenhangs zwischen Anfangs- und Endwerth der Function, wofern mehr als zwei singuläre Punkte im Endlichen sind, keine Rede sein kann. Im Verfolg dieses Verfahrens handelt es sich vornehmlich um die Aufgabe, einen in der x-Ebene durch einen Punkt b gelegten Kreis, welcher ausser dem singulären oder nicht singulären Punkte a keinen singulären Punkt weiter im Inneren enthält, in der ξ-Ebene conform durch einen Kreis mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und dem Radius 1 abzubilden, so dass dem Punkte $x = a$ der Punkt $\xi = 0$, dem Punkte $x = b$, $\xi = 1$ entspricht, eine Abbildung, welche, wie bekannt, mit Hülfe einer linearen rationalen Substitution geschieht. Eine besondere Untersuchung wird den Differentialgleichungen mit nur regulären Integralen gewidmet, sowie solchen, in denen Systeme normaler Differentialausdrücke (vgl. F. d. M. IX. 1877. 232) gleich Null

gesetzt sind, deren Betrachtung indess leicht auf die der ersteren zurückgeführt wird. Ist nun im ersteren Falle und unter Voraussetzung der bezeichneten Lage der Punkte a und b nach geschehener Substitution das System linear unabhängiger Integrale bei $\xi = 0$ $y_{01}, y_{02} \dots y_{0n}$ und bei $\xi = 1$ $y_{11}, y_{12} \dots y_{1n}$, so werden die constanten Coefficienten in den zu ermittelnden linearen Relationen

$$y_{0k} = C_{k1} \; y_{11} + C_{k2} y_{12} + \dots + C_{kn} y_{1n} \quad (k = 1, \dots n)$$

durch eine Formel gegeben, welche mit der entsprechenden, von Herrn Fuchs (Borchardt J. LXXV. p. 211-212) entwickelten gleichlautend ist. Hierbei stellt sich C_{kb} in der Form $\lim \varphi_{kb}(\xi)$ für $\xi = 1$ dar, wo $\varphi_{kb}(\xi)$ eine nach Potenzen von ξ mit ganzen positiven Exponenten fortschreitende Reihe ist, die innerhalb des Kreises um den Nullpunkt mit dem Radius 1 convergirt. Durch eine Herrn Thomé eigenthümliche Untersuchung wird direct nachgewiesen, dass die Potenzreihe $\varphi_{kb}(\xi)$ noch für $\xi = 1$ convergirt und die Constante C_{kb} darstellt. Das Letztere folgt, sobald das Erstere erwiesen ist, unmittelbar aus der Convergenz von gleichem Grade von $\varphi_{kb}(\xi)$ für $0 \leqq \xi \leqq 1$. Die fragliche Convergenz wird mit Hülfe von Betrachtungen, die sich auf die Convergenz der Fourier'schen Reihe beziehen, dargethan, und zwar erst unter der beschränkenden Annahme, dass die Wurzeln der zu $\xi = 1$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung alle reell sind, in welchem Falle die Dirichlet'schen Principien ausreichen; und später in einem Nachtrage allgemein, die Wurzeln mögen reell oder complex sein, wobei es nothwendig ist, auch den Fall, dass die durch die Fourier'sche Reihe darzustellende Function unendlich viele Maxima und Minima hat, in Betracht zu ziehen. Die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe, welche nur die beiden singulären Punkte im Endlichen 0 und 1 hat, sowie die leicht darauf zurückzuführende Riemann'sche Differentialgleichung dienen als Beispiele für die Anwendung der beschriebenen Relationen zwischen den Integralen. Die umfangreiche Abhandlung besteht übrigens zu einem grossen Theile aus umständlichen Wiederholungen von bekannten Sätzen und Betrachtungen. So beschäftigt sich ein 30 Seiten einnehmender Ab-

schnitt (§ 7) mit der Darstellung der Coefficienten der Logarithmenpotenzen in dem bekannten für ein Fundamentalsystem von Integralen geltenden Ausdruck

$$y_a = (x-a)^{r_a} \sum_1^a b\, \varphi ab^{(\log(x-a))^{b-1}},$$

ohne indess durch Neuheit oder durch Eleganz der Resultate Bemerkenswerthes zu bieten. Hr.

Ch. Hermite. Équations différentielles linéaires. Darboux Bull. (2) III. 311-325.

G. Darboux. Application de la méthode précédente à l'équation linéaire à coefficients constants avec second membre. Darboux Bull. (2) III. 325-328.

Die erste Note reproducirt eine von Herrn Hermite an der École polytechnique gehaltene Vorlesung, in welcher die Cauchy'sche Methode der Lösung der linearen Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten ohne zweites Glied auseinandergesetzt wird. Die Differentialgleichung habe die Form:

$$(1) \qquad \alpha y + \beta y' + \gamma y'' + \cdots + y^{(n)} = 0,$$

und

$$F(z) = \alpha + \beta z + \gamma z^2 + \cdots + z^n$$

sei die damit verbundene „charakteristische“ algebraische Gleichung, dann ist das Integral

$$(2) \qquad y = \int \frac{e^{zx}\Pi(z)}{F(z)}\, dz,$$

wo $\Pi(z)$ ein ganzes Polynomen mit willkürlichen Coefficienten bezeichnet und das Integral über einen beliebigen geschlossenen Umfang zu nehmen ist, eine Lösung von (1), aus welcher die bekannten expliciten Ausdrücke der Lösung für die Fälle einfacher und mehrfacher Wurzeln der charakteristischen Gleichung abgeleitet werden. Die Bestimmung der willkürlichen Constanten in der allgemeinen Lösung aus den Werthen $y_0\, y'_0 \dots y_0^{(n-1)}$, die resp. $y\, y' \dots y^{n-1}$ für $x=0$ annehmen, führt nach der gewöhnlichen Methode im Falle vielfacher Wurzeln der charakteristischen Gleichung auf complicirte Formeln. Cauchy hat dafür folgende

sehr einfache Regel gegeben, welche für den Fall einfacher und vielfacher Wurzeln gilt. Man setze

$$\Pi(z) = y_0(\beta + \gamma z + \delta z^2 + \cdots + z^{n-1}) + y'_0(\gamma + \delta z + \cdots + z^{n-2})$$
$$+ y''_0(\delta + \varepsilon z + \cdots + z^{n-3}) + \cdots + y_0^{(n-1)}$$

und berechne die Summe der Residuen von $\frac{e^{zx}\Pi(z)}{F(z)}$ für alle Wurzeln von $F(z) = 0$. Diese ist dann das gesuchte Integral. Daran schliesst Herr Darboux die Mittheilung einer ebenfalls von Cauchy herrührenden Regel für die Integration einer linearen Differentialgleichung mit constanten Coefficienten, die mit einem 2ten Gliede behaftet ist. Die Gleichung laute

$$(2) \qquad \alpha y + \beta y' + \cdots + y^{(n)} = f(x),$$

dann ist

$$Y = \int_{x_0}^{x} f(t) R(t)\, dt,$$

ein particuläres Integral der Gleichung (2), wo $R(t)$ die Summe der Residuen von $\frac{e^{z(x-t)}}{f(z)}$ bezüglich aller Wurzeln von $F(z)$ bedeutet.

Hr.

Laguerre. Sur les équations différentielles linéaires du troisième ordre. C. R. LXXXVIII. 116-119.

Laguerre. Sur quelques invariants des équations différentielles. C. R. LXXXVIII. 224-227.

F. Brioschi. Sur les équations différentielles linéaires. Bull. S. M. F. VII. 105-108.

E. Combescure. Remarques sur les équations différentielles linéaires et du troisième ordre. C. R. LXXXVIII. 275-277.

Herr Laguerre betrachtet 2 verschiedene Transformationen, welche die Form einer linearen Differentialgleichung mit x als unabhängiger und y als abhängiger Variablen unverändert lassen. Man erhält dieselben durch die aufeinanderfolgenden Substitu-

tionen $x = f(z)$, $y = V(z).u$. Die verschiedenen Gleichungen, die vermittelst dieser Substitutionen aus einer und derselben hervorgehen, indem man den Functionen $f(z)$ und $V(z)$ alle möglichen Formen giebt, werden zu derselben Classe gerechnet. Hiernach gehören alle linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu einer einzigen Classe; denn sie sind sämmtlich vermöge der genannten Substitutionen auf $y'' = 0$ reducirbar. In der ersten Note beschäftigt sich der Verfasser insbesondere mit der Differentialgleichung dritter Ordnung

$$y''' + 3Py'' + 3Qy' + Ry = 0.$$

Die beiden Ausdrücke

$$e^{-\int P dx} \quad \text{und} \quad 4P^3 + 6PP' + P'' - 6PQ - 3Q' + 2R$$

haben die Eigenschaft, nach obigen Transformationen sich bis auf einen von den Transformationen allein abhängigen Factor zu reproduciren, sind also Invarianten. Setzt man den zweiten Ausdruck gleich J und $e^{3\int P dx}.J = K$, während die transformirten Ausdrücke mit J_0, K_0 bezeichnet werden, so bestehen die Relationen

$$J_0 = J\left(\frac{dx}{dz}\right)^3, \quad K_0 = KV^3(z).$$

Diese geben einerseits ein Kriterium für die Zugehörigkeit zweier Gleichungen dritter Ordnung zu derselben Classe, andererseits lassen sich mit ihrer Hülfe alle Gleichungen dritter Ordnung durch blosse Anwendung von Quadraturen auf eine reducirte Form bringen, die nur eine willkürliche Function enthält. Sie lautet:

$$(1) \qquad \frac{d^3u}{dz^3} + 2F(z)\frac{du}{dz} + (F'(z) + \tfrac{1}{2})u = 0.$$

In der zweiten Note vergleicht der Verfasser die Differentialgleichung n^{ter} Ordnung

$$Ay^{(n)} + nBy^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{1.2}Cy^{(n-2)} + \cdots + nKy' + Ly = 0 \quad (A = 1)$$

betreffs ihrer Invarianten mit der algebraischen Form

$$Y = A\lambda^n + nB\lambda^{n-1}\mu + \cdots + nK\lambda\mu^{n-1} + L\mu^n.$$

Durch die Substitution $y = e^{-\int \frac{B}{A} dx} . u$ geht die Differentialgleichung in eine andere über, in welcher der zweite Term fehlt. Bezeichnet man die transformirte Gleichung mit

$$u^{(n)} + \frac{n(n-1)}{1.2} H u^{(n-2)} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \Theta u^{(n-3)} + \cdots = 0,$$

so haben die Functionen $H, \Theta \ldots$ die Eigenschaft, invariabel zu bleiben, wenn man die unbekannte Function ändert (Semi-Invarianten). Sie sind analog den associirten Covarianten der Form Y.

$$H = AC - B^2 - (AB' - A'B)$$

entspricht der Hesse'schen Covariante von Y. Ferner geht durch die oben erwähnten Transformationen H über in

$$H_0 = \left(\frac{dx}{dz}\right)^4 \left\{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 H - \frac{n+1}{6}\left(\frac{dz}{dx}\frac{d^3z}{dx^3} - \frac{3}{2}\frac{d^2z}{dx^2}\right)^2\right\}.$$

Die Bestimmung, dass $H_0 = 0$ und somit in der transformirten Differentialgleichung das zweite und dritte Glied verschwinde, erfordert, wie man erkennt, wenn $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\omega^2}$ gesetzt wird, die Integration einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung und eine darauf folgende Quadratur. Für die oben mit J bezeichnete Invariante der Differentialgleichung dritter Ordnung hat man die Gleichung $J = \Theta - \frac{3}{2}H'$. Ist nun $J = 0$, so verschwindet mit H auch Θ und die linearen Gleichungen dritter Ordnung lassen sich also im Falle $J = 0$ auf die Gleichung $\frac{d^3u}{dz^3} = 0$ reduciren, so dass die Integration einer linearen Gleichung zweiter Ordnung und eine Quadratur genügen, um dieselben zu integriren.

Durch die vorstehenden Laguerre'schen Untersuchungen sind die beiden folgenden Noten veranlasst. Herr Brioschi betrachtet die Differentialgleichung dritter Ordnung

$$y''' + 3ly' + my = 0$$

und leitet die beiden folgenden invarianten Ausdrücke ab:

$$a = 3l' - 2m, \quad b = 6\frac{d^2 \log a}{dx^2} - \left(\frac{d \log a}{dx}\right)^2 - 27l,$$

von denen der erstere mit J identisch ist, wenn $P = 0$ gesetzt wird.

Ihre Relationen zu den transformirten Ausdrücken a_0 und b_0 sind

$$a_0 = a\left(\frac{dx}{dz}\right)^3, \quad b_0 = b\left(\frac{dx}{dz}\right)^2,$$

woraus sich die Function $b^3 : a^2$ als absolute Invariante ergiebt. Falls $a = 0$, reducirt sich die Gleichung auf

$$\xi''' + \tfrac{3}{4} l\xi = 0 \quad (\xi = y^2).$$

Wie der Verfasser noch bemerkt, bleiben die erwähnten invarianten Formen noch für die Gleichungen höherer Ordnung erhalten. Herr Combescure geht von der Differentialgleichung

$$(2) \qquad y''' + py' + qy = 0$$

aus und setzt $y = uv$, bestimmt dann x und v als Functionen von z durch die beiden Gleichungen

$$v = \frac{dx}{dz}, \quad v^3\left(\tfrac{1}{2}\frac{dp}{dx} - q\right) = \varphi(z),$$

wo φ eine beliebige Function von z bedeutet. Die transformirte Gleichung in u und z geht für $\varphi =$ const. in die Laguerre'sche (1) über, und erfordert, wie diese, zu ihrer Aufstellung eine blosse Quadratur. Durch die Substitution $v = w^2$, wo w ein Integral der Gleichung

$$w'' + \tfrac{1}{4} pw = 0$$

bezeichnet, geht die Gleichung (2) über in die binomische Gleichung

$$\frac{d^3u}{dz^3} + v^3\left(q - \tfrac{1}{2}\frac{dp}{dx}\right)u = 0.$$

Diese Reduction, welche eine particuläre Lösung einer linearen Gleichung zweiter Ordnung und 2 Quadraturen erfordert, steht, wie der Verfasser bemerkt, mit der Laguerre'schen in keiner nothwendigen Beziehung. Hr.

J. Tannery. Sur une équation différentielle linéaire du second ordre. Ann. de l'Éc. N. (2) VIII. 169-194.

Diese Abhandlung enthält die nähere Ausführung der in den C. R. LXXXVI. 811-812 und 950-953 mitgetheilten Untersuchungen und Resultate, über welche in diesem Jahrbuch Bd. X. 1878. p. 237 berichtet ist. Hr.

G. Floquet. Sur la théorie des équations différentielles linéaires. Ann. de l'Éc. N. (2) VIII. Suppl. 3-132, (auch als besonderes Werk erschienen).

Nach dem Vorgang des Herrn Tannery, der in den Ann. de l'Éc. N. von 1874 (vgl. F. d. M. VII. 1875. 184) die in den fundamentalen Arbeiten des Herrn Fuchs „Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen" (Borchardt J. LXVI. u. LXVIII.) niedergelegten Principien und Resultate zum Zwecke der weiteren Verbreitung reproducirt hat, stellt sich Herr Floquet die Aufgabe, auch die an die Fuchs'schen Arbeiten sich anschliessenden Untersuchungen der Herren Thomé und Frobenius einem weiteren Leserkreise zugänglich zu machen. Nach einer kurzen Recapitulation der in den genannten Fuchs'schen Abhandlungen entwickelten fundamentalen Principien der Theorie der linearen Differentialgleichungen, welcher der erste Abschnitt gewidmet ist, werden im zweiten nach Herrn Thomé die Definition der regulären Integrale in der Umgebung eines singulären Punktes, wofür der Nullpunkt genommen wird, sowie einige Sätze über dieselben gegeben, die sich auf den Begriff des charakteristischen Index gründen. Der dritte Theil enthält nach den Untersuchungen des Herrn Frobenius die Definition der charakteristischen Function, sowie der determinirenden Function, auf deren Betrachtung der Begriff des charakteristischen Index naturgemäss zurückgeführt wird; ferner die Einführung der Normalformen, der zusammengesetzten Differentialausdrücke und die Ableitung des wichtigen Satzes, dass die determinirende Function eines Differentialausdrucks, der aus mehreren Differentialausdrücken in der Normalform zusammengesetzt ist, das Produkt aus den determinirenden Functionen seiner Bestandtheile ist. Daran schliesst sich die Entwickelung einiger Sätze betreffs der Irreductibilität einer linearen Differentialgleichung, deren Coefficienten in der Umgebung des Nullpunktes den Charakter rationaler Functionen haben, in dem Sinne, dass eine Differentialgleichung reductibel genannt wird, wenn sie mit einer linearen Differentialgleichung niedrigerer Ordnung, deren Coefficienten denselben Charakter haben, ein Integral gemeinsam hat. Diese Betrachtungen werden im vierten

Abschnitt auf die Untersuchung der regulären Integrale angewandt. Die Ermittelung der Bedingung dafür, dass die Anzahl der regulären Integrale einer Differentialgleichung mit dem Grade ihrer determinirenden Function übereinstimmt, erfordert ein Eingehen auf die adjungirten Differentialgleichungen, mit deren Construction und Eigenschaften sich der fünfte Abschnitt beschäftigt. In den beiden folgenden Abschnitten wird die Methode der Zerlegung einer Differentialgleichung in symbolische Primfactoren, die bereits in den vorhergehenden Capiteln zur Anwendung gekommen war, zum besonderen Gegenstande der Betrachtung gemacht, ihre Analogie mit der Zerlegung algebraischer Polynome dargethan und die Bedingung dafür aufgestellt, dass die Factoren commutativ sind. Diese Untersuchungen dienen alsdann namentlich zur Aufklärung des Ursprungs der Differenz, die zwischen dem Grade der determinirenden Function und der Anzahl der regulären Integrale einer linearen Differentialgleichung auftreten kann. Der Grad der determinirenden Function ist gleich der Zahl der regulären Factoren, die in der Zerlegung überhaupt vorkommen, und die Anzahl der linearunabhängigen regulären Integrale ist gleich der grössten Anzahl von aufeinanderfolgenden regulären Factoren, die als Schlussglieder einer solchen Zerlegung auftreten. Zur Berichtigung der Bemerkung in p. 14, dass die regulären Integrale die einzigen seien, für die man bis jetzt die Coefficienten der zugehörigen Reihen bestimmt hat, sei hier darauf hingewiesen, dass in der Abhandlung des Referenten „Ueber ein Princip zur Darstellung des Verhaltens mehrdeutiger Functionen" Borchardt J. LXXXIII. p. 202 ff. (siehe F. d. M. IX. 1877. p. 289) auch für die irregulären Integrale eine Methode für die Coefficientenbestimmung der zugehörigen Reihen angegeben ist. Hr.

D. André. Intégration, sous forme finie, de trois espèces d'équations différentielles linéaires à coefficients quelconques. C. R. LXXXVIII. 230-232.

Der Herr Verfasser betrachtet eine besondere Classe von

linearen Differentialgleichungen ohne zweites Glied, die dadurch ausgezeichnet ist, dass die n-malige Differentiation nach der unabhängigen Variablen x und die darauf folgende Substitution $x = 0$, $y = y_0$, $y' = y'_0, \dots$ zu einer Gleichung führt, welche für alle Werthe von n, die eine gewisse Grenze übersteigen, die Form hat:

$$A_0 F(n)\, y_0^{(n)} + A_1 F(n-1)\, y_0^{(n-1)} + \cdots + A_k F(n-k)\, y_0^{(n-k)} = 0,$$

wo $F(n)$ eine beliebige Function von n ist, und die A, sowie die ganze Zahl k unabhängig von n sind. In den 3 Fällen, wo $F(n)$ die Formen

$$\frac{1}{n!\, f(n)}, \quad \frac{(n+s)!}{n!\, f(n)}, \quad \frac{(n+s)(n+s+1)\dots(n+s+t-1)}{n!\, f(n)}$$

annimmt, und $f(n)$ eine beliebige ganze Function von n und a^n, s eine beliebige ganze Zahl, t eine positive ganze Zahl bedeuten, ist es dem Herrn Verfasser gelungen, die hierdurch charakterisirten Differentialgleichungen unter endlicher Form zu integriren. Im Uebrigen verweist der Verfasser auf eine besondere Abhandlung, welche die Darlegung der Integrationsmethode und ihre Anwendung auf mehrere Beispiele zum Gegenstande hat.

Hr.

E. Picard. Sur une généralisation des fonctions périodiques et sur certaines équations différentielles linéaires. C. R. LXXXIX. 140-144.

Der Herr Verfasser betrachtet eindeutige Functionen $f(x)$ von der Beschaffenheit, dass

$$f(x+4K) = A f(x) + B f(x+2K),$$
$$f(x+4iK') = A' f(x) + B' f(x+2iK').$$

Sie bilden eine Verallgemeinerung der von Herrn Hermite betrachteten doppeltperiodischen Functionen der zweiten Art, die sich durch die Aenderung von x in $x+2K$ und $x+2iK'$ bis auf einen constanten Factor reproduciren. Eine einfache Analyse zeigt, dass $f(x)$ in der Form

$$f(x) = U_{\mu\mu'}(x) + U_{\mu\nu'}(x) + U_{\nu\mu}(x) + U_{\nu\nu'}(x)$$

dargestellt werden kann, wo die U doppeltperiodische Functionen der zweiten Art und die Indices die Multiplicatoren bedeuten.

μ, ν sind die Wurzeln der Gleichung $\mu^2 - B\mu - A = 0$, $\mu' \nu'$ die Wurzeln der Gleichung $\mu'^2 - B'\mu' - A' = 0$. Herr Hermite hat gezeigt, wie jede doppeltperiodische Function der zweiten Art vermittelst der Jacobi'schen Functionen H, Θ ausgedrückt werden kann, also lässt sich auch $f(x)$ durch diese Functionen darstellen. Ist nun eine Differentialgleichung zweiter Ordnung mit doppeltperiodischen Coefficienten im gewöhnlichen Sinne, deren Perioden $2K$ und $2iK'$ seien, gegeben, und hat dieselbe ein eindeutiges Integral $f(x)$, so sind auch $f(x+2K)$, $f(x+2iK')$, $f(x+4K)$, $f(x+4iK')$ Integrale derselben, somit finden sich die Relationen (1) erfüllt und $f(x)$ lässt sich also durch die Functionen H, Θ ausdrücken. Es tritt hier noch der besondere Umstand ein, dass von den vier obigen U, deren Summe $f(x)$ im allgemeinen Falle darstellt, zwei verschwinden, so dass das Integral der betrachteten Differentialgleichung die Summe von 2 doppeltperiodischen Functionen der zweiten Art ist, ein Resultat, welches Herr Hermite bereits für die Lamé'sche Gleichung abgeleitet hat. Hr.

Laplace. Lettre à Condorcet. Darboux Bull. (2) III. 206-209.

G. Darboux. Remarque sur la lettre précédente. Darboux Bull. (2) III. 209-217.

In dem Briefe von Laplace handelt es sich um die Integration einer linearen Differentialgleichung mit zweitem Gliede, wenn die Integrale derselben Differentialgleichung ohne zweites Glied bekannt sind. Die Regel, welche Laplace hierfür aufstellt und auf Gleichungen mit endlichen Differenzen ausdehnt, ist, wie Herr Darboux bemerkt, in der mitgetheilten Form ungenau. Herr Darboux berichtigt dieselbe, indem er zugleich die Methode darlegt, welche der Regel zu Grunde liegt. Sie beruht nämlich auf der successiven Reduction der Gleichung

$$(1) \qquad y^{(n)} + py^{(n-1)} + \cdots + p_n y = X$$

auf Gleichungen der nämlichen Form $(n-1)^{\text{ter}}$, $(n-2)^{\text{ter}}\dots$ bis erster Ordnung vermittelst der bekannten Substitutionen

$$y = u\int \frac{y_1}{u}\,dx, \quad y_1 = u_1'\int \frac{y_2}{u_1'}\,dx, \dots y_i = u_i'\int \frac{y_{i+1}}{u_i'}\,dx,$$

wo u ein Integral der Gleichung (1), u_i^i ein Integral der Gleichung $(n-i)^{\text{ter}}$ Ordnung in y_i bedeutet. Man erhält auf diesem Wege

$$(2) \qquad y_{n-1} = u_{n-1}^{n-1} \int \frac{X dx}{u_{n-1}^{n-1}}.$$

Nach der Lagrange'schen Methode der Variation der Constanten lautet das allgemeine Integral der Gleichung (1)

$$y = Cu + C_1 u_1 + \cdots + C_{n-1} u_{n-1},$$

wo $u, u_1 \dots u_{n-1}$ die n particulären Integrale der Gleichung (1) ohne zweites Glied sind, und die Functionen C gewissen bekannten Relationen zu genügen haben. Es zeigt sich nun, dass in dem allgemeinen Integral der Gleichung in y_i

$$y_i = C_i u_i^i + C_{i+1} u_{i+1}^i + \cdots + C_{n-1} u_{n-1}^i$$

die C_i in Bezug auf die neue Gleichung die nämlichen Relationen erfüllen, wie in Bezug auf die Gleichung in y. Da hiernach

$$y_{n-1} = C_{n-1} u_{n-1}^{n-1},$$

so folgt durch Vergleichung mit (2)

$$C_{n-1} = \int \frac{X dx}{u_{n-1}^{n-1}},$$

welche Formel der genaue Ausdruck der von Laplace gegebenen Regel ist. Herr Darboux wendet dies an auf die linearen Gleichungen mit constanten Coefficienten und behandelt insbesondere den Fall, wo die charakteristische Gleichung vielfache Wurzeln hat. Hierbei kommt er durch Grenzbetrachtungen auf dieselbe Formel, welche Herr Hermite auf kürzerem Wege durch Anwendung der Cauchy'schen Methode (siehe p. 234) erhalten hat. Hr.

A. Winckler. Aeltere und neuere Methoden, lineare Differentialgleichungen durch einfache bestimmte Integrale aufzulösen. Wien. A. Hölder.

Die vorliegende Schrift enthält eine übersichtliche Zusammenstellung der Resultate der in dem LXI., LXXI. u. LXXV. Bande der Wiener Berichte vom Herrn Verfasser veröffentlichten Abhandlungen, durch welche die Lösung der beiden Gleichungen

$$(h_0x+h)\ y''+2(k_0x+k\ )y'+(l_0x+l)y=0,$$
$$(h_0x+h)^2y''+(k_0x+k_1)y'+l_0y=0,$$

sowie auch die Riccati'sche Differentialgleichung in voller Allgemeinheit für alle reellen und complexen Werthe der Constanten und der Variablen x lediglich in Form einfacher bestimmter Integrale gegeben wird. (Vgl. F. d. M. V. 1873. 187, VII. 1875. 195, IX. 1877. 243). Sie ist zugleich eine erweiterte Bearbeitung einer vom Herrn Verfasser im Jahre 1876 herausgegebenen selbständigen Schrift (siehe F. d. M. VIII. 1876. 190), in welche nur die beiden ersten der oben erwähnten Abhandlungen aufgenommen sind, und welche daher noch nicht die Vereinfachungen enthält, die sich in Folge eines in der dritten Abhandlung bewiesenen allgemeinen Satzes ergeben. Wesentlicher Zweck dieser Schrift ist die Zurückweisung der Angriffe des Herrn Spitzer, wobei der Herr Verfasser es sich angelegen sein lässt, die Grundverschiedenheit seiner Methoden von den älteren Methoden in's Licht zu setzen. Herr Winckler ist zu seinen Resultaten auf zwei verschiedene Arten gelangt, einmal unmittelbar aus den Grundformeln von Euler (Inst. calc. integr. art. 1040) (s. die Angabe des Grundgedankens in den F. d. M. VIII. 1876. 191), dann mit Hülfe des obenerwähnten neuen Satzes. Hinsichtlich der früheren Methoden, soweit sie auf Lösungen in Form von einfach bestimmten Integralen führen, wird bemerkt, dass hier nächst Euler nur die Herren Petzval und Weiler in Betracht kommen, während die in den „Studien“ des Herrn Spitzer vorkommenden Ausdrücke der fraglichen Form den Petzval'schen nachgebildet sind. Zugleich bezeichnet es der Herr Verfasser als einen Anachronismus, wenn in den „Studien“ die Methode, lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung durch Quadraturen zu integriren, Laplace statt Euler zugeschrieben wird. Hr.

A. Winckler. Ueber den letzten Multiplicator der Differentialgleichungen höherer Ordnung. Wien. Ber. 1879.

Vorliegende Arbeit hat den Zweck, die Jacobi'sche Theorie

des letzten Multiplicators einfacher zu gestalten und zugleich die Anwendung derselben zu erleichtern. Wenn

$$(1) \qquad y^{(n)} = f(x,\ y,\ y' \ldots y^{(n-1)})$$

die gegebene Differentialgleichung ist, von welcher durch successive Integrationen $n-1$ Integralgleichungen

$$(2) \qquad y^{(n-i)} = f_i(x,\ y,\ y', \ldots y^{(n-i-1)},\ c_1,\ c_2 \ldots c_i) \quad i = 1, 2 \ldots n-1$$

gefunden sind, so wird zunächst die Relation bewiesen

$$\frac{\partial f_{i-1}}{\partial y^{(n-i)}} - \frac{\partial f_i}{\partial y^{(n-i-1)}} = \frac{d \log \frac{\partial f_i}{\partial c_i}}{dx},$$

worin d das Zeichen für totale Differentiation ist. Setzt man in derselben der Reihe nach $i = i,\ i+1, \ldots n-1$ und addirt, und benutzt die aus der Definition des letzten Multiplicators M hervorgehende Gleichung

$$\frac{d \log M}{dx} = -\frac{\partial f_{n-1}}{\partial y},$$

so ergiebt sich die Gleichung

$$\frac{d \log M}{dx} = \frac{d \log \frac{\partial f_i}{\partial c_i} \cdot \frac{\partial f_{i+1}}{\partial c_{i+1}} \cdots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial c_{n-1}}}{dx} - \frac{df_{i-1}}{dy^{(n-i)}},$$

mit welcher eine neue Form für den Multiplicator M gefunden ist. Hiernach kann der letzte Multiplicator M, wenn $\frac{\partial f_{i-1}}{\partial y^{(n-i)}} \cdot dx$ für irgend ein i ein vollständiges Differential ist, unmittelbar angegeben werden. Ist er gefunden, und sind mittelst der $n-1$ Integralgleichungen (2) $y' \ldots y^{(n-1)}$ als Functionen von x und y dargestellt, so ergiebt sich das noch fehlende n^{te} Integral, durch die Quadratur

$$\int M\,(dy - f_{n-1}\,dx) = c_n$$

ausgedrückt. Es wird alsdann der umgekehrte Weg eingeschlagen, die Form der Differentialgleichung (1) zu bestimmen, für welche

$$\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} = -\frac{d\log F}{dx},$$

worin F eine gegebene Function von $x, y, y' \dots y^{(n-1)}$ bedeutet. Als solche ergiebt sich

$$(3) \qquad y^{(n)}F + \int \partial y^{(n-1)} \left\{ \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \dots + \frac{\partial F}{\partial y^{(n-2)}} y^{(n-1)} \right\} + \varphi,$$

wo das Zeichen $\int$ eine partielle Integration nach $y^{(n-1)}$ und φ eine beliebige Function von $x, y, y' \dots y^{(n-2)}$ bedeuten.

Durch Specialisirung der beliebig gegebenen Function F wird eine Anzahl theils bekannter, theils neuer Resultate abgeleitet, aus denen wir das folgende hervorheben: Enthält F weder $y^{(n-1)}$ noch $y^{(n-2)}$, und setzt man F^m für F, $F^{m-1}\varphi$ für φ, so geht die Gleichung (3) in

$$y^{(n)}F + m\frac{dF}{dx}y^{(n-1)} + \varphi = 0$$

über, welche eine beträchtliche Verallgemeinerung der isoperimetrischen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung darstellt. Für diese ist

$$M = F^m \cdot \frac{\partial f_1}{\partial c_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial c_2} \dots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial c_{n-1}},$$

und demnach wird das n^{te} Integral durch die Gleichung

$$\int F^m \frac{\partial f_1}{\partial c_1} \dots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial c_{n-1}} (dy - f_{n-1}dx) = c$$

gegeben. Schliesslich macht der Herr Verfasser von der Bestimmung des letzten Multiplicators eine Anwendung auf gewisse Differentialgleichungen, in welchen die von Herrn Malmsten in seinem „Mémoire sur l'intégration des équations différentielles" (Liouville J. (2) VII.) untersuchten Differentialgleichungen als besondere Fälle enthalten sind, um an ihnen zu zeigen, dass es zur Begründung der Malmsten'schen Sätze keiner Verallgemeinerung der Jacobi'schen Theorie bedarf.

Hr.

D. Bierens de Haan. Jets over de integreerende vergelyking. Versl. en Mededeel. XIV. 162-179.

Der Herr Verfasser behandelt die integrirende Gleichung, das heisst die Differentialgleichung für den integrirenden Factor linearer Differentialgleichungen. Zuerst wird die lineare Differentialgleichung der zweiten Ordnung in Betracht gezogen und hier allgemein und in einigen Beispielen der Factor bestimmt, obgleich auch mit diesem Factor die allgemeine Gleichung nicht integrirbar ist. Sodann wird die lineare Differentialgleichung der dritten Ordnung untersucht, wo jedoch die integrirende Gleichung selbst kein Integral giebt; natürlich ist dieses auch der Fall mit der allgemeinen linearen Differentialgleichung beliebiger Ordnung. G.

A. Letnikoff. Allgemeine Formel für die Integration linearer Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten und zweitem Gliede. Mosk. Math. Samml. IX. 550-556.

K. Pearson. On the solution of some differential equations by Bessel's functions. Messenger (2) IX. 127-131.

In dem letzten Capitel seiner „Studien über die Bessel'schen Functionen" betrachtet Herr Lommel einige Gleichungen, welche sich auf die Bessel'sche Form reduciren. In dieser Note giebt der Verfasser eine etwas allgemeinere Methode, welche zu allgemeineren Resultaten führt. Glr. (O.)

A. Cayley. Note on a hypergeometric series. Quart. J. XVI. 268-270.

In der Abhandlung des Herrn Schwarz: „Ueber diejenigen Fälle, in welchen die Gauss'sche hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes darstellt" (Borchardt J. LXXV. 292, s. F. d. M. V. 1873. p. 249), ergiebt sich als besonderer Fall aus der allgemeinen Theorie, dass die Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{\frac{3}{8}-\frac{7}{6}x}{x(1-x)}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\frac{1}{48}}{x(1-x)}\,y=0,$$

zu der die hypergeometrische Reihe $F(\frac{1}{4}, -\frac{1}{12}, \frac{2}{3}, x)$ gehört, algebraisch integrirbar ist. Dieses Resultat wird hier direct hergeleitet.

M.

R. Rawson. Solution of a question (5779). Educ. Times XXXII. 59-60.

Die Differentialgleichung

$$\frac{d^2P_n}{dx^2}+\left\{\frac{(2m-1)\beta\frac{d\beta}{dx}}{\alpha-\beta^2}-\frac{\frac{d^2\beta}{dx^2}}{\frac{d\beta}{dx}}\right\}\frac{dP_n}{dx}+\frac{n(n-2m)\left(\frac{d\beta}{dx}\right)^2}{\alpha-\beta^2}\cdot P_n=0,$$

wo P_n der Coefficient von y^n in der Entwickelung von

$$(\alpha+2\beta y+y^2)^m,$$

β eine Function von x, endlich α und m Constante sind, hat zum vollständigen Integral

$$C_1P_n+C_2P_n\int\frac{(\alpha-\beta^2)^{m-\frac{1}{2}}d\beta}{(P_n)^2}.$$

O.

Worms de Romilly. Sur l'équation du second ordre $Myy''+Ny'^2=f(x)$. Nouv. Ann. (2) XVIII. 77-85.

Die Integration der Differentialgleichung

$$3yy''-2y'^2=Ax^2+2Bx+C$$

lässt sich bekanntlich auf die Quadraturen

$$\int\frac{du}{u\sqrt{\varDelta+4\alpha u-u^3}},\quad\int f(x)\,dx$$

reduciren, wo $\varDelta$ und $f(x)$ sich aus den Coefficienten A, B, C zusammensetzen und α die willkürliche Constante ist. Hieran anknüpfend legt sich der Herr Verfasser die Frage vor: Welchen Bedingungen müssen in der Differentialgleichung zweiter Ordnung $Myy''+Ny'^2=f(x)$ die Constanten M, N und die Function $f(x)$ genügen, damit ihr Integral auf die nur Quadraturen erfordernde Form reducirt werden könne:

$$\int \frac{du}{\sqrt{\varphi + C\psi}} = C' + \int F(x)\,dx,$$

wo φ, ψ Functionen von u und C und C' die willkürlichen Constanten sind?

Es ergeben sich hierfür 6 verschiedene Fälle:

a) $f(x) = (Bx+H)^p, \quad M(p+2)+N(p+4) = 0;$
b) $f(x) = e^{Bx+H}, \quad M+N = 0;$
c) $f(x) = \text{const.}, \quad M, N$ beliebig;
d) $f(x) = \sqrt{Ax^2+2Bx+C}, \quad 3M+5N = 0;$
e) $f(x) = (bx+d)^{2p}, \quad M(2p+1)+N(2p+2) = 0;$
f) $f(x) = (Ax^2+Bx+C)^p, \quad M(p+1)+N(p+2) = 0;$

und bei der Substitution

$$y = uf(x)^n, \quad n = -\frac{M}{2(M+2N)}$$

wird alsdann

$$\varphi + C\psi = Cu^{-\frac{2N}{M}} + \beta u^2 + \delta$$

und $F(x)$ eine Potenz von $f(x)$. T.

J. Cockle. Note on criticoids and synthetical solutions. Educ. Times XXXII. 86.

Fortsetzung der Arbeit, die F. d. M. VIII. 1876. p. 198 besprochen ist. O.

W. H. L. Russell. Note on a theorem in linear differential equations. Rep. Brit. Ass. 1879.

Der Verfasser macht darauf aufmerksam, dass eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung unmittelbar integrabel ist, wenn der Coefficient des letzten Gliedes, negativ genommen, gleich ist der Summe der beiden ersten Glieder, und spricht dann den folgenden Satz aus: Es sei

$$H\frac{d^4u}{dx^4} + K\frac{d^3u}{dx^3} + L\frac{d^2u}{dx^2} + M\frac{du}{dx} + N = 0$$

eine lineare Differentialgleichung vierter Ordnung, wo H, K etc. rationale Functionen von x sind; dann kann

$$z = \lambda \frac{d^2u}{dx^2} + \mu \frac{du}{dx} + \nu u,$$

die vorgelegte Gleichung auf eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung in z reducirt werden im Fall, dass

$$\begin{aligned} N^4\varrho^8 - 2LN^3\varrho^7 + (L^2N^2 + KMN^2)\varrho^6 + (2HLN^2 - KLMN - KN^2 - HM^2N)\varrho^5 \\ - (2H^2N^2 + 2HL^2N - 2HKMN - K^2LN - HM^2L)\varrho^4 \\ + (2H^2LN - HKLM - H^2M^2 - HK^2N)\varrho^3 + (H^2L + H^2KM)\varrho^2 \\ - 2H^3L\varrho + H^4 = 0, \end{aligned}$$

wo ϱ eine Constante ist. Csy. (O.)

STARKOF. Sur l'intégration des équations linéaires. N. C. M. V. 225-230.

Folgerungen aus der Zerlegung von

$$D^n y + P_1 D^{n-1} y + P_2 D^{n-2} y + \cdots = 0$$

in die n simultanen Gleichungen:

$$Dy + Q_1 z = 0, \quad Dz + Q_2 x = 0, \ldots Dt + Q_n y = 0.$$

Mn. (O.)

G. HALPHÉN. Sur l'équation différentielle des coniques. Bull. S. M. F. VII. 83-85.

Zu der Differentialgleichung 5^{ter} Ordnung der Kegelschnitte gelangt man sehr einfach durch die Bemerkung, dass, wenn ihrer Gleichung die Form gegeben wird:

$$y = ax + b + \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C},$$

alsdann $y''^{-\frac{2}{3}}$ eine ganze Function 2^{ten} Grades von x ist; daher ist $(y''^{-\frac{2}{3}})''' = 0$ oder ausgerechnet:

$$9y''^2 y^{\text{V}} - 45 y'' y''' y^{\text{IV}} + 40 y'''^3 = 0$$

die gesuchte Differentialgleichung. Hieran wird die Integration derselben geknüpft, die dem Herrn Verfasser nicht ohne Interesse erscheint, da sie Gelegenheit zur Anwendung mehrerer der bekannten Integrationsmethoden bietet. T.

R. R. Webb. On a certain system of simultaneous differential equations. Messenger (2) IX. 6-9.

Das System heisst

$$x'^2+y'^2+z'^2=\alpha,\quad x''^2+y''^2+z''^2=\beta$$

$$\begin{vmatrix} x''', & y''', & z''' \\ x'', & y'', & z'' \\ x', & y', & z' \end{vmatrix}=\gamma$$

und stellt die Classe von Curven dar, die constante Krümmung und Windung (tortuosity) haben. Der Verfasser giebt eine Methode zur Integration des Systems. Die dargestellten Curven sind Schraubenlinien.

Glr. (O.)

J. J. Sylvester. Note on an equation in finite differences. Phil. Mag. 1879.

Die untersuchte Gleichung ist

$$u_x=\frac{u_{x-1}}{x}+u_{x-2}.$$

Als Resultat ergiebt sich ein Beweis für die Identität:

$$\left(1+\frac{1}{2}x+\frac{1.3}{2.4}x^2+\frac{1.3.5}{2.4.6}x^3\ldots\right)$$
$$\left(1+\frac{1}{2}\frac{x}{3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{x^2}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^3}{7}+\cdots\right)$$
$$=\left(1+\frac{1}{2}\frac{x}{3}+\frac{2.4}{1.3}\frac{x^2}{5}+\frac{2.4.6}{1.3.5}\frac{x^3}{7}+\cdots\right).$$

Csy. (O.)

Capitel 6.

Partielle Differentialgleichungen.

S. Spitzer. Integration partieller Differentialgleichungen. Wien. Gerold's Sohn.

Der Herr Verfasser findet das Gebiet der Integration partieller Differentialgleichungen selbst in den besten Lehrbüchern stiefmütterlich behandelt. „Ein Werk, das blos über die Integration partieller Differentialgleichungen handelt, giebt es nicht.“ Was nun die Lehrbücher betrifft, so möchten wir der angeführten Behauptung gegenüber auf das inhaltreiche Buch des Herrn Natani „Die höhere Analysis in vier Abhandlungen“ Berlin 1866 verweisen, in welcher das fragliche Gebiet in grösster Ausführlichkeit behandelt ist. Aber auch an besonderen Werken darüber fehlt es nicht. Wir nennen nur das preisgekrönte Werk des Herrn Mansion: Théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre, Paris 1875, sowie die vorausgehenden Monographieen der Herren Imschenetzky und Graindorge über denselben Gegenstand. Die Kenntnis der erwähnten Werke würde vielleicht den Herrn Verfasser veranlasst haben, ausser den Arbeiten von Euler, Lagrange, Pfaff und den ersten Arbeiten von Jacobi darüber, die seinem Buche zu Grunde liegen, auch die nachgelassenen Arbeiten von Jacobi, sowie die neueren Untersuchungen auf diesem Gebiete zu berücksichtigen. Das Buch, welches sich als den Anfang eines ausführlichen Werkes ankündigt, beschränkt sich auf die Integration partieller Differentialgleichungen 1ter Ordnung zwischen 2 unabhängigen und einer abhängigen Veränderlichen. Es zerfällt in 4 Abschnitte. Der erste behandelt die Integration einer totalen Differentialgleichung zwischen drei Veränderlichen nach der Euler'schen Methode, die daran angebrachten Vereinfachungen durch die Herren Natani und Du Bois-Reymond sind nicht angegeben. Im zweiten Abschnitt wird die Lösung der linearen partiellen Differentialgleichungen der ersten Ordnung nach Lagrange und Jacobi gegeben. Der dritte Abschnitt

enthält die Darlegung der Pfaff'schen Methode der Integration totaler Differentialgleichungen in dem Falle, wo die Zahl der Veränderlichen 4 beträgt. Es folgt alsdann im vierten Abschnitt die Lösung der nicht linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen zwei unabhängigen und einer abhängigen Veränderlichen lediglich nach der Pfaff'schen Methode. Das Buch ist klar und leicht verständlich geschrieben und jeder Abschnitt mit zahlreichen Beispielen versehen, die zum grössten Theil dem dritten Bande des Werkes: „Euler's vollständige Anleitung zur Integralrechnung, übersetzt von Salomon" entnommen sind. Ein hinzugefügter Anhang setzt die Polemik gegen Herrn Winckler fort. Hr.

H. Laurent. Mémoire sur les équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre à une seule fonction inconnue. Liouville J. (3) V. 249-284.

Der Herr Verfasser schickt in den beiden ersten Abschnitten eine Theorie der unbeschränkt integrablen Systeme totaler Differentialgleichungen voraus, die sich im Wesentlichen an die von Herrn Mayer in Clebsch's Ann. V. p. 448 ff., (siehe F. d. M. IV. 1872. p. 162) gegebene Darstellung anschliesst. Ausser der Aufstellung der Integrabilitätsbedingungen findet sich hier der Nachweis, dass die Integration solcher Systeme auf die eines einzigen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückgeführt werden kann. Hierauf folgt die Auseinandersetzung seiner Integrationsmethode der simultanen partiellen Differentialgleichungen, in denen die unbekannte Function selbst nicht vorkommt. Dieselben werden auf die Form

$$(1)\qquad \frac{\partial u}{\partial t_1}=f_1,\quad \frac{\partial u}{\partial t_2}=f_2,\dots\frac{\partial u}{\partial t_n}=f_n$$

gebracht, wo u die unbekannte Function, $f_1\dots f_n$ gegebene Functionen der $m+n$ Variablen $x_1\dots x_m$, $t_1\dots t_n$ und der Ableitungen

$$p_1=\frac{\partial u}{\partial x_1},\dots p_m=\frac{\partial u}{\partial x_m}$$

bezeichnen. Die Anwendung von Betrachtungen, die auf der

Variationsmethode der Constanten beruhen, führt auf kürzestem Wege zu dem nachstehenden System totaler Differentialgleichungen

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} -dx_i &= \frac{\partial f_1}{\partial p_i}\,dt_1 + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial p_i}\,dt_n \\ dp_i &= \frac{\partial f_1}{\partial x_i}\,dt_1 + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_i}\,dt_n \end{aligned}\right\} \quad i = 1,\, 2 \ldots m,$$

$$(3)\qquad du = p_1\,dx_1 + \cdots + p_m\,dx_m + f_1\,dt_1 + \cdots + f_n\,dt_n.$$

Unter der Voraussetzung der unbeschränkten Integrabilität dieses Systems, welche, wie bewiesen wird, mit der des Systems (1) gleichzeitig stattfindet, sind die Gleichungen (2) zu integriren und als die $2m$ Constanten der Integration die Werthe $x_1^0 \cdots x_m^0$, $p_1^0 \cdots p_m^0$ der x und p für $t_1 = t_1^0, \ldots t_n = t_n^0$ zu wählen, so dass die x und p als Functionen der x^0, p^0, t erhalten werden. Durch Elimination der p^0 aus den Integralen ergeben sich die p als Functionen der x, t und x^0 und durch Einsetzen in

$$u = u^0 + \int (\Sigma p dx + \Sigma f(t)\, dt)$$

auch u als Function derselben Grössen; indem man endlich auch die p eliminirt, erhält man u als Function der x und t, welche die $m+1$ Constanten $x_1^0 \ldots x_m^0 u^0$ enthält und somit die vollständige Lösung von (1) darstellt. Hieraus leitet man in bekannter Weise die allgemeine Lösung her. Für die Lösungen des Systems (2), auf dessen Integration die des Systems (1) zurückgeführt ist, gilt der dem Poisson'schen Theorem analoge Satz, dass, wenn $v_1 =$ const. und $v_2 =$ const. Integrale desselben sind, auch

$$(v_1\, v_2) = \sum_k \left(\frac{\partial v_1}{\partial p_k} \frac{\partial v_2}{\partial x_k} - \frac{\partial v_1}{\partial x_k} \frac{\partial v_2}{\partial p_k} \right) = \text{const.}$$

ein Integral ist. Zur Lösung des Systems (1) giebt der Herr Verfasser noch eine zweite Methode, die darin besteht, zu den n Gleichungen (1) noch m andere hinzuzufügen, die m willkürliche Constante enthalten und mit den ersteren ein unbeschränkt integrables System bilden. Bestimmt man durch die m neuen Gleichungen die p als Functionen der x und t, so wird

$$u = u^0 + \int (\Sigma p dx + \Sigma f(t)\, dt)$$

ein integrabler Ausdruck und liefert die vollständige Lösung.

Zur Auffindung der hinzuzufügenden Gleichungen dient dem Herrn Verfasser das von Herrn Mayer modificirte Jacobi'sche Verfahren, wobei man successive zu m genau wie (2) gebildeten Systemen totaler Differentialgleichungen gelangt, von denen es jedoch hinreicht, nur je ein Integral zu finden. Zum Schluss wird an einem sehr einfachen Beispiel die erst erwähnte Integrationsmethode durchgeführt. Hr.

H. W. L. Tanner. On certain systems of partial differential equations of the first order with several dependent variables. Proc. L. M. S. X. 55-74.

Es handelt sich um solche Systeme von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, die durch Jacobi'sche Determinanten aufgelöst werden können. Den einfachsten Fall bildet hier das aus einer einzigen Gleichung bestehende System

$$(1) \qquad \frac{\partial z_1}{\partial x_1} + \frac{\partial z_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial z_n}{\partial x_n} = 0,$$

und die allgemeine Lösung lautet:

$$(-1)^{i+1} z_i = \frac{\partial(y_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad y_{n-1})}{\partial(x_1 \ldots x_{i-1} x_{i+1} \ldots x_n)},$$

wo die rechte Seite eine Jacobi'sche Determinante bedeutet, in der $y_1 \ldots y_{n-1}$ willkürliche Functionen von $x_1 \ldots x_n$ sind. Die $n(n-1)$ Ausdrücke

$$z_{ik} = (-1)^{i+k-1} \frac{\partial(y_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad y_{n-2})}{\partial(x_1 \ldots x_{i-1} x_{i+1} \ldots x_{k-1} x_{k+1} \ldots x_n)} \quad i \gtrless k$$

stellen offenbar eine Lösung des folgenden Systems von n Gleichungen dar

$$(2) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial z_{12}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial z_{13}}{\partial x_3} + \cdots + \dfrac{\partial z_{1n}}{\partial x_n} = 0, \\ \dfrac{\partial z_{21}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial z_{23}}{\partial x_3} + \cdots + \dfrac{\partial z_{2n}}{\partial x_n} = 0, \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ \dfrac{\partial z_{n1}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial z_{n2}}{\partial x_2} + \cdots + \dfrac{\partial z_{n,n-1}}{\partial x_{n-1}} = 0. \end{cases}$$

Diese Lösung ist, wie bewiesen wird, die allgemeinste; aus ihrer Form geht hervor, dass zwischen den z die Bedingungsgleichungen bestehen müssen

$$z_{ik} = -z_{ki}, \quad z_{ik}z_{lm} + z_{il}z_{mk} + z_{im}z_{kl} = 0;$$

in Folge dessen sind nur $2n-3$ der z von einander unabhängig. Setzt man für z_{ik} unter Einführung einer neuen willkürlichen Function λ die Werthe

$$z_{ik} = \lambda \frac{\partial(y_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad y_{n-2})}{\partial(x_1 \ldots x_{i-1}x_{i+1} \ldots x_{k-1}x_{k+1} \ldots x_n)},$$

zwischen welchen die nämlichen Relationen, wie vorhin bestehen, so stellen diese die allgemeine Lösung des folgenden Systems dar:

$$(3) \quad \begin{cases} \quad z_{ik}\left(\dfrac{\partial z_{l1}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial z_{l2}}{\partial x_2} + \cdots + \dfrac{\partial z_{ln}}{\partial x_n}\right) \\ + z_{li}\left(\dfrac{\partial z_{k1}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial z_{k2}}{\partial x_2} + \cdots + \dfrac{\partial z_{kn}}{\partial x_n}\right) \\ + z_{kl}\left(\dfrac{\partial z_{i1}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial z_{i2}}{\partial x_2} + \cdots + \dfrac{\partial z_{in}}{\partial x_n}\right) = 0. \end{cases}$$

Diese Ergebnisse werden nun in naheliegender Weise verallgemeinert. Das zu integrirende System besteht alsdann aus

$$n_{m-1} = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+2)}{1.2 \quad \ldots \quad (m-1)}$$

Gleichungen von ähnlicher Beschaffenheit wie (1) mit $(n-1)n_{m-1}$ abhängigen Variablen, zwischen welchen so viele den obigen analoge Relationen bestehen, dass nur $m(n-m)+1$ unter ihnen von einander unabhängig sind. Für $m=1$ und $m=2$ ergeben sich die Systeme (1) und (2). Wie aus ihnen das System (3), so wird aus dem allgemeinen ein analoges gebildet, dessen Lösung noch den willkürlichen Factor λ enthält. Die Fälle $m=n-1$ und $m=n-2$ werden besonders behandelt und führen auf bekannte Resultate. Hr.

E. Mathieu. Étude des solutions simples des équations aux différences partielles de la physique mathématique. Liouville J. (3) V. 5-21.

Siehe Abschn. XI. Cap. 1.

Julius Petersen. En Bemärkning om totale Differentialligninger. Zeuthen Tidsskr. (4) III. 170-171.

Der Verfasser macht darauf aufmerksam, dass die totale Differentialgleichung $Mdx + Ndy + Pdz = 0$ bisweilen für alle Punkte einer einzelnen Fläche befriedigt sein kann, ohne dass die allgemeine Integrabilitätsbedingung identisch erfüllt wäre.

Gm.

D. Delarue. Singuläre Lösungen der Differentialgleichungen höherer Ordnung. Mosk. Math. S. IX. 501-529.

Es werden Kriterien zur Unterscheidung singulärer Lösungen von den particulären Integralen gegeben. Die Kriterien des Verfassers sind den von Cauchy für die erste Ordnung gegebenen analog.

P.

J. Cockle. On differential equations, total and partial, and on a new soluble class of the first order and an exceptional case of the second. Proc. L. M. S. X. 105-120.

Die Arbeit zerfällt in 7 Paragraphen. § 1 und § 2 enthalten Vorbereitungen, und zwar § 2 hauptsächlich Eigenschaften des binären Differentials $Pdx + Qdy$ und eine Bemerkung bezüglich des ternären $Pdx + Qdy + Rdz$; § 3 und § 5 handeln von gewissen Ausnahmelösungen der ternären totalen Differentialgleichungen, § 6 von ebensolchen in Bezug auf partielle Differentialgleichungen, § 4 enthält eine Digression über exakte Differentiale und den Monge'schen Process. Im Schlussparagraphen ist die Ausdehnung der Betrachtungen auf quaternäre Differentiale angedeutet.

T.

A. V. Bäcklund. Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Clebsch Ann. XV. 39-86.

Das Referat wird im nächsten Jahrgange nachgeholt werden.

O.

A. E. Pellet. Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles d'ordres supérieurs au premier.
C. R. LXXXIX. 92-93.

Es sei $F=0$ eine partielle Differentialgleichung m^{ter} Ordnung mit n unabhängigen Variablen. Damit die partielle Differentialgleichung μ^{ter} Ordnung $V-a=0$, wo $\mu<m$, ein intermediäres Integral der Gleichung $F=0$ sei, ist nothwendig und hinreichend, dass dieser Gleichung genügt wird durch jedes System von Werthen der Derivirten der unbekannten Function von höherer als μ^{ter} Ordnung, welches sämmtliche durch successive totale Differentiation von $V=a$ nach allen unabhängigen Variablen entstehende Gleichungen befriedigt. Hr.

Sophus Lie. Theorie der Transformationsgruppen. V.
Arch. f. Math. og Nat. IV. 232-261.

Eine infinitesimale Transformation zwischen den Grössen x, y, p

$$\delta x = \xi(x-yp)\,\delta t, \quad \delta y = \eta\delta t, \quad \delta p = \pi\delta t,$$

ist eine Berührungstransformation der Ebene xy, wenn eine Bedingungsgleichung der Form

$$\frac{\delta}{\delta t}(dy-pdx) = \varphi(xy)(dy-pdx)$$

oder die äquivalente

$$d\eta - \pi dx - pd\xi = \varphi(dy-pdx)$$

stattfindet. Diese Relation wird in allgemeinster Weise befriedigt durch die Gleichungen

$$\xi = \frac{dW}{dp}, \quad \eta = -W + p\frac{dW}{dp}, \quad \pi = -\frac{dW}{dx} - p\frac{dW}{dy},$$

in denen W eine willkürliche Function von xyp bezeichnet. Ist W eine analytische Function in der Umgebung des Werthsystems $x=0, \quad y=0, \quad p=0$:

$$W = A + Bx + Cy + Dp + Ex^2 + Fxy + Gy^2 + Hxp + Kyp + Lp^2 + \cdots,$$

so sind ξ, η, π ebenfalls analytische Functionen in der Umgebung desselben Werthsystems und durch Berechnung ergiebt sich

$$\xi = \quad D + Hx + Ky + 2Lp + \cdots$$
$$\eta = -A - Bx - Cy + \cdots$$
$$\pi = -B - Cp - 2Ex - Fy + \cdots.$$

Hiermit sind die Glieder nullter und erster Ordnung in den Reihenentwickelungen der Grössen $\xi\,\eta\,\pi$ gefunden. Diese einfache, gleichzeitig aber wichtige Bemerkung dient dem Verfasser als Ausgangspunkt für eine verhältnismässig einfache Begründung seiner schon in den Gött. Nachr. 1874, Nr. 22, (s. F. d. M. VI. p. 93) durchgeführten Bestimmung aller Gruppen von Berührungstransformationen einer Ebene. L.

Capitel 7.

Variationsrechnung.

P. du Bois-Reymond. Erläuterungen zu den Anfangsgründen der Variationsrechnung. Clebsch Ann. XV. 282-315, 564-576.

Das Referat wird im nächsten Jahrgange nachgeholt werden. O.

Siebenter Abschnitt.

Functionentheorie.

Capitel 1.

Allgemeines.

Duport. Sur une nouvelle représentation des quantités imaginaires. C. R. LXXXVIII. 1071-1073.

Die Darstellung beruht darauf, dass die 4 Parameter eines imaginären Punktes ($x = \alpha + pi$, $y = \beta + qi$) durch 4 Elemente ersetzt werden, die eine Gerade im Raume bestimmen. Diese Gerade wird auf folgende Weise construirt. Durch den Punkt x, y (wo x und y die Coordinaten eines Punktes der Ebene in Bezug auf 2 feste Axen sind) zieht man die beiden Geraden, deren Winkelcoefficienten $+i$ und $-i$ sind, errichtet in den reellen Punkten A und A' dieser Geraden Senkrechte zur xy-Ebene, welche die Ebene $z = +1$ in den Punkten B und B' treffen. Dann hat die Gerade BB' die Gleichung

$$x = \alpha - qz, \quad y = \beta + pz,$$

deren 4 Parameter zur Darstellung des gegebenen Punktes dienen sollen. Diese Darstellung wird auf Curven, und insbesondere auf Kegelschnitte angewendet. M.

A. Cayley. The Newton-Fourier imaginary problem. Am. J. II 97.

Das vorgelegte Problem verlangt eine Zerlegung der complexen Ebene, in der die Wurzeln einer Gleichung $f(u) = 0$ als Punkte A, B, $C\dots$, zugleich mit den Werthen

$$\xi_1 = \xi - \frac{f(\xi)}{f'(\xi)}, \quad \xi_2 = \xi_1 - \frac{f(\xi_1)}{f'(\xi_1)} \text{ etc.}$$

als Punkte P, P_1, $P_2\dots$ dargestellt werden, so dass bei willkürlicher Annahme eines P innerhalb eines Bereiches man schliesslich zum Punkte A gelangt, und ebenso für die übrigen.

M.

G. Valentin. De aequatione algebraica, quae est inter duas variabiles, in quandam formam canonicam transformata. Diss. Berlin.

Bei der Beschäftigung mit dem Problem der Transformation einer algebraischen Gleichung zwischen zwei Variablen auf die Normalform wendet der Herr Verfasser die Principien an, die Herr Weierstrass in seinen Vorlesungen über die Theorie der Abel'schen Functionen vorgetragen. Ist eine algebraische irreducible Gleichung $G(x, y) = 0$ gegeben, so kann man stets rationale Functionen $R_\mu(x, y)$ bilden, die abgesehen vom Unendlichen nur in einem einzigen Punkte (a, b), der durch die Gleichung $G(a, b) = 0$ definirt ist, unendlich werden, und zwar von der Ordnung μ. Bildet man alsdann die Summe

$$R(x, y) = \sum_{\mu=1}^{l} c_\mu R_\mu(x, y),$$

so lassen sich die Coefficienten c_μ so bestimmen, dass die Function $R(x, y)$ im Punkte (∞, ∞) nicht unendlich wird; und zwar hat man dazu $(m-1)(n-1)$ Gleichungen, wenn die Function $G(x, y)$ in Bezug auf x und y von den resp. Ordnungen m und n ist. Es genügt, an der Stelle (a, b) eine bestimmte Anzahl solcher Functionen $R(x, y)$, deren Ordnungen so klein wie möglich und von einander verschieden sind, zu betrachten, da alle anderen derartigen Functionen aus den ersteren gebildet werden können. Die aus den c_μ gebildete Determinante $\Delta = D(a, b)$ verschwindet für gewisse singuläre Werthe a_0, b_0; alsdann verschwinden ein

oder mehrere c_μ gleichfalls, und $R(x+y)$ wird in diesem singulären Punkte unendlich von einer Ordnung, die $\leqq (n+1)(m+1)$ ist. Es fehlen in der Reihe der Functionen $R(x, y)$ gewisse, deren Anzahl eine für die Functionen characteristische Invariante ϱ ist. Diese Functionen $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_\varrho$ werden bei der Herleitung der Gleichung zwischen x und y angewendet. Ist $\varrho > 2$, so giebt es zwischen je zwei ξ_α, ξ_β mehrere Gleichungen, die von den fehlenden Functionen ξ_μ abhängen. Herr Weierstrass hat alle Normalgleichungen für $\varrho = 1, 2, 3, 4$ entwickelt. In der vorliegenden Dissertation wird die Relation aufgestellt, die zwischen ϱ und der Anzahl der Functionen ξ_μ und deren Ordnung besteht. Alsdann wird für ein gegebenes ϱ allgemein die Gleichung zwischen x und y gebildet; es werden die Bedingungen zwischen den Coefficienten $A_{\lambda,\mu}^{(\nu)}$ in der Entwickelung

$$\xi_{m_\lambda} \cdot \xi_{m_\mu} = \sum_{k=1..n} A_{\lambda,\mu}^{(n-k)} \xi_{m_n - k}$$

hergeleitet, und gezeigt, dass die Gleichung den verlangten Eigenschaften genügt. Endlich wird die Zahl der Constanten dieser Gleichung angegeben, und zwar in den Fällen, wo die Anzahl derjenigen Functionen, aus welchen alle anderen gebildet werden können, gleich 2, 3 oder 4 ist. M.

H. A. Schwarz. Ueber diejenigen algebraischen Gleichungen zwischen zwei veränderlichen Grössen, welche eine Schaar rationaler eindeutig umkehrbarer Transformationen in sich selbst zulassen. Borchardt J. LXXXVII. 139-146.

Von den erwähnten Gleichungen wird bewiesen, dass sie den Riemann'schen Geschlechtern $p = 0$ oder $p = 1$ angehören. Der Beweis stützt sich auf die Betrachtung der zur Gleichung gehörigen Riemann'schen Fläche, so dass mit Rücksicht darauf dem Theorem auch die Fassung gegeben wird: Wenn eine geschlossene Riemann'sche Fläche durch eine Schaar abbildender Functionen auf sich selbst eindeutig, zusammenhängend und in

den kleinsten Theilen ähnlich abgebildet werden kann, so ist dieselbe entweder einfach oder dreifach zusammenhängend.

No.

J. J. Sylvester. Sur l'entrelacement d'une fonction par rapport à une autre. Borchardt J. LXXXVIII. 1-4.

Das mitgetheilte Theorem ist ein einfacher Specialfall des Kronecker'schen Satzes über Charakteristiken (vergl. F. d. M. II. 203-206, Berl. Monatsber. 1869, 159-193); es bezieht sich auf die Verschlingungen zweier Curven und einer schneidenden Geraden.

No.

A. Tonelli. Sopra un teorema delle funzioni. Brioschi Ann. (2) IX. 173-192.

Riemann hat in seiner „Theorie der Abel'schen Functionen" Borchardt J. LIV.) folgenden Satz bewiesen: „Stellt eine $(2p+1)$-fach zusammenhängende Fläche T die Verzweigung einer durch eine algebraische Gleichung

$$F(\overset{n}{s}, \overset{m}{z}) = 0$$

definirten Function s von z dar, so lässt sich jede für die Punkte der Fläche T monodrome Function S rational durch s und z ausdrücken und enthält, wenn sie m'-mal unendlich von der ersten Ordnung wird, $m'-p+1$ willkürliche Constanten." Der Beweis ist von Riemann unter der Voraussetzung geführt, dass die Lage der Punkte, in denen S unendlich wird, an gewisse Bedingungen geknüpft ist, wie die, dass diejenigen Punkte ausgeschlossen seien, für welche s oder z unendlich werden, und andere. Herr Prym hat alsdann (Borchardt J. LXXXIII.; s. F. d. M. IX. 1877. p. 284) diesen Satz ganz allgemein bewiesen, hat aber die Frage nach der Anzahl der willkürlichen Constanten, welche der Ausdruck für S enthält, bei Seite gelassen. Der von ihm gegebene elegante Beweis scheint für gewisse Werthe von S nicht mehr streng zu sein. Herr Tonelli giebt nun im Vorliegenden einen allgemeinen Beweis dieses Theorems ganz nach Riemann'schen Principien;

es ergiebt sich, dass die Zahl der Constanten nur in den Fällen mit der von Riemann angegebenen übereinstimmt, wo gewisse Lagen der Punkte, in denen S unendlich wird, ausgeschlossen werden. Dieses Resultat ist schon früher von Roch: „Ueber die Zahl der Constanten in algebraischen Functionen", Borchardt J. LXIV. bemerkt worden. M.

C. Weierstrass. Mémoire sur les fonctions analytiques uniformes. Traduit par E. Picard. Ann. de l'Éc. N. (2) VIII. 111-150.

Eine Uebersetzung der Abhandlung: „Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen", Berl. Abh. 1876. 11-60; siehe F. d. M. X. 1878. 282. M.

G. Mittag-Leffler. Extrait d'une lettre à M. Hermite. Darboux Bull. (2) III. 269-278.

Eine Reihe von Theoremen aus einer Abhandlung „Ueber die arithmetische Darstellung eindeutiger analytischer Functionen einer Veränderlichen", welche Herrn Weierstrass im Manuscript übersendet worden ist. Ferner Mittheilung über eine andere Abhandlung, welche in Arbeit ist und die allgemeine Darstellung solcher eindeutigen Functionen betrifft, die eine vielfache Unendlichkeit wesentlicher singulärer Punkte haben. Zum Schluss Inhaltsangabe einer Abhandlung: En ny serientveckling för funktioner af rationel karakter (Act. Soc. Fenn. XI.).

M.

C. Frenzel. Die Darstellung der eindeutigen analytischen Functionen durch unendliche Producte und Partialbruchreihen. Schlömilch Z. XXIV. 316-343.

Die Cauchy'sche Darstellung (Exercises de Math. III.) einer eindeutigen analytischen Function als Product von der Form

$$f(u) = u^m \Pi \frac{\left(1 - \frac{u}{a_k}\right)^{m_k}}{\left(1 - \frac{u}{\alpha_l}\right)^{n_l}} \cdot e^U$$

kann in dem Falle, wo sich die Null- und Unendlichkeitsstellen bis in das unendlich ferne Gebiet der Ebene des Argumentes erstrecken, nicht als fertiges analytisches Gebilde, sondern nur als der Grenzwerth einer gewissen analytischen Function betrachtet werden. Diesen formalen Uebelstand hat Herr Weierstrass durch die in seiner Abhandlung: „Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen“, Berl. Abh. 1876, gegebene Darstellung beseitigt. Für Functionen $f(u)$, die für alle endlichen Werthe des Argumentes endlich, eindeutig und stetig sind, deren Nullwerthe $a_1, a_2, \ldots$ mit den Ordnungszahlen $m_1, m_2, \ldots$ behaftet sind und der Bedingung genügen, dass

$$\sum_{k=1,2\ldots\infty} \frac{1}{a_k^n}$$

für gewisse ganzzahlige Werthe von n unbedingt convergirt, und wo ν die kleinste dieser Zahlen n ist, hat diese Productentwickelung die Form:

$$f(u) = e^{\psi(u)} . u^m \prod_{k=1,2\ldots\infty} \left\{ \left(1 - \frac{u}{a_k}\right) e^{\sum_{n=1}^{\nu-1} \frac{1}{n}\left(\frac{u}{a_k}\right)^n} \right\}^{m_k},$$

wo $\psi(u)$ eine ganze Function von u oder eine beständig convergente Reihe ist. Herr Frenzel leitet nun auf Grund der Cauchy'schen Methode diese Weierstrass'sche Entwickelung her, indem er das gewöhnlich eingeschlagene Verfahren dadurch modificirt, dass er eine endliche Anzahl von Nullpunkten durch eine beliebige Curve absondert und dann diese Curve nach einem willkürlichen Gesetz in's Unendliche rücken lässt. Als Beispiele für diese Productentwickelung dienen ihm die Functionen $\sin(\pi u)$ oder $\cos(\pi u)$, ferner die Weierstrass'sche Function $\sigma(u)$ oder das Jacobi'sche $\theta(u, q)$, das sich von derselben nur durch einen Factor e^{au^2} unterscheidet, und drittens die Function $\Gamma(u)$, die auch für beliebige complexe Werthe des Argumentes definirt

wird. Ebenso wie für die Productentwickelung wird nun auch für die Partialbruchentwickelung einer eindeutigen analytischen Function die Cauchy'sche Methode derart modificirt, dass die resultirende Entwickelung unbedingt convergirt. Als Beispiele werden behandelt die Functionen cotg (πu), $\wp(u)$ und $\Gamma(u)$. Hier sowohl wie oben gelangt der Herr Verfasser zu bekannten Entwickelungen.

M.

E. Picard. Sur un développement en série. C. R. LXXXVIII. 167-169.

Die durch die Gleichungen

$$x = f(\lambda, \theta), \quad y = f_1(\lambda, \theta)$$

bei constantem λ definirten Curven seien einfach geschlossen und zwar in der Art, dass man alle ihre Punkte erhält, wenn man den Winkel θ von 0 zu 2π übergehen lässt. Ferner seien die Curven $\lambda = \text{const.}$ und $\theta = \text{const.}$ orthogonal und der Quotient $\frac{\partial f}{\partial \lambda} : \frac{\partial f_1}{\partial \theta}$ eine Function von λ allein, nämlich $F(\lambda)$. Wenn in dem Gebiete zwischen den Curven $\lambda = \lambda_1$ und $\lambda = \lambda_2$, welche einander nicht schneiden, eine eindeutige und synektische Function der complexen Variabeln $z = x + yi$ definirt ist, so lässt sich dieselbe in eine nach ganzen positiven und negativen Potenzen von $R(\lambda)(\cos\theta + i\sin\theta)$ fortschreitende Reihe entwickeln. Dabei ist

$$R(\lambda) = e^{\int_{\lambda_1}^{\lambda} F(\lambda).d\lambda}.$$

Der Beweis, angeblich einem Vorgange von O. Bonnet nachgebildet, gründet sich auf einen bekannten Satz über die trigonometrischen Reihen, über dessen Beschränkungen der Verfasser sich jedoch nicht ausspricht.

St.

Laguerre. Sur le développement d'une fonction suivant les puissances croissantes d'un polynôme. Borchardt J. LXXXVIII. 35-48.

Jacobi hat zuerst die Entwickelung einer nach ganzen posi-

tiven Potenzen von z fortschreitenden Reihe $f(z)$ in eine Reihe nach Potenzen eines Polynomens $F(z)$ vom m^{ten} Grade betrachtet, deren Coefficienten Polynome von niedrigerem als dem m^{ten} Grade sind (vgl. Borchardt J. LIII. 103). Charakteristisch für diese Entwickelung ist, dass sie die zu sämmtlichen Wurzeln der Gleichung $F(z) = y$ gehörigen Werthe von $f(z)$ darstellen soll, falls sie für den Werth y convergirt. Herr Laguerre berechnet die Coefficienten der Entwickelung von $f(z) = e^{xz}$ zuerst allgemein, dann für $F(z) = z(z-1)$. Aus der letzteren Reihe leitet er eine Formel für $f(t+x)-f(t)$ ab, welche auch Herr Darboux gegeben hat (s. F. d. M. VIII. 1876. p. 125). Endlich wird auch $\log(1+xz)$ nach Potenzen von $z(z-1)$ entwickelt. St.

E. Picard. Sur une propriété des fonctions entières.
C. R. LXXXVIII. 1024-1027.

Es wird der Satz bewiesen, dass, wenn irgend eine ganze Function $G(z)$, d. h. eine solche, die in der ganzen Ebene eindeutig und stetig ist, niemals gleich a wird, kein zweiter, von a verschiedener Werth b existirt, den $G(z)$ nicht annehmen kann. Eine Function $G(x)$, die weder gleich a noch gleich b wird, ist eine Constante. M.

E. Picard. Sur les fonctions analytiques uniformes dans le voisinage d'un point singulier essentiel.
C. R. LXXXVIII. 745-747.

In der Umgebung eines wesentlichen singulären Punktes einer eindeutigen analytischen Function $f(x)$ mit einer endlichen Anzahl solcher Punkte giebt es unendlich viele Punkte, für welche $f(x)$ gleich einer beliebigen Zahl a ist; ausgenommen einen, bezüglich zwei besondere Werthe von a, je nachdem $f(x)$ eine endliche oder unendliche Anzahl von ausserwesentlichen singulären Stellen besitzt. St.

E. Picard. Sur les fonctions entières. C. R. LXXXIX. 662-665.

Ist $G(z)$ eine ganze Function, so giebt es nur einen einzigen endlichen Werth a, für welchen die Gleichung $G(z) = a$ nur eine endliche Anzahl von Wurzeln hat, vorausgesetzt, dass $G(z)$ kein Polynomen ist; sind aber a und b zwei endliche Grössen, und haben die Gleichungen $G(z) = a$ und $G(z) = b$ eine endliche Anzahl von Wurzeln, so ist $G(z)$ ein Polynomen. Dieser Satz wird unter Anwendung der Resultate bewiesen, die Herr Dedekind in seiner Abhandlung über die elliptischen Modul-Functionen, (Borchardt J. LXXXIII. 265, siehe F. d. M. IX. 1877. p. 353) gewonnen hat. M.

E. Picard. Sur une propriété de certaines fonctions analogues aux fonctions algébriques. C. R. LXXXIX. 1106-1108.

Dieselben Betrachtungen, welche der Herr Verfasser in einer früheren Note (siehe das vorige Referat) auf die ganzen Functionen angewendet hat, werden hier benutzt, um folgenden Satz zu beweisen: Es sei $A(z)$ eine Function der Variablen z, welche in jedem Punkte der Ebene eine endliche Zahl von Werthen hat, und welche in der ganzen Ebene nur eine begrenzte Zahl von singulären Punkten hat. Alsdann kann es nicht 2 Werthe a und b geben, für welche die Gleichungen $A(z) = a$ und $A(z) = b$ nur eine endliche Anzahl von Wurzeln haben, wenn nicht die Function $A(z)$ eine algebraische Function ist. Rechnet man die Pole der Function nicht unter die singulären Punkte, und nimmt man an, dass $A(z)$ eine beliebige Anzahl willkürlich gelegener Pole habe, so giebt es nicht 3 Werthe a, b, c, so dass die Gleichungen

$$A(z) = a, \quad A(z) = b, \quad A(z) = c$$

nur eine endliche Anzahl von Wurzeln haben, wenn nicht $A(z)$ eine algebraische Function ist. Hieraus folgt, dass, wenn die Differentialgleichung

$$F(x, y)\frac{dy}{dx} = (y-a)(y-b)(y-c)\,f(x, y)$$

ein in der ganzen Ebene eindeutiges Integral hat, dieses nur eine rationale Function sein kann. M.

David. Sur les développements des fonctions algébriques. C. R. LXXXIX. 219-221.

Wie der vorliegende Auszug aus dem Mémoire angiebt, wendet der Herr Verfasser als Fundamentalformel eine Reihe, die der Lagrange'schen ähnlich, aber allgemeiner ist, auf die vorgelegte Gleichung $f(y, x) = 0$ an, nachdem er sie auf die Form

$$y - t = K(y, x)$$

gebracht hat, die weit allgemeiner als die gewöhnliche Gleichung

$$y - t = xK(y)$$

ist. Die Convergenzgrenze ist nicht mehr ein Kreis, sondern eine geschlossene Curve, zu deren Bestimmung man die Werthe α und β von x und y suchen muss, die für die vorgelegte Gleichung gleiche oder unendliche Wurzeln ergeben. M.

E. Jürgens. Allgemeine Sätze über Systeme von zwei eindeutigen und stetigen reellen Functionen. Leipzig. Teubner.

Es werden für Systeme von zwei eindeutigen und stetigen Functionen von zwei Veränderlichen folgende Sätze bewiesen: „Wenn zwei unabhängige reelle Veränderliche x_1 und x_2, als rechtwinklige Punktcoordinaten in der Ebene aufgefasst, alle Stellen im Innern und auf einem Kreise durchlaufen, wenn von ihnen zwei andere reelle Veränderliche y_1 und y_2 eindeutig und stetig abhängen und dabei dasselbe Werthepaar y_1, y_2 zu einer endlichen Anzahl von Werthepaaren x_1, x_2 gehört, so enthält, indem auch die Veränderlichen y_1 und y_2 in einer zweiten Ebene als rechtwinklige Punktcoordinaten angesehen werden, der von den Punkten y_1, y_2 gebildete Theil dieser Ebene ein zweifach ausgedehntes Stück der Ebene, etwa die ganze Fläche eines Kreises, in sich“. Versteht man ferner unter einem inneren Punkte des Systemes einen Punkt, der mit allen in seiner Nähe

liegenden Punkten der Ebene zum Systeme gehört, so lässt sich nachweisen, dass, „wenn zwei eindeutige und stetige reelle Functionen von zwei reellen Veränderlichen dasselbe Werthepaar nicht wiederholt annehmen, einer inneren Stelle des Gebietes der unabhängigen Veränderlichen eine innere Stelle im Gebiete der abhängigen Veränderlichen entspricht, dass somit die Punkte x_1, x_2 und die Punkte y_1, y_2 einander eindeutig und stetig zugeordnet sind." Der erste Satz lässt sich noch in einem anderen wichtigen Falle vereinfachen und führt dann zu einem einfachen Beweise des Satzes, dass jede algebraische Gleichung Wurzeln hat. Zum Schluss wird das Vorhergehende angewendet auf eine Frage der Mannigfaltigkeitslehre; es wird gezeigt, dass kein Theil des dreifach ausgedehnten Raumes, welcher eine Kugel ganz enthält, auf irgend einen Theil der Ebene eindeutig und stetig abgebildet werden kann. M.

C. Weierstrass. Nachtrag zu der Abhandlung (Berl. Ber. 1858. 202-220): „Ueber ein die homogenen Functionen zweiten Grades betreffendes Theorem." Berl. Monatsber. 1879. 430-439.

In der im Titel genannten Abhandlung wurde der Hülfssatz angewendet: „Die Determinante der quadratischen Form

$$s.\varphi(x_1, x_2, \dots x_n) - \psi(x_1, x_2, \dots x_n),$$

worin s eine unbestimmte Grösse bezeichnet, und φ und ψ ganze homogene Functionen zweiten Grades der n Veränderlichen $x_1, x_2, \dots x_n$ mit reellen Coefficienten bedeuten, und überdies φ für reelle Werthe von $x_1, x_2, \dots x_n$ nur in dem Falle, wo diese sämmtlich gleich Null sind, verschwindet, ist eine ganze Function n^{ten} Grades von s, die nur für reelle Werthe dieser Grösse verschwindet". Für diesen Satz giebt Herr Weierstrass hier einen sehr einfachen, directen, von der Theorie der simultanen Transformation zweier quadratischer Formen ganz unabhängigen Beweis. Ein zweiter Gegenstand des Nachtrags ist die Integration eines Systems linearer Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_\alpha}{dt} &= \frac{\partial G(x_1, \ldots x_{2n})}{\partial x_{n+\alpha}}\\ \frac{dx_{n+\alpha}}{dt} &= -\frac{\partial G(x_1, \ldots x_{2n})}{\partial x_\alpha}\end{aligned}\right\} \quad (\alpha = 1 \ldots n),$$

wo $x_1, \ldots x_{2n}$ zu bestimmende Functionen der unabhängigen Veränderlichen t, und $G(x_1, \ldots x_{2n})$ eine ganze homogene Function zweiten Grades von $x_1, \ldots x_{2n}$ mit reellen Coefficienten und von der Beschaffenheit ist, dass sie bei reellen Werthen der Veränderlichen $x_1, \ldots x_{2n}$, wenn diese nicht sämmtlich gleich Null sind, beständig positiv ist. M.

Ch. Méray. Essai sur le calcul des quantités associées en systèmes et sur son application à la théorie des équations simultanées. Ann. de l'Éc. N. (2) VIII. 81-110, 327-360.

Siehe Abschn. II. Cap. 3 p. 76.

S. Pincherle. Sulle funzioni monodrome aventi un' equazione caratteristica. Rend. Ist. Lomb. (2) XII. 536-542.

Es werden diejenigen monodromen Functionen $y = f(x)$ untersucht, welche die Eigenschaft haben, dass, wenn die Variable x drei Werthe x_1, x_2, x_3 annimmt, die durch die Gleichung

(1) $$a_0 x_1 x_2 x_3 + a_1 x_2 x_3 + a_2 x_1 x_3 + a_3 x_1 x_2 + a_1' x_1 + a_2' x_2 + a_3' x_3 + a_0' = 0$$

verbunden sind, die zugehörigen Werthe y_1, y_2, y_3 der Function durch eine algebraische Gleichung

$$F(y_1, y_2, y_3) = 0$$

verbunden sind. Diese letzte Gleichung heisst die „charakteristische Gleichung" für die Function $y = f(x)$, „in Bezug auf die Gleichung (1)." Es werden die monodromen algebraischen Functionen ausgeschlossen. Das Resultat der Untersuchung ergiebt, dass alle in Frage stehenden Functionen sich durch eine lineare Transformation der Variablen entweder auf periodische

Functionen oder auf Functionen, die der Functionalgleichung

$$\varphi(z) = \varphi(\alpha z)$$

genügen, zurückführen lassen. M.

J. R. RYDBERG. Om algebraiska integraler till algebraiska funktioner. Lund Årsskr. 1879.

Das Integral $\int u dz$ einer von der Gleichung $f(z, u) = 0$ definirten algebraischen Function ist (Briot-Bouquet, Théorie des fonctions elliptiques) selber algebraisch, wenn es weder Polar- noch Cykel-Perioden giebt. Nach Darstellung einiger einfachen Transformationsmethoden zeigt der Verfasser zuerst, wie man sich die Untersuchung der Polarperioden durch eine Coordinatenveränderung immer ersparen kann, und behandelt darnach getrennt die Fälle mit neutralem und mit kritischem Antipodenpunkt, wobei er jedoch nur die hinreichenden, nicht die nothwendigen Bedingungen zu finden sucht. Diese sind z. B. im ersten Falle: 1) dass es keine Polarperioden giebt, 2) dass das Geschlecht der „Fundamentalcurve" $f(z, u) = 0$ Null ist, 3) dass ihre sämmtlichen Asymptoten Inflexionsasymptoten sind. Die Anwendung der Methode wird zuletzt durch verschiedene Beispiele erläutert. Bg.

G. ASCOLI. Sul prodotto di più funzioni integrabili e finite. Rend. Ist. Lomb. (2) XII. 372-374.

Sind

$$\varphi_1(x), \ \varphi_2(x), \ldots \varphi_m(x)$$

m endliche und in dem Intervall ab integrirbare Functionen, so wird das Product

$$\varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x) \ldots \varphi_m(x)$$

eine in demselben Intervall integrirbare Function darstellen, wenn sich kein Theil des Intervalles ab angeben lässt, in dessen sämmtlichen Punkten das Product

$$\varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x) \ldots \varphi_m(x)$$

aufhört, eine bestimmte Bedeutung zu haben. M.

G. Ascoli. Un teorema di calcolo integrale. Rend. Ist. Lomb. (2) XII. 215-218.

G. Ascoli. Sulle funzioni la cui derivata prima appartiene alla classe zero. Rend. Ist. Lomb. (2) XII. 337-341.

Herr Ascoli beschäftigt sich hier mit einer, im Intervalle $(a+0, b-0)$ überall definirten Function $F(x)$, für welche der Quotient $\{F(x+\xi)-F(x)\}:\xi$ bei verschwindendem ξ in den Punkten eines überall dichten Punktsystemes k des Intervalles $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$ gleichförmig zwischen endlichen Unbestimmtheitsgrenzen A_x B_x oscillirt. Er führt dabei folgende Bezeichnung ein: Es seien die vier Unbestimmtheitsgrenzen $(\lim\xi=\pm 0)$ A_x, B_x, A'_x, B'_x integrabel in jedem Theile (α, x) des Intervalles (a, b) und die Integrale einander gleich; dann heisst ihr gemeinsamer Werth: $F(x)-F(a)$ „begabt mit einer endlichen Ableitung im Intervalle (a, b)“, welche darin eine Classe integrabler Functionen bestimmt.

St.

Ch. Hermite. Sur l'indice des fractions rationnelles. Bull. S M. F. VII. 128-131.

Aus dem Satze von Cauchy über die geschlossenen Integrale der eindeutigen Function $f'(x):f(x)$ folgt, dass, wenn eine ganze Function n^{ten} Grades von x, $f(x)=U+Vi$, wo U, V Functionen mit reellen Coefficienten bezeichnen (die erstere sicher in x vom n^{ten} Grade), keine reellen Wurzeln hat, die Differenz zwischen der Anzahl derjenigen Wurzeln von $f(x)=0$, wo der Coefficient von i positiv ist, und der Anzahl derjenigen Wurzeln, wo er negativ ist, gleich ist dem Index der rationalen Function $U:V$, d. i. dem Unterschiede zwischen der Anzahl der reellen Wurzeln von $U=0$, bei deren Durchgange $U:V$ vom Positiven zum Negativen übergeht, und derjenigen, wo der Zeichenwechsel in entgegengesetztem Sinne erfolgt. Dieser Satz wird hier elementar bewiesen, und einige Anwendungen desselben werden vorgeführt.

St.

A. Sachse. Versuch einer Geschichte der Darstellung willkürlicher Functionen einer Variablen durch trigonometrische Reihen. Diss. Göttingen.

Der Herr Verfasser will die Resultate in Kurzem zusammenfassen, welche die älteren und insbesondere die, seit der Riemann'schen Habilitationsschrift vom Jahre 1854 veröffentlichten Untersuchungen über die Darstellbarkeit einer Function durch trigonometrische Reihen geliefert haben. Die wenig zusammenhängende Anführung und Inhaltsangabe einzelner Schriften zeigt, dass dem Herrn Verfasser derjenige Ueberblick mangelt, den eine wirkliche Geschichte dieser subtilen Theorie der Darstellung einer Function und der Gültigkeit der trigonometrischen Entwickelung erfordert. Will man eine Geschichte der Fourier'schen Reihen schreiben, so darf man nicht — fast systematisch — grade solche Arbeiten verschweigen, welche die Frage nach den Bedingungen der Darstellbarkeit zum Abschluss gebracht haben. Einer speciellen Angabe dieser Lücken sind wir überhoben durch eine inzwischen erschienene Schrift des Herrn Prof. Paul Du Bois-Reymond: „Zur Geschichte der trigonometrischen Reihen. Eine Entgegnung. Tübingen, Laupp", auf welche wir hiermit verweisen. M.

O. Bonnet. Note sur la formule qui sert de fondement à une théorie des séries trigonométriques. Darboux Bull. (2) III. 480-484.

Siehe Abschn. V. Cap. 1. p. 175.

G. Darboux. Addition au mémoire sur les fonctions discontinues. Ann. de l'Éc. N. (2) VIII. 195-202.

Der in der erwähnten Abhandlung (siehe F. d. M. VII. 1875. p. 245) kurz gefasste Beweis des Satzes, dass die stetige Function

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin[(n+1)!\,x]}{n!}$$

für keinen Werth von x einen endlichen Differentialquotienten besitze, wird hier ausführlich mitgetheilt. Ausgehend von gewissen Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(a_n b_n x)}{a_n},$$

worin a_n, b_n numerische Functionen von n bezeichnen, gelangt Herr Darboux nicht blos zu obigem Beispiele einer stetigen Function ohne Differentialquotienten, sondern auch zu folgendem:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos a_n x}{a_n},$$

wenn die positiven Zahlen a_n der Bedingung genügen

$$\lim_{n=+\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{a_n} = 0.$$

St.

K. Hertz. Ueber die keinen Differentialquotienten besitzenden Functionen. Par. Denkschr. XI. (Polnisch).

Diese Arbeit nähert sich am meisten der bekannten Arbeit „Mémoire sur les fonctions discontinues" von Darboux (siehe das vorige Referat); sie berücksichtigt die neueren Untersuchungen von Du Bois-Reymond, Hankel und Thomae; die Behandlung ist wissenschaftlich und klar. Der Verfasser giebt auch eine Verallgemeinerung der bekannten Weierstrass'schen Function, nämlich

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} b^n \cos^p(a^n x)\pi,$$

wo p und a ungrade, b constant < 1. Diese Function hat keinen Differentialquotienten, wenn ab grösser ist als $1 + \frac{3}{2}p\pi$. (Vergl. F. d. M. VI. 1874. p. 242).

Bcki.

P. Mansion. Sur les points de dédoublement de M. J. Plateau. Darboux Bull. (2) III. 514-515.

Herr Mansion bemerkt, dass in seinem Referat über eine Arbeit des Herrn Plateau (im Bull. (2) II. 2. p. 243, s. F. d. M. IX. 1877. p. 304 Zeile 3 von unten) der Factor $(y - \cos\sqrt{x})$ den

Exponenten 2 erhalten müsse. Er setzt dann die Folgen des Weglassens dieses Exponenten auseinander; man erhält auch hier eine eigenthümliche Art von Doppelpunkt. O.

J. Thomae. Ein Beispiel einer unendlich oft unstetigen Function. Schlömilch Z. XXIV. 64.

Dirichlet bestimmte eine Function von x dadurch, dass er sie zwischen 0 und 1 für rationale x gleich Null, für irrationale gleich Eins setzte. Es wird gezeigt, wie die Function zu bilden ist, wenn die Sprünge an Stellen statthaben, deren Gesammtheit eine nicht abzählbare unendliche Mannigfaltigkeit bildet.

M.

Appell. Formation d'une fonction $F(x)$ possédant la propriété $F[\varphi(x)] = F(x)$. C. R. LXXXVIII. 807-810.

Appell. Sur les fonctions telles que $F(\sin\frac{\pi}{2}x) = F(x)$. C. R. LXXXVIII. 1022-1024.

Die analytische Darstellung periodischer Functionen wird dadurch verallgemeinert, dass gezeigt wird, wie man eine Function $F(x)$ bilden kann, die der Gleichung

$$F[\varphi(x)] = F(x)$$

genügt, wo $\varphi(x)$ eine gegebene Function bedeutet. Es sei

$$\varphi_n(x) = \varphi\{\varphi[\dots\varphi(x)]\},$$

$n$mal wiederholt und für die inverse Function:

$$\varphi_{-n}(x) = \varphi_{-1}\{\varphi_{-1}[\dots\varphi_{-1}(x)]\},$$

ferner $f(u)$ eine rationale Function von u, und

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f[\varphi_n(x)].$$

Ist diese Reihe convergent, so besitzt $F(x)$ die verlangte Eigenschaft; überdies ist

$$F[\varphi_{-1}(x)] = F(x).$$

Es werden in der ersten Note die Beispiele

$$\varphi(x) = x^2 \quad \text{und} \quad \varphi(x) = x^2 - 1,$$

in der zweiten das Beispiel

$$\varphi(x) = \sin\frac{\pi}{2}x$$

durchgeführt.

M.

Capitel 2.

Besondere Functionen.

J. J. A. Mathieu. Note relative à l'approximation des moyennes géométriques par des séries de moyennes arithmétiques et de moyennes harmoniques.
Nouv. Ann. (2) XVIII. 529-531.

Beantwortung der von Herrn Lucas gestellten Frage: „Wird aus 2 Grössen p und q das arithmetische Mittel $p_1 = \frac{p+q}{2}$ und das harmonische Mittel $q_1 = \frac{2pq}{p+q}$ gebildet, werden dann dieselben Mittel für p_1 und q_1 aufgestellt und so fort bis

$$p_{n+1} = \frac{p_n+q_n}{2}, \quad q_{n+1} = \frac{2p_nq_n}{p_n+q_n},$$

so soll der allgemeine Ausdruck von p_n als Function von p und q gefunden und gezeigt werden, dass

$$p_1 > p_2 > p_3 \dots > \sqrt{pq} \quad \text{und} \quad q_1 < q_2 < q_3 \dots < \sqrt{pq}.\text{“}$$

Die letzteren Ungleichungen werden mit Hülfe einer geometrischen Figur gewonnen, die Darstellungen von p_n und q_n mit Hülfe der Summe und der Differenz der $(2^n)^{\text{ten}}$ Potenzen der Wurzeln der Gleichung

$$x^2 - (p+q)x + \left(\frac{p-q}{2}\right)^2 = 0.$$

M.

A. Cayley. On certain algebrical identities. Quart. J. XVI. 281-282.

Befriedigen x_0, y_0; x_1, y_1; x_2, y_2 die Gleichung $f(x, y) = 0$,

und sind $\varphi(x_0, y_0; x_1, y_1)$, $\psi(x_1, y_1; x_2, y_2)$ passend gewählt, so kann eine Function von φ, ψ lediglich von $x_0, y_0; x_2 y_2$ abhängen. Beispiele sind die Kreisfunctionen und die elliptischen Functionen.

No.

W. W. Johnson. Symbolic powers and roots of functions in the form $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$. Messenger (2) IX. 99-103.

Untersuchung und Discussion der Ausdrücke für $f^n(x)$ und $f^{\frac{1}{n}}(x)$.

Glr. (O.)

A. Cayley. On the matrix $\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$ and in connexion therewith the function $\frac{ax+b}{cx+d}$. Messenger (2) IX. 104-109.

Im Anschluss an Herrn Johnson's Arbeit giebt Herr Cayley die folgende Form von $f^n(x)$

$$f^n(x) = \frac{(\lambda^{n+1}-1)(ax+b)+(\lambda^n-\lambda)(-dx+b)}{(\lambda^{n+1}-1)(cx+d)+(\lambda^n-\lambda)(cx-a)},$$

wo λ bestimmt wird durch die quadratische Gleichung

$$\frac{(\lambda+1)^2}{\lambda} = \frac{(a+d)^2}{ad-bc}.$$

Diese Form, welche im Wesentlichen dieselbe, wie die von Babbage ist, wird durch die Theorie der Matricen bewiesen. Die Bedingung, dass $f(x)$ periodisch von der m^{ten} Ordnung ist, wird untersucht und der Fall $m = 1$ speciell betrachtet.

Glr. (O.)

H. W. L. Tanner. Note on the function $\varphi(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$. Messenger (2) IX. 109-112.

Herr Tanner drückt $\varphi^n(x)$ aus in der Form $\frac{ax+b+k_nx}{cx+d+k_n}$,

wo

$$k_n = \frac{p^n q - p q^n}{p^n - q^n}$$

und p und q die Wurzeln von

$$x^2 + (a+d)x + ad - bc = 0$$

sind. Er bespricht dann ebenfalls die Bedingung, dass $\varphi(x)$ periodisch ist. Glr. (O.)

W. H. L. Russell. Note on the integration of the higher transcendents which occur in certain mechanical problems. Messenger (2) IX. 40-42.

Die Note bezieht sich auf die Entwickelung irrationaler algebraischer Functionen in Reihen. Glr. (O.)

W. Matzka. Ein Beitrag zur systemmässigen Abhandlung der natürlichen Logarithmen in der Algebra, im Geiste Neper's und Euler's. Prag. Ber. 1878. 206-235

Nachdem Neper's Grundbegriff der Logarithmen (Mirifici logarithmorum Canonis descriptio, 1614) in der Sprache der neueren Algebra entwickelt ist, wird nach Euler's Vorgange (Vollständige Anleitung zur Algebra, Petersburg 1770) gezeigt, wie sich die Theorie der Logarithmen rein wissenschaftlich in das System der Algebra einreihen lässt, indem man die Logarithmirung der Zahlen vollberechtigt als zweite inverse Grundrechnung der Potenzirung in die Algebra einführt. Auf diese Weise wird eine systematische Entwickelung der natürlichen Logarithmen ermöglicht. Es folgt die Berechnung der Grundzahl, die Berechnungen der Logarithmen mittelst Wurzelausziehungen und mittelst Hülfstafeln und die Theorie der exponentiellen und logarithmischen Entwickelungsreihen. M.

L. Königsberger. Zur Geschichte der Theorie der elliptischen Transcendenten in den Jahren 1826-1829. Leipzig. Teubner.

Die „Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum“ Jacobi's feierten im Jahre 1879 ihr funfzigjähriges Jubiläum; als Jubelschrift kann die vorliegende Arbeit des Herrn Königsberger gelten, worin er eine Uebersicht über diejenigen, die elliptischen Transcendenten betreffenden Untersuchungen Abel's und Jacobi's giebt, welche in den Zeitraum der Jahre 1826-1829 fallen, unter gleichzeitiger Berücksichtigung der denselben Transcendenten zugehörenden Arbeiten von Gauss und Legendre. Der Herr Verfasser beginnt mit einer Analyse der Untersuchungen von Legendre im I. Bande seines „Traité des fonctions elliptiques et des intégrales Eulériennes“, 1825, welches Werk zahlreiche Resultate und Methoden enthält, die in der von Legendre gegebenen Form die Ausgangspunkte für die späteren Arbeiten Abel's und Jacobi's geworden sind. Es folgt dann in chronologischer Folge die Uebersicht über die abwechselnd von den beiden grossen Schöpfern der Theorie der elliptischen Functionen in den Jahren 1826-1829 veröffentlichten Arbeiten über diese Transcendenten. Eine klare Einsicht in die Folge und den Zusammenhang dieser Entdeckungen ist besonders durch den Briefwechsel zwischen Legendre und Jacobi ermöglicht worden, den Bertrand und Borchardt vor Kurzem veröffentlicht haben. Nach der Besprechung der Arbeiten Abel's und Jacobi's werden die Untersuchungen von Gauss, die sich auf die Theorie der elliptischen Functionen beziehen und die aus dem Nachlasse dieses grossen Mathematikers von Schering veröffentlicht worden sind, erwähnt und ihre Beziehungen zu den oben besprochenen Entdeckungen festgestellt.

M.

Gronau. Einleitung in die Theorie der elliptischen Functionen. Pr. Stolberg.

Diese Einleitung geht aus von dem Integral für die Länge eines Ellipsenbogens, definirt das elliptische Integral erster Gattung und die Functionen sinam, cosam, Δam, leitet die Formeln für die Differentialquotienten dieser Functionen her, betrachtet die Werthe der 3 Functionen für $k^2 = 0$ und 1, giebt die Haupt-

formeln für ein imaginäres Argument, legt die Periodicität der elliptischen Functionen dar und schliesst mit einer Reihe von Additionsformeln. Neues enthält diese Einführung nicht.

M.

H. Laurent. Théorie élémentaire des fonctions elliptiques. Nouv. Ann. (2) XVIII. 126-140, 145-170.

Fortsetzung und Schluss der elementaren Theorie der elliptischen Functionen in den Bänden XVI. und XVII. (s. F. d. M. IX. 1877. 327 u. X. 1878. 303). Die vorliegenden Abschnitte enthalten geometrische Anwendungen, nämlich Darstellungen der Ellipsen- und Hyperbel-Bogen, die geometrische Deutung des Additionstheorems, Krümmungslinien des Hyperboloids, Fagnano's Theorem, Lemniscatenbogen, Quadraturen von Curven 3[ter] Ordnung, Curven m^{ten} Grades mit $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ und solche mit $\frac{1}{2}m(m-3)$ Doppelpunkten, ferner einige bemerkenswerthe Curven, deren Gleichung von elliptischen Functionen abhängt, und die Bewegung des conischen Pendels. M.

J. Farkas. Généralisation du logarithme et de l'exponentielle. Budapest. Kilian.

Der Verfasser behandelt die Theorie der elliptischen Integrale in der Form, in welcher die Function unter dem Wurzelzeichen ein Product dreier linearer Factoren ist. H.

Biehler. Sur les fonctions doublement périodiques considérées comme des limites de fonctions algébriques. Borchardt J. LXXXVIII 185-204.

Cauchy hat die elliptischen Transcendenten mit algebraischen Functionen in Beziehung gebracht, indem er, von einem algebraischen Producte ausgehend, auf elementarem Wege die wichtige Gleichung herleitete, durch welche die Identität zwischen dem

Ausdrucke für $\theta(z)$ unter der Form des Productes mit der Entwickelung derselben Function in eine Reihe von Cosinus dargestellt wird. In der vorliegenden Arbeit wird zunächst diese Zurückführung beider Arten von Ausdrücken aufeinander nach einer einfacheren Methode bewerkstelligt (Art. 1). Hierauf betrachtet der Herr Verfasser Quotienten ähnlich gestalteter Producte, durch welche die drei elliptischen Functionen dargestellt werden, und gelangt mit Hülfe der Zerlegung in Partialbrüche, die in verschiedenen Formen vereinigt werden, zu ebensovielen verschiedenen Ausdrücken für diese Functionen (art. 2-4). Hieran schliessen sich Entwickelungen einiger doppeltperiodischer Functionen dritter Gattung, in welchen im Zähler oder Nenner eine grössere Anzahl gleicher oder verschiedener Thetas vorkommen (art. 5-7). Ist die Zahl der Theta im Zähler grösser als im Nenner, so genügt nicht die Zerlegung in einfache Brüche, um die Entwickelung zu erhalten, da hier noch der ganze Theil der Function hinzutritt, der auf elementar-algebraischem Wege anscheinend nicht zu ermitteln ist. Die Behandlung dieser Gattung von Functionen wird an einem Beispiele gezeigt (art. 8). Im letzten Abschnitt wird der Grenzübergang der algebraischen Functionen zu den entsprechenden transcendenten durch einen strengen Beweis gerechtfertigt und dadurch die Gültigkeit der Formeln in den vorhergehenden Abschnitten nachträglich festgestellt.

Hr.

ANDERS DONNER. Om uttrycken för entydiga elliptiska funktioner. Helsingf. Afh. 1879.

Diese Arbeit enthält ausser einer Einleitung vier verschiedene Capitel. In der Einleitung werden einige Grundbegriffe der Weierstrass'schen Functionentheorie hergeleitet. Die Darstellung ist jedoch zu kurz, um genügende Klarheit zu besitzen. Sie ist auch nicht überall richtig.

Im ersten Capitel wird gezeigt, wie jede eindeutige elliptische Function $\varphi(u)$ in der Form

$$\varphi(u) = C \cdot \frac{\sigma(u-a_1)\ldots\sigma(u-a_\nu)}{\sigma(u-b_1)\ldots\sigma(u-b_\nu)}$$

dargestellt werden kann.

Im zweiten Capitel sucht der Verfasser zuerst zu beweisen, dass jede ganze analytische Function $f(u)$ als eine beständig convergirende Potenzreihe, welche nach den positiven und negativen Potenzen von $z = e^{\frac{\pi i u}{\omega}}$ fortschreitet, darstellbar sei. Wie bekannt, existirt ein solcher Satz, aber der Beweis, welcher hier gegeben ist, muss als illusorisch bezeichnet werden. Der Fehler scheint hauptsächlich dadurch entstanden zu sein, dass der Verfasser den Hauptunterschied, welcher zwischen einer wesentlich und nicht wesentlich singulären Stelle stattfindet, nicht richtig aufgefasst hat. Die Aufgabe, welche der Verfasser in diesem Capitel verfolgt, geht übrigens dahin, jede eindeutige doppeltperiodische Function $\varphi(u)$ in der Form

$$\varphi(u) = \frac{\sum\limits_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} A_\mu e^{\mu\frac{\pi i u}{\omega}}}{\sum\limits_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} B_\mu e^{\mu\frac{\pi i u}{\omega}}}$$

darzustellen. Er zeigt zuerst, wie jede solche Function in der Form

$$\varphi(u) = C\,\frac{\vartheta_0\left(\frac{u-a_1}{\omega}\mid\tau\right)\cdots\vartheta_0\left(\frac{u-a_\nu}{2\omega}\mid\tau\right)}{\vartheta_0\left(\frac{u-b_1}{2\omega}\mid\tau\right)\cdots\vartheta_0\left(\frac{u-b_\nu}{2\omega}\mid\tau\right)},$$

wo $\tau = \frac{\omega_1}{\omega}$ ist, und 2ω, $2\omega_1$ ein System von Fundamentalperioden bedeutet, dargestellt werden kann. Dann zeigt er, dass

$$\prod_{\mu=1}^{\mu=\nu} \vartheta_0\left(\frac{u-a_\mu}{2\omega}\mid\tau\right)$$

$$= \sum_{\mu=0}^{\mu=\nu} C_\varrho z^{2\varrho-\nu} \sum_{(\nu)} (-1)^{\nu\nu} . h^{\nu\nu^2} . \left(z^\nu . e^{-\frac{\pi i}{2\omega}\Sigma a_\mu} . h^{\varrho-\frac{\nu}{2}}\right)^{2\nu}$$

ist. Unter z und h werden hierbei

$$z = e^{\frac{\pi i u}{2\omega}}, \quad h = e^{\frac{\pi i \omega'}{\omega}}$$

verstanden. Die Entwickelung der eindeutigen elliptischen Functionen in Fourier'sche Reihen ist die Aufgabe, mit welcher sich der Verfasser im dritten Capitel hauptsächlich beschäftigt. Die Darstellung ist hier selbständiger als in den übrigen Theilen der Arbeit, wo der Verfasser sich mit mehr oder weniger Erfolg den Vorlesungen des Herrn Weierstrass anschliesst. Die Convergenzbedingungen für die Reihe

$$\sum_{1}^{\mu} \mu^n h^{m\mu} \cdot {\text{Sin} \atop \text{Cos}} \Big\{ \frac{\mu \pi u}{\omega}$$

werden hier gegeben.

Im vierten Capitel giebt der Verfasser schiesslich eine tabellarische Zusammenstellung der verschiedenen Ausdrücke für diejenigen Functionen, welche die Hauptrolle in der Theorie der elliptischen Functionen zweiter Ordnung spielen.

Eine ausführliche Kritik dieser Arbeit von G. Mittag-Leffler findet sich in „Finsk Tidskrift", Juni 1880. M. L.

P. Hoyer. Ueber die Integration eines Differentialgleichungssystems von der Form

$$\frac{dx_1}{dt} = a_1 x_2 x_3 + a_2 x_3 x_1 + a_3 x_1 x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = b_1 x_2 x_3 + b_2 x_3 x_1 + b_3 x_1 x_2$$
$$\frac{dx_3}{dt} = c_1 x_2 x_3 + c_2 x_3 x_1 + c_3 x_1 x_3$$

durch elliptische Functionen. Diss. Berlin.

Es wird zunächst der Fall betrachtet, wo die Coefficienten des vorgelegten Gleichungssystems von einander unabhängig sind; dann besitzt ein Integral desselben entweder Grenzstellen im Endlichen, oder es besteht aus 3 beständig convergenten Reihen. Soll das System durch 3 doppelt periodische Functionen integrirbar sein, so müssen die Coefficienten a, b, c entweder einer der Gleichungen

(1) $\Delta = 0,\quad a_1' = 0,\quad b_2' = 0,\quad c_3' = 0,\quad a_1 = 0,\quad b_2 = 0,\quad c_3 = 0$

genügen, — wo Δ die Determinante des obigen Coefficientensystemes, a_1', b_2', c_3' die den a_1, b_2, c_3 entsprechenden Unterdeterminanten sind, — oder einer der Gleichungen

$$F(-k,\ a,\ b,\ c) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots r-1,$$

wo F eine ganze rationale Function ist, deren Coefficienten rationale Functionen von a, b, c sind, und r die kleinste Anzahl von Unendlichkeitsstellen ist, die sich in den verschiedenen, allen 3 Functionen gemeinsamen Periodenparallelogrammen befinden. Nachdem dieses bewiesen ist, werden die elliptischen Functionen 2^{ten} und 4^{ten} Grades ermittelt, welche dem vorgelegten Gleichungssystem genügen. Hierbei wird vorausgesetzt, dass keiner der Coefficienten a, b, c einer der Gleichungen (1) genügt. Unter dieser Voraussetzung zeigt sich, dass weder 3 elliptische Functionen 2^{ten}, noch solche 4^{ten} Grades, welche in ihren Perioden übereinstimmen, das allgemeine Integral eines Differentialgleichungssystems von der betrachteten Form bilden. Hierauf wird die Aufgabe erledigt, alle elliptischen Functionen 2^{ten} und 4^{ten} Grades zu ermitteln, welche einem ähnlichen Gleichungssysteme von der Form

$$\frac{dx_1}{dt} = a_1 x_2 x_3 + a_2 x_3 x_1 + a_3 x_1 x_2 - S_1,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = b_1 x_2 x_3 + b_2 x_3 x_1 + b_3 x_1 x_2 - S_2,$$

$$\frac{dx_3}{dt} = c_1 x_2 x_3 + c_2 x_3 x_1 + c_3 x_1 x_2 - S_3$$

genügen, wo die Constanten S_1, S_2, S_3 lineare homogene Functionen der beiden Grössen e_3-e_1, e_3-e_2 oder $\wp\omega'-\wp\omega$, $\wp\omega'-\wp(\omega+\omega')$ sind. M.

E. Picard. Sur les fonctions doublement périodiques avec des points singuliers essentiels. C. R. LXXXIX. 852-854.

Bezeichnet man mit $u(x)$ eine gewöhnliche doppeltperiodische Function n^{ter} Ordnung, welche dieselben Perioden besitzt, wie die gesuchte doppeltperiodische Function $f(x)$, welche in jedem Periodenparallelogramm n wesentliche singuläre Punkte haben

soll, so erhält man für $f(x)$ den allgemeinen Ausdruck:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{k=n-1} \left(\frac{du}{dx}\right)^k F_k[u(x)],$$

worin $F_0\, F_1 \ldots F_{n-1}$ eindeutige Functionen von u bezeichnen, die keinen andern wesentlichen singulären Punkt als ∞ haben.

St.

E. Picard. Sur une classe de fonctions non uniformes. Bull. S. M. F. VII. 102-104, C. R. LXXXVIII. 852-855.

Für eine vieldeutige analytische Function $f(z)$ der complexen Variabeln z, für welche innerhalb eines vom Nullpunkte mit einem Radius $r<1$ beschriebenen Kreises nur dieser Punkt selbst singulär ist, ergiebt sich die Entwickelung

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty}{}_n A_n \left(\frac{1}{\log z} - \frac{1}{2lr}\right)^n,$$

worin lr den reellen Logarithmus von r bedeutet. Sie gilt für alle Punkte innerhalb des genannten Kreises, ausgenommen $z=0$, in der Art, dass bei einem bestimmten z den verschiedenen Werthen des $\log z$ die verschiedenen Werthe von $f(z)$ entsprechen. In der zweiten Note wird der Satz angewandt zur Darstellung von $f(z)$ als Function von

$$q = e^{-\pi . \frac{x'}{x}},$$

indem $z=k^2$ gesetzt wird und k den Modul, $4x$, $2x'i$ die Perioden einer elliptischen Function bezeichnen. St.

J. J. Thomson. Note on the addition equation in elliptic functions. Messenger (2) IX. 52-53.

Das Integral der Gleichung

$$\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \frac{d\psi}{\Delta\psi} = 0,$$

auf welches das Lagrange'sche Integral der Euler'schen Gleichung führt, heisst

$$\frac{\cos\varphi\,\Delta\varphi - \cos\psi\,\Delta\psi}{\sin\varphi - \sin\psi} = C.$$

Glr. (O.)

Ch. Ladd. Note on Landen's theorem. Educ. Times XXXI. 39.

Vereinfachung der Beweisführung in § 54 der „Elliptic Functions" von Cayley. O.

J. W. L. Glaisher. Theorem in elliptic functions. Messenger (2) IX. 127.

Wenn

$$\mathrm{dn}(\beta+\gamma)\,\mathrm{dn}(\beta-\gamma)-\mathrm{cn}(\beta+\gamma)\,\mathrm{cn}(\beta-\gamma)=\lambda\,\frac{\mathrm{sn}^2\alpha}{1-\mathrm{sn}^4\alpha}$$

mit zwei ähnlichen Gleichungen combinirt wird, in denen β, γ, α ersetzt sind durch γ, α, β und α, β, γ, so enthalten immer zwei der Gleichungen die dritte. Glr. (O.)

A. Cayley. On a theorem in the theory of functions. Proc. L. M. S. X. 225-226.

Die kurze Notiz betrifft die Natur der Brüche, von denen p. 123 desselben Bandes die Rede war. M.

J. W. L. Glaisher. Note on a formula in elliptic functions. Quart. J. XVI. 382-383.

Jacobi hat (Fundamenta nova, p. 156) folgende Formel gegeben:

$$1-k^2\,\mathrm{sn}^2(u+v).\mathrm{sn}^2(u-v)=\frac{(1-k^2\mathrm{sn}^4u)\,(1-k^2\,\mathrm{sn}^4v)}{(1-k^2\mathrm{sn}^2u.\mathrm{sn}^2v)^2};$$

es werden die beiden entsprechenden Formeln hergeleitet, in denen linker Hand

$$\mathrm{cn}^2(u+v).\mathrm{cn}^2(u-v) \quad \text{und} \quad \mathrm{dn}^2(u+v).\mathrm{dn}^2(u-v)$$

vorkommen. M.

A. Cayley. A theorem in elliptic functions. Proc. L. M. S. X. 43-48.

Ist

$$u+v+r+s=0,$$

so gilt die Gleichung

$$-k'^2 \operatorname{sn} u . \operatorname{sn} v . \operatorname{sn} r . \operatorname{sn} s + \operatorname{cn} u . \operatorname{cn} v . \operatorname{cn} r . \operatorname{cn} s - \frac{1}{k^2} \operatorname{dn} u . \operatorname{dn} v . \operatorname{dn} r . \operatorname{dn} s = -\frac{k'^2}{k^2}.$$

Diese von Herrn Glaisher bewiesene Gleichung führte Herrn Cayley zu folgender etwas allgemeineren Relation:

$$-k'^2 \operatorname{sn}(\alpha+\beta) \operatorname{sn}(\alpha-\beta) \operatorname{sn}(\gamma+\delta) \operatorname{sn}(\gamma-\delta) + \operatorname{cn}(\alpha+\delta) \operatorname{cn}(\alpha-\delta) \operatorname{cn}(\gamma+\delta) \operatorname{cn}(\gamma-\delta)$$
$$- \frac{1}{k^2} \operatorname{dn}(\alpha+\beta) \operatorname{dn}(\alpha-\beta) \operatorname{dn}(\gamma+\delta) \operatorname{dn}(\gamma-\delta)$$
$$= -\frac{k'^2}{k^2} - \frac{2k'^2 (\operatorname{sn}^2\alpha - \operatorname{sn}^2\gamma)(\operatorname{sn}^2\beta - \operatorname{sn}^2\delta)}{1-k^2 \operatorname{sn}^2\alpha . \operatorname{sn}^2\beta . (1-k^2 \operatorname{sn}^2\gamma \operatorname{sn}^2\delta)}.$$

M.

J. W. L. Glaisher. A group of formulae connecting the elliptic functions of four quantities. Proc. L. M. S. X. 231-233.

Bezeichnen s_1, c_1, d_1, s_2 etc. die Functionen *sn*, *cn*, *dn* für 4 Argumente, deren Summe Null ist, so gelten folgende Gleichungen:

$$\frac{s_1 d_2 \mp s_2 d_1}{c_1 \mp c_2} + \frac{s_3 d_4 \mp s_4 d_3}{c_3 \mp c_4} = 0,$$
$$\frac{s_1 c_2 \mp s_2 c_1}{d_1 \mp d_2} + \frac{s_3 c_4 \mp s_4 c_3}{d_3 \mp d_4} = 0,$$
$$\frac{c_1 d_2 \mp c_2 d_1}{s_1 \mp s_2} + \frac{c_3 d_4 \mp c_4 d_3}{s_3 \mp s_4} = 0,$$

wo die oberen Zeichen zusammengehören, und ebenso die unteren. Diese ergeben sich aus bekannten Additionstheoremen für die elliptischen Functionen. Sie lassen sich auch aus einer der von Herrn St. Smith (siehe Proc. L. M. S. X. 91) gegebenen Formeln gewinnen. Auf dieselbe Weise erhält man, nur mit Hülfe der gewöhnlichen Formeln die in der oben genannten Arbeit enthaltenen 11 Gleichungen des Herrn St. Smith. Die Formel des Herrn Cayley (Proc. L. M. S. X. 43; s. d. vorstehende Referat) ist schon von Gudermann, Crelle J. XVIII. 164, gegeben. M.

J. W. L. Glaisher. Formulae in elliptic functions. Rep. Brit. Ass. 1879.

Die Formeln, um die es sich hier handelt, geben die Producte von drei dn oder drei sn (nach der Gudermann'schen Bezeichnung) in Ausdrücken gebildet aus den sn, cn, dn mit den 4 Argumenten $\frac{1}{2}(a+b+c)$, $\frac{1}{2}(b+c-a)$, $\frac{1}{2}(a-b+c)$, $\frac{1}{2}(a+b-c)$ und heissen, wenn man $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$ setzt,

$$\mathrm{dn}\,a.\mathrm{dn}\,b.\mathrm{dn}\,c = \frac{k'^2+k^2\mathrm{cn}\,s.\mathrm{cn}(s-a).\mathrm{cn}(s-b).\mathrm{cn}(s-c)}{1+k^2\mathrm{sn}\,s.\mathrm{sn}(s-a).\mathrm{sn}(s-b).\mathrm{sn}(s-c)},$$

$$k^2\mathrm{cn}\,a.\mathrm{cn}\,b.\mathrm{cn}\,c = \frac{-k'^2+\mathrm{dn}\,s.\mathrm{dn}(s-a).\mathrm{dn}(s-b).\mathrm{dn}(s-c)}{1+k^2\mathrm{sn}\,s.\mathrm{sn}(s-a).\mathrm{sn}(s-b).\mathrm{sn}(s-c)}.$$

Addirt man diese Gleichungen und setzt $a=b=c=2x$, so ergeben sich weitere Formeln. Glr. (O.)

D. André. Sur le développement de la fonction elliptique $\lambda(x)$ suivant les puissances croissantes du module. Ann. de l'Éc. N. (2) VIII. 151-168.

Aus der Definition der elliptischen Function $\lambda(x)$ durch die Differentialgleichung

$$\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 = 1-(1+k^2)\lambda^2+k^2\lambda^4 \quad (x=0,\ \lambda=0)$$

folgt, dass $\lambda(x)$ eine ungrade Function von x ist, die sich nach steigenden Potenzen von x so entwickeln lässt, dass die Coefficienten dieser Potenzen ganze Functionen des Modulquadrates k^2 sind. Diese Entwickelung lässt sich nun auch nach Potenzen von k^2 ordnen, deren Coefficienten dann nach steigenden Potenzen von x geordnete Reihen sind. Die Form dieser Darstellung ist Gegenstand der vorliegenden Abhandlung. Mit Hülfe der aus der obigen folgenden Differentialgleichung

$$\frac{d^2\lambda}{dx^2} = -(1+k^2)\lambda+2k^2\lambda^3$$

werden in der Entwickelung von $\lambda(x)$ nach Potenzen von k^2 das von k freie Glied und die Coefficienten von k^2 und von k^4 gefunden. Durch Induction lässt sich dann die allgemeine Form der Coefficienten irgend einer Potenz erschliessen, deren Gültig-

keit hernach allgemein bewiesen wird. Die Arbeit ist eine Fortsetzung der früheren Arbeiten über die Entwickelungen der elliptischen Functionen, C. R. LXXXIII. 135-136, Ann. de l'Éc. N. (2) VI. 265-328 (s. F. d. M. VIII. 1876. 263 und IX. 1877. 340). Dieselben Betrachtungen, welche hier auf die Function $\lambda(x)$ angewendet wurden, dienen auch zur Entwickelung einer grossen Zahl neuer Functionen, die durch complicirtere Differentialgleichungen definirt sind. Die bezüglichen Resultate wurden bereits früher mitgetheilt in einer Note der C. R. LXXXV. 786-787, s. F. d. M. IX. 1877. 351. M.

Tourines. Sur le développement des fonctions elliptiques en séries. Mondes (2) XLIX. 51-52.

G. Gruss. Ueber elliptische Functionen. Prag. Ber. 1878. 246-249.

Aus der Definitionsgleichung für das elliptische Integral zweiter Gattung

$$Z(u) = \sum_n \frac{q^n}{1-q^{2n}} \sin n\pi \frac{u}{K}$$

gelangt der Herr Verfasser vermittelst der Transformation

$$iZ(iu) = Z(u, k') + \frac{\pi u}{2KK'} - ln \operatorname{am}(u, k') \operatorname{dn}(u, k')$$

zu der allgemeinen Transformationsgleichung:

$$\sum_h \sum_k \left((u + \frac{k\pi}{m} + hilq), nlq\right) = (n-1)mi + \sum_k Z\left(u + \frac{k\pi}{m}, lq\right)$$

und erhält durch Differentiation die Formel:

$$(kK)^2 \sum_h \sum_k \operatorname{sn}^2\left(u + \frac{k\pi}{m} + hilq, k\right)$$
$$= m(K^2 - EK) - m^2 n(K_m^2 - E_m K_m) + m^2 (k_m K_m)^2 \operatorname{sn}^2(u, k_m).$$

Für das Integral dritter Gattung ergeben sich ähnlich folgende merkwürdigen Relationen:

$$\Pi(mu,\ ma,\ mp) = \sum_k \sum_h \Pi\left(u,\ a + \frac{k\pi}{m} + hilq,\ nlq\right)$$

und

$$m(K^2 - EK)$$
$$= K^2 \Sigma \frac{1}{\mathrm{sn}^2\left(u + \frac{k\pi}{m},\ k\right)} + m^2(K_m^2 - E_m K_m) - \frac{(mK_m)^2}{\mathrm{sn}^2(mu, k_m)},$$

$$mEK + (k'K)^2 \Sigma tn^2\left(u + \frac{k\pi}{m},\ k\right) = m^2 E_m K_m + (mk'_m K_m)^2\, tn^2(mu, k_m),$$

$$m(k'^2 K^2 - EK) + k^2 k'^2 K^2 E \frac{\mathrm{sn}^2\left(u + \frac{k\pi}{m},\ k\right)}{\mathrm{dn}^2\left(u + \frac{k\pi}{m},\ k\right)}$$
$$= m^2(k'^2_m K_m^2 - EK_m) + m^2 k_m^2 k'^2_m K_m^2 \frac{\mathrm{sn}^2(mu, k_m)}{\mathrm{dn}^2(mu, k_m)},$$

wo k_m der durch Transformation m^{ter} Ordnung aus k entstehende Modul, K_m, E_m die entsprechenden Integrale sind. M.

J. W. L. Glaisher. Values of the Theta- and Zeta-functions for certain values of the argument. Proc. of London XXIX. 351-361.

Enthält eine Tafel der Werthe der Θ- und H-Functionen, wenn die Argumente von der Form $mK + niK'$ sind, für die Werthe 0, $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$ von m und n. Zur Vervollständigung sind die entsprechenden Werthe der Z-Function hinzugefügt, nebst einigen Bemerkungen über die q-Reihen, auf welche die Formeln führen.

Cly. (O.)

A. Cayley. On the connection of certain formulae in elliptic functions. Messenger (2) IX. 23-30.

Es wird gezeigt, (wenn nicht vollständig, so doch sehr nahe), dass die einzige Formel

$$\Pi(u, a) = u\frac{\Theta' a}{\Theta a} + \tfrac{1}{2}\log\frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)}$$

nicht allein zu der Relation

$$\log \Theta u = \tfrac{1}{2}\log\frac{2k'k}{\pi} + \tfrac{1}{2}\left(1-\frac{E}{K}\right)u^2 - k^2\int du \int du \,\mathrm{sn}^2 u$$

zwischen den Functionen Θ und sn führt, sondern auch zu dem Additionstheoreme für die Function sn. Glr. (O.)

J. W. L. Glaisher. On definite integrals involving elliptic functions. Proc. of London XXIX. 331-351.

Der Hauptgegenstand der Arbeit ist, gewisse specielle Methoden, welche auf die Auswerthung von Integralen ähnlicher Art mit Kreisfunctionen angewandt werden sollen, auf bestimmte Integrale anzuwenden, die elliptische Functionen enthalten. Die Resultate haben die Nummern 1 bis 72. Cly. (O.)

G. Halphén. Sur la multiplication des fonctions elliptiques. C. R. LXXXVIII. 414-417.

Bei der Beschäftigung mit der Multiplication des Argumentes der elliptischen Functionen ist der Herr Verfasser auf eine Classe von ganzen Polynomen mit 2 Variabeln geführt worden, welche bemerkenswerthe Eigenschaften besitzen. Bildet man nämlich die doppeltperiodische Function

$$g_m = H(mz) . H(z)^{\frac{m^2-4}{3}} . H(z)^{-\frac{m^2-1}{3}},$$

und setzt

$$x = g_3^3 = \frac{H^3(3z) . H^3(z)}{H^8(2z)}, \quad y = g_4 = \frac{H(4z) . H^4(z)}{H^5(2z)},$$

so ist g_m ein ganzes Polynom von x, y, wenn m eine ganze nicht durch 3 theilbare Zahl ist; ist aber m ein Vielfaches von 3, so ist g_m das Product aus einem solchen Polynom und $x^{\frac{1}{3}}$. Diese Polynome haben ganzzahlige Coefficienten und enthalten den Modul nicht explicite. Mit diesen Polynomen hängt eine merk-

würdige Differentialgleichung zusammen. Diese hat die Form

$$\frac{dY}{dX} = \frac{3Y(Y+1)-4X}{X(8Y-1)}$$

und wird für alle rationalen Substitutionen von der Form:

$$X = \frac{g_{3m}\, g_m^3}{g_{2m}^3}, \quad y = \frac{g_{4m}\, g_m^4}{g_{2m}^5}$$

in sich selbst transformirt. M.

G. Halphén. Sur deux équations aux dérivées partielles relatives à la multiplication de l'argument dans les fonctions elliptiques. C. R. LXXXVIII. 698-701.

Die Function μ, welche der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2} = -\left(\frac{m\pi}{2K}\right)^2 q \frac{\partial \mu}{\partial q}$$

genügt, ebenso wie $H(mz)$, werde als Function von 4 Functionen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ der beiden Variablen z, q durch 2 Homogeneitäten eingeschränkt; es wird eine homogene Function ersten Grades vom Gewicht m^2, wenn α_n als vom erstem Grade und vom Gewicht n^2 vorausgesetzt wird. Die obige Differentialgleichung wird nun transformirt, indem die α als unabhängige Variable angenommen werden, und zwar so, dass die doppelte Homogeneität auch in den Transformirten stattfindet. Sie erhält die Form:

$$\text{(A)} \qquad \Sigma A_{n,p}\, \alpha_n\, \alpha_p \frac{\partial^2 \mu}{\partial \alpha_n\, \partial \alpha_p} = 0,$$

und es gilt das Resultat: Genügt die Function $\Phi(z, q)$ der Gleichung

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = -\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 q \frac{\partial \Phi}{\partial q},$$

und setzt man für $n = 1, 2, 3, 4$ $\alpha_n = \lambda \omega^{n^2} H(nz)$, so hat die Gleichung (A), was auch m sei, zur Lösung die Function

$$\mu = \lambda \omega^{m^2} \Phi(mz, q),$$

d. h. eine unendliche Zahl rationaler Lösungen. Ferner kann die Gleichung (A) in eine andere mit 2 unabhängigen Variabeln

transformirt werden, deren Lösung das Polynom g_m ist (siehe das vorstehende Referat). Diese Gleichung gestattet eine directe Berechnung des Polynoms g_m für jeden Werth von m.

M.

G. Frobenius und L. Stickelberger. Ueber die Addition und Multiplication der elliptischen Functionen. Borchardt J. LXXXVIII. 146-184.

Jacobi hat (Crelle J. VII. 41) Formeln für die Entwickelung der Quadratwurzel aus einer ganzen Function 4^ten^ Grades in einen Kettenbruch mit Hülfe der Multiplication der elliptischen Functionen gegeben, welche Formeln später von Borchardt, (dessen Journal XLVIII. 69) bewiesen und auf die Kettenbruchentwickelung der Quadratwurzel aus einer beliebigen ganzen Function ausgedehnt worden sind. Diese transcendenten Ausdrücke für die Elemente der Kettenbruchentwickelung der Quadratwurzel aus einer Function 4^ten^ Grades vergleichen nun die Herren Verfasser mit den algebraischen Formeln, welche Jacobi für die Umwandlung einer Potenzreihe in einen Kettenbruch aufgestellt hat (Crelle J. XV. 119-124 und XXX. 148-156), und gelangen so zu den Multiplicationsformeln für die elliptischen Functionen. Letztere ergeben sich sowohl in der Gestalt, wie sie Herr Brioschi (C. R. LIX. 770) angegeben hat, als auch in der von Herrn Kiepert (Borchardt J. LXXVI. p. 21, s. F. d. M. V. 1873. p. 259) entwickelten Form. Es werden dabei die Weierstrass'schen Functionen $\wp(u)$ und $\sigma(u)$ benutzt. Die Untersuchung des Falles, in welchem der Kettenbruch periodisch ist, ergiebt eine merkwürdige Beziehung zwischen seinen Näherungsbrüchen und der umgekehrten Transformation der elliptischen Functionen. Nach einer ähnlichen Methode wie die Multiplicationsformeln werden auch die Additionsformeln der elliptischen Functionen abgeleitet.

M.

L. Kiepert. Zur Transformationstheorie der elliptischen Functionen. Borchardt J. LXXXVII. 199-216, LXXXVIII. 205-212.

Jacobi hat (Crelle J. III. 308) den für die Transformationstheorie der elliptischen Functionen höchst wichtigen Satz bewiesen, dass der reciproke Werth des Multiplicators für jede Primzahltransformation n^{ten} Grades einer Gleichung $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades genügt, deren Coefficienten rationale Functionen von k sind, und dass zwischen den Quadratwurzeln aus den n Wurzeln dieser Gleichung $\frac{n+1}{2}$ lineare Relationen bestehen. Ganz analog genügt (nach der Bezeichnung des Herrn Weierstrass) die Function

$$P = \prod_{\alpha=1\dots\frac{n-1}{2}} \left[\wp\left(\frac{2\alpha\omega}{n}\right) - \wp\left(\frac{4\alpha\omega}{n}\right)\right]$$

einer Gleichung $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades, deren Coefficienten ganze rationale Functionen der Invarianten g_2 und g_3 sind. Herr Kiepert stellt diese Transformationsgleichung für die Grösse

$$f = e^{-\frac{\eta\omega(n^2-1)}{12n}}\,\sigma\left(\frac{2\omega}{n}\right)\cdot\sigma\left(\frac{4\omega}{n}\right)\cdots\sigma\left(\frac{n-1}{n}\,\omega\right)$$

auf, welche mit P durch die Relation

$$f^{-2} = (-1)^g P \quad (n = 6g \pm 1)$$

verbunden ist. Diese Gleichung wird insofern einfacher, als die Coefficienten der Gleichung für f^{-2} alle ganze rationale Functionen von g_2 und g_3 sind, deren Gestalt bis auf Zahlencoefficienten a priori festgestellt werden kann. Diese Zahlencoefficienten aber ergeben sich leicht durch Reihenentwickelungen. Zwischen den Wurzeln $f, f_0, f_1, \dots f_{n-1}$ sowohl, wie zwischen den Grössen $f^3, f_0^3, f_1^3, \dots f_{n-1}^3$ bestehen die $\frac{n+1}{2}$ linearen Jacobi'schen Relationen. Die Darstellung der Grösse f als Quotient zweier Potenzreihen von $h = e^{\frac{\omega'\pi i}{\omega}}$ führt ferner zur Herstellung allgemeinerer Grössen, die ebenfalls den Jacobi'schen Gleichungen genügen, und die dadurch von Bedeutung für die Transformationstheorie sind, dass sie von 2 variabeln Parametern, h und $\wp u$, abhängen. In der zweiten Abhandlung wird diese Theorie dadurch vervoll-

ständigt, dass alle übrigen Grössen, welche bei der Transformation auftreten, als rationale Functionen von f dargestellt werden. Hierbei wird eine von Jacobi (Crelle J. IV. 185) gegebene partielle Differentialgleichung benutzt, nachdem vorher ihr Analogon für die Weierstrass'schen Bezeichnungen hergeleitet ist.

M.

F. KLEIN. Ueber die Erniedrigung der Modulargleichungen. Clebsch Ann. XIV. 417-427.

Die functionentheoretischen Methoden, nach denen der Herr Verfasser die Modulargleichungen für die Transformationen für die Grade $n = 2, 3, 4, 5, 7, 13$ untersucht hat, sind im vorigen Bande dieses Journals (X. 1878. p. 69) angedeutet worden. Dieselben Methoden werden in der vorliegenden Abhandlung benutzt, um die Resolventen 5^ten^, 7^ten^ und 11^ten^ Grades zu definiren, welche man für $n = 5, 7, 11$ aufstellen kann. Die Möglichkeit einer solchen Erniedrigung ergiebt sich bekanntlich aus dem Galois'schen Theorem, das zuerst von Betti bewiesen wurde (Sopra l'abassamento delle equazione modulari delle funzioni ellittiche, Tortolini Ann. IV. 1853). Da in den hier betrachteten Fällen das Geschlecht p der Gleichung gleich Null wird, so lässt sich der Parameter, die absolute Invariante I des elliptischen Integrals, gleich einer rationalen Function resp. des 5., 7., 11. Grades der Unbekannten setzen; diese rationale Function ist aus der bekannten Verzweigungsart mit Leichtigkeit für $n = 5$ und $n = 7$ zu bilden, während der Fall $n = 11$ mit grösseren Schwierigkeiten verbunden ist. Die Endgleichungen lauten für $n = 5$:

$$x^5 - 10x^3 + 45 = \frac{216 g_3}{\sqrt{-\Delta}},$$

dieselbe Form, welche Herr Brioschi (Atti del Ist. Lomb. II.) gefunden; und für $n = 7$:

$$x^7 - 2^2.7^2(7 \mp \sqrt{-7})x^4 + 2^5.7^4(5 \mp \sqrt{-7})x \mp 2^9.3.7^3\sqrt{-7}.\frac{g_2}{\sqrt[3]{\Delta}} = 0,$$

welche im Wesentlichen mit der von Herrn Hermite gefundenen

(Sur la théorie des équations modulaires etc. Paris 1859; siehe auch Tortolini Ann. II. 59) übereinstimmt. M.

F. KLEIN. Ueber die Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Functionen. Clebsch Ann. XIV. 428-471.

Nachdem der Herr Verfasser in der früheren Abhandlung: „Die Transformation der elliptischen Functionen etc.“, (Clebsch Ann. XIV. 111; siehe F. d. M. X. 1878. 69), die Modulargleichung 8ten Grades in einfachster Form aufgestellt, und später (siehe das vorhergehende Referat) die zugehörige Resolvente 7ten Grades untersucht hat, löst er hier die Aufgabe, für die Transformation 7ter Ordnung die Galois'sche Resolvente 168ten Grades in zweckmässigster Form zu bilden, und von ihr aus jene niederen Gleichungen abzuleiten. Benutzt werden gewisse Eigenschaften der Wende- und Doppeltangenten der Curve

$$f = \lambda^3\mu + \mu^3\nu + \nu^3\lambda = 0,$$

bei welcher ein System von Berührungscurven 3ter Ordnung mit grader Characteristik ausgezeichnet ist. Es werden hier Darstellungen durch Figuren benutzt, welche für die Transformation 7ter Ordnung eine analoge Bedeutung haben, wie das Ikosaeder für den Fall $n = 5$. M.

F. KLEIN. Ueber die Auflösung gewisser Gleichungen vom siebenten und achten Grade. Clebsch Ann. XV. 252-282.

Siehe Abschn. II. Cap. 1. p. 74.

J. GIERSTER. Notiz über Modulargleichungen bei zusammengesetztem Transformationsgrad. Clebsch Ann. XIV. 537-544.

In ähnlicher Weise, wie Herr F. Klein in seiner Abhandlung: „Ueber die Transformation der elliptischen Functionen etc.“, (Clebsch Ann. XIV. 111; siehe F. d. M. X. 1878, 69) für eine Primzahl-Transformation alle diejenigen Gleichungen zwischen

den Invarianten J, J' aufgestellt hat, welche das Geschlecht $p = 0$ haben, werden hier für einen zusammengesetzten Transformationsgrad ebenfalls diejenigen Invarianten-Gleichungen ausgesucht, für welche $p = 0$ ist. Es ergiebt sich, dass die einzigen zusammengesetzten Transformationsgrade, welche für die Transformationsgleichung das Geschlecht Null liefern, folgende sind: $n = 4, 6, 8, 9, 10, 12, 16, 18, 25$. Es werden die fertigen Gleichungen für diese Fälle aufgestellt. M.

F. Brioschi. Ueber die Jacobi'sche Modulargleichung vom achten Grad. Clebsch Ann. XV. 241-250.

F. Brioschi. Sulla equazione modulare dell' ottavo grado. R. Acc. d. Linc. (3) III. 45-47.

Der Herr Verfasser hat bereits im Januar 1868 dem Instituto Lombardo di Scienze eine kurze Note vorgelegt, worin er die Resultate seiner Untersuchungen über die Jacobi'schen Modulargleichungen vom 8ten Grade mittheilte. Im Vorliegenden wird gezeigt, wie diese allgemeine Modulargleichung vom 8ten Grade zu berechnen ist, und wie das scheinbar complicirte Resultat in das von Herrn F. Klein (Erl. Ber. 4. März 1878. p. 14, F. d. M. X. 1878. 75) übergeführt werden kann. Durch weitere Untersuchungen ergiebt sich die Resolvente 7ten Grades, die Herr Hermite (Annali di Mat. 1859; siehe die obigen Referate) erlangt hat. Bezeichnet man

$$\varphi(y) = 2y^7 + 29y^5 + 139y^3 + 187y + 7t \qquad \left(t = 54\frac{g_3}{\sqrt{\Delta}}\right),$$

so ist $\varphi(y)\sqrt{y}$ Quadratwurzel der Wurzel einer Jacobi'schen Gleichung 8ten Grades. Setzt man ferner

$$\sqrt{y'} = \varphi(y)\sqrt{y},\ \sqrt{y''} = (y^5 + 11y^3 + 33y)\sqrt{y},\ \sqrt{y'''} = (y^4 + 9y^2 + 14)\sqrt{y},$$

so sind auch $\sqrt{y'}$, $\sqrt{y''}$, $\sqrt{y'''}$ Quadratwurzeln aus den Wurzeln einer Jacobi'schen Gleichung 8ten Grades, und es genügen $\sqrt{y}$, $\sqrt{y'}$, $\sqrt{y''}$, $\sqrt{y'''}$ einer linearen Differentialgleichung 4ter Ordnung.

M.

JOUBERT. Formation de la réduite de l'équation du multiplicateur dans le cas de la transformation du 7e ordre. Soc. scient. de Brux. III. B. 157-180.

Die Modulargleichungen des sechsten, achten und zwölften Grades, welche der Transformation der fünften, siebenten und elften Ordnung entsprechen, geben zu Reductionen Veranlassung, deren Grad, wie Herr Hermite bewiesen, um 1 kleiner ist. Derselbe Beweis lässt sich auch auf die Gleichung des Multiplicators anwenden. Der Verfasser stellt in der vorliegenden Arbeit die reducirte Gleichung des Multiplicators, vom siebenten Grade in dem Fall der Transformation der siebenten Ordnung, auf.

Mn. (O.)

F. KLEIN. Sulle equazioni modulari. Rend. Ist. Lomb. (2) XII. 21-24.

F. KLEIN. Ueber Multiplicatorgleichungen. Clebsch Ann. XV. 86-89.

Briefliche Mittheilung an Herrn Brioschi über die Methode, die Multiplicatorgleichungen zu bilden, und über characteristische Eigenschaften dieser Gleichungen. Die Resultate für $n = 5, 7, 13$ sind bereits früher mitgetheilt; für $n = 11$ lautet die Gleichung:

$$z^{12} - 90.11\sqrt[2]{\Delta}.z^6 + 40.11.12g_2\sqrt[3]{\Delta}.z^4 - 15.11.216g_3\sqrt[4]{\Delta}.z_3$$
$$+ 2.11(12g_2)^2\sqrt[6]{\Delta}.z^2 - 12g_2.216g_3\sqrt[12]{\Delta}.z - 11 = 0.$$

M.

F. KLEIN. Sulla risolvente di 11° grado dell' equazione modulare di 12° grado. R. Acc. d. Linc. (3) III. 177-178.

F. KLEIN. Sulla trasformazione dell' 11° ordine delle funzioni ellittiche. Rend. Ist. Lomb. (2) XII. 629-632.

F. KLEIN. Ueber die Transformation elfter Ordnung der elliptischen Functionen. Clebsch Ann. XV. 533-555.

Nachdem der Herr Verfasser bereits in seinen früheren Un-

tersuchungen über die Transformation der elliptischen Functionen (Clebsch Ann. XIV. siehe oben) die allgemeine Gestalt $J = F(z)$ der Gleichung 11ten Grades, welche bei der Transformation 11ter Ordnung auftritt, festgestellt hat, beschäftigt er sich hier damit, diese Gleichung in einfachster Form explicite darzustellen. Zur vollen Bestimmung der Function $F(z)$ reichen die damals gefundenen Bedingungen, dass sie eine ganze Function 11ten Grades der Unbekannten z mit nur numerischen Coefficienten ist, die ferner einen cubischen Factor dreifach enthält, während $(F(z)-1)$ einen biquadratischen Doppelfactor besitzt, noch nicht aus. Dieselben werden jetzt combinirt mit einem früher (Clebsch Ann. XIV. p. 277 siehe diesen Band p. 74) ausgesprochenen allgemeinen Resultat, dass bei $\frac{n-1}{2}$ Variablen y ein System von Collineationen kennen lehrt, welches mit der Gruppe der Modulargleichungen isomorph ist. M.

F. Klein. Zur Theorie der elliptischen Modulfunctionen. Münch. Ber. 1879.

Der Herr Verfasser ist durch seine mannigfachen Arbeiten über die Transformation der elliptischen Functionen zu einer allgemeinen und im Wesentlichen neuen Auffassung der elliptischen Modulfunctionen geführt worden, welche hier entwickelt wird. Diese Modulfunctionen sind eindeutige Functionen einer Variablen ω, welche bei einer Gruppe von ganzzahligen linearen Substitutionen von der Determinante Eins:

$$\omega' = \frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$$

ungeändert bleiben. Diese Gruppe ist in der Gesammtheit aller ganzzahligen Substitutionen gleichsam als „Untergruppe“ enthalten. Die Classificirung dieser Untergruppen ist nun der Ausgangspunkt für das planmässige Studium der elliptischen Modulfunctionen. Es werden eine Reihe von Principien für diese Classificirung aufgestellt. Der Hauptzweck, welcher mit dieser neuen Auffassung verfolgt wird, ist der, die mannigfaltigen Formen,

unter denen bisher die Modulargleichungen erschienen, unter einem einfachen allgemeinen Principe als sehr specielle Fälle einzuordnen. M.

Stephen Smith. Note on a modular equation for the transformation of the third order. Proc. L. M. S. X. 87-91.

In einer früheren Abhandlung: On the singularities of the modular equations and curves. (Proc. L. M. S. IX. 243 s. F. d. M. X. 1878. 468) hat der Herr Verfasser die Modulargleichung für die Transformation dritter Ordnung zwischen

$$x = f(k^2) = \frac{(1-k^2+k^4)^3}{k^4(1-k^2)^2}$$

und

$$y = f(\lambda^2) = \frac{(1-\lambda^2+\lambda^4)^3}{\lambda^4(1-\lambda^2)^2}$$

gegeben in der Form:

$$\begin{aligned}F(x,y) = x(x+2^7.3.5^3)^3+y(y+2^7.3.5^3)^3-2^{16}k^3y^3 \\ +2^{11}.3^2.31x^2y^2(x+y)-2^2.3^3.9907xy(x^2+y^2) \\ +2.3^4.13.193.6367x^2y^2+2^8.3^5 5^3.4471xy(x+y) \\ -2^{15}.5^6.22973xy = 0.\end{aligned}$$

In der vorliegenden Note wird die Methode entwickelt, nach welcher die Coefficienten dieser Gleichung gewonnen wurden.

M.

A. Cayley. Note on the octahedron function. Quart. J. XVI. 280-281.

Siehe Abschn. II. Cap. 1. p. 74.

Ch. Hermite. Sur quelques applications des fonctions elliptiques. C. R. LXXXIX. 1001-1005, 1092-1097.

Weitere Fortsetzungen der Abhandlung in den C. R. LXXXV. und LXXXVI; siehe F. d. M. IX. 1877. 349. M.

E. Picard. Sur une application de la théorie des fonctions elliptiques. C. R. LXXXIX. 74-76.

Bei der Behandlung des Problems der zwei Körper (C. R., 12. Mai 1879) ist Herr Gyldén auf die Differentialgleichung gestossen:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+3k^2\frac{\mathrm{sn}\,k.\mathrm{cn}\,x}{\mathrm{dn}\,x}\cdot\frac{dy}{dx}+2(1+k'^2)y=0,$$

deren allgemeines Integral eine doppeltperiodische Function erster Gattung ist. Herr Picard beschäftigt sich in einer Abhandlung, deren Resultate hier kurz mitgetheilt werden, mit der allgemeinen Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2}+nk^2\frac{\mathrm{sn}\,x.\mathrm{cn}\,x}{\mathrm{dn}\,x}\cdot\frac{dy}{dx}+\alpha y=0,$$

wo n eine positive ganze Zahl und α irgend eine Constante ist. Es wird diese Gleichung in dem Falle integrirt, wo das allgemeine Integral derselben eine eindeutige Function ist.

M.

G. Halphén. Sur certaines propriétés métriques relatives aux polygones de Poncelet. Liouville J. (3) V. 285-292.

Der Herr Verfasser zeigt, dass die von Herrn Weill (Liouville J. (3) IV. 265; siehe F. d. M. X. 1878. 359) gefundenen Fundamentalsätze über Polygone, welche einem Kreise eingeschrieben und einem anderen Kreise umschrieben sind, zugleich mit mehreren ähnlichen Sätzen aus der Theorie der doppelt-periodischen Functionen, mit Leichtigkeit sich ableiten lassen. Die dazu dienenden Theoreme sind folgende: I. Ist $F(z)$ eine doppeltperiodische Function mit 2 Unendlichs α, α' und $\alpha-\alpha'=a$, so hat die Summe

$$\varphi(z)=F(z)+F(z+a)+F(z+2a)+\cdots+F(z+(m-1)a)$$

nur 2 Unendlichs, nämlich α und $\alpha'-(m-1)a$. II. Diese Summe $\varphi(z)$ ist unabhängig von z, wenn

$$\frac{\alpha-\alpha'}{n}=\frac{p\omega+p'\omega'}{m}=a,$$

wo ω, ω' die Perioden von $F(z)$ und n, p, p' ganze Zahlen sind.
III. Ist α ein Unendlich und β ein Nullwerth der Function $F(z)$, so ist das Product

$$\psi(z) = F(z).F(z+a).F(z+2a)\cdots F(z+(m-1)a)$$

von z unabhängig, sobald

$$\frac{\beta-\alpha}{n} = \frac{p\omega+p'\omega'}{n} = a.$$

Die Eigenschaften der Poncelet'schen Polygone ergeben sich aus diesen Sätzen, wenn man bedenkt, dass sie, wie Jacobi nachgewiesen hat, eine geometrische Darstellung der Multiplication des Argumentes in den doppelt-periodischen Functionen mit 2 Unendlichs liefern. M.

R. Hoppe. Geometrische Anwendung der Addition elliptischer Integrale. Grunert Arch. LXIV. 274-295.

Die Theorie der elliptischen Integrale wird auf die Betrachtung einer Reihe von Figuren angewendet, welche durch den Schnitt eines geraden Cylinders und einer Kugel entstehen. Ist der Cylinder durchgesteckt, so lässt sich sein von der Kugel begrenzter Mantel als reine Function 2^{ter} Gattung darstellen; ist der Cylinder eingekerbt, so ist der Mantel aus Functionen erster und zweiter Gattung zusammengesetzt; wenn der Cylinder die Kugel von innen berührt, so wird das Integral ein algebraisches. Die sphärische Fläche ausserhalb des Cylinders ist im allgemeinen elliptisch und besteht aus Integralen 1^{ter} und 2^{ter} Gattung, aus einem algebraischen und einem circularen Glied. Die Schnittcurve ist im allgemeinen hyperelliptisch und wird nur dann elliptische Function 2^{ter} Gattung, wenn der Cylinder die Kugel von innen berührt. Durch eine elliptische Function 3^{ter} Gattung lässt sich in jedem Falle der Körper zwischen beiden Flächen ausdrücken. M.

G. Darboux. De l'emploi des fonctions elliptiques dans la théorie du quadrilatère plan. Darboux Bull. (2) III. 109-128, C. R. LXXXVIII. 1183-1186, 1252-1255.

Peaucellier's Theorie der Cylinder-Systeme, welche besonders durch neuere Arbeiten englischer Mathematiker gefördert worden ist, beruht auf der Betrachtung von Polygonen mit variablen Winkeln, aber mit Seiten von constanter Länge. Im Vorliegenden wird das einfachste dieser Polygone, das Vierseit, betrachtet und der Nutzen der Anwendung der elliptischen Functionen auf die Untersuchung der geometrischen Eigenschaften und der Beziehungen zwischen den Winkeln, den Seiten und den Diagonalen des Vierecks dargethan. Werden die Längen der 4 Seiten mit a, b, c, d, und die Winkel, welche die Seiten a, b, c) in bestimmter Richtung durchlaufen,) mit der Seite d bilden, mit ω_1, ω_2, ω_3 bezeichnet, so enthalten die Gleichungen

$$ae^{i\omega_1}+be^{i\omega_2}+ce^{i\omega_3}+d=0,$$
$$ae^{-i\omega_1}+be^{-i\omega_2}+ce^{-i\omega_3}+d=0$$

die vollständige Theorie des Vierseits. Setzt man

$$e^{i\omega_1}=t_1,\quad e^{i\omega_2}=t_2,\quad e^{i\omega_3}=t_3,$$

so gehen diese Gleichungen über in folgende:

$$at_1+bt_2+ct_3+d=0,$$
$$\frac{a}{t_1}+\frac{b}{t_2}+\frac{c}{t_3}+d=0,$$

welche, wenn man t_1, t_2, t_3 als die Coordinaten eines Punktes im Raume ansieht, eine ebene Curve dritter Ordnung darstellen. Um die Entwickelung der Theorie dieser Curve handelt es sich also. Insbesondere lassen sich die Grössen t_1 mit Hülfe der elliptischen Functionen $\operatorname{sn}\lambda$, $\operatorname{cn}\lambda$, $\operatorname{dn}\lambda$ eines bestimmten Argumentes λ ausdrücken. M.

H. Léauté. Études géométriques sur les fonctions elliptiques de première espèce. J. de l'Éc. Pol. Ch. LXVI. 65-99.

Nach derselben Methode, nach welcher der Herr Verfasser das Abel'sche Theorem für elliptische Functionen früher auf ebene

Curven zweiten Grades angewendet hat (C. R. LXXIX. 93-96, 602-606; vgl. F. d. M. VI. 1874. 275), d. h. nach der Methode der stereographischen Projection, werden in der vorliegenden Arbeit verschiedene Relationen behandelt, die zwischen den elliptischen Functionen der ersten Gattung und den Coordinaten einer Raumcurve 4ter Ordnung oder der Durchschnittscurve zweier Flächen zweiten Grades bestehen. Diese Relationen, von denen einige bereits bekannt sind, sind für viele Fragen von Wichtigkeit. Sie liefern insbesondere eine gemeinsame geometrische Darstellung der drei elliptischen Functionen sin am, cos am, Δam oder eine solche der vier Functionen Θ, Θ_1, H, H_1.

M.

C. H. Kummell. Solution of a problem. Analyst VI. 90-91.

Werth von $\int xE(e, x)\,dx$, wo $E(e, x)$ die Länge des Bogens einer Ellipse bezeichnet, e die Excentricität und x die Abscisse ist.

Glr. (O.)

L. Königsberger. Ueber eine Beziehung der complexen Multiplication der elliptischen Integrale zur Reduction gewisser Klassen Abel'scher Integrale auf elliptische. Borchardt J. LXXXVI. 317-352.

Während die Frage nach der Reduction hyperelliptischer Integrale auf elliptische und auf algebraisch-logarithmische Functionen durch die Arbeiten von Legendre, Jacobi, Hermite und Königsberger als gewissermassen abgeschlossen angesehen werden kann, ist die Reduction gewisser Abel'scher Integrale auf andere Gattungen nur in sehr vereinzelten Fällen untersucht. Es sind hier nur die beiden von Legendre gefundenen Integralklassen

$$\text{(a)}\qquad \int\frac{f(z)\,dz}{(\sqrt[3]{a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3})^m}\qquad (m=1,2),$$

$$\text{(b)}\qquad \int\frac{f(z)\,dz}{(\sqrt[4]{a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+a_4z^4})^\mu}\qquad (\mu=1,3),$$

worin $f(z)$ eine rationale Function bedeutet, zu nennen. Durch Ausführung der Legendre'schen Transformationen fand Herr Röthig (Borchardt J. LVI.) den Satz, dass sich die Integrale (a) auf elliptische mit dem Modul $\frac{1}{2}\sqrt{2 \pm \sqrt{3}}$ bringen lassen, die Integrale (b) auf solche mit dem Modul $\sqrt{\frac{1}{2}}$. Dieses Resultat veranlasste Herrn Königsberger, die hierin erkannte Beziehung zwischen der Frage nach der Reduction gewisser Abel'scher Integrale und der complexen Multiplication der elliptischen Integrale eingehender zu untersuchen. Dadurch gelangte der Herr Verfasser zu folgendem Resultat: „Wenn ein Abel'sches Integral erster Gattung von der Form

$$\int \psi(z) \; (\sqrt[n]{R(z)})^r \, dz, \quad (n > 2, \; n \text{ und } r \text{ rel. prim}),$$

auf ein elliptisches Integral reducirbar sein soll, so kann dies nur für

$$n = 3, \; 4, \; 6$$

der Fall sein, und zwar haben die elliptischen Integrale, auf welche sich die Integrale

$$\int \psi(z) \; (\sqrt[3]{R(z)})^r \, dz, \quad \int \psi(z) \; (\sqrt[6]{R(z)})^r \, dz$$

reduciren lassen, den Modul der complexen Multiplication $\frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ oder einen aus diesem transformirten, während die elliptischen Integrale, auf welche die Abel'schen Integrale

$$\int \psi(z) \; (\sqrt[4]{R(z)})^r \, dz$$

zurückführbar sein können, den complexen Multiplicationsmodul $\sqrt{\frac{1}{2}}$ oder einen aus diesem transformirten besitzen". Es werden alsdann die auf ein elliptisches Integral reducirbaren zur Irrationalität $\sqrt[n]{R(z)}$ gehörigen Abel'schen Integrale betrachtet. Die Untersuchung der Eigenschaften der elliptischen Integrale, auf welche sich Abel'sche Integrale der obigen Form reduciren lassen, führt zu vielen interessanten Resultaten. Diese Untersuchung lässt sich auch, wie gezeigt wird, auf allgemeinere Fälle ausdehnen.

M.

L. Königsberger. Ueber die Reduction Abel'scher Integrale auf elliptische und hyperelliptische. Clebsch Ann. XV. 174-205, Gött. Nachr. 1879. 185-189.

Nachdem der in der oben genannten Arbeit (Borchardt J. LXXXVI. p. 334, siehe das vorstehende Referat) bewiesene Satz in der Form ausgesprochen ist, dass die Integrale

$$\int \psi(x)\ (\sqrt[3]{R(x)})^r dx,\quad \int \psi(x)\ (\sqrt[4]{R(x)})^r dx,\quad \int \psi(x)\ (\sqrt[6]{R(x)})^r dx,$$

mit den oben für die Zahl r angegebenen Beschränkungen, sich nur auf die resp. Integrale

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^3-1}} \quad \text{und} \quad \int \frac{dz}{\sqrt{z^4-1}}$$

beziehen, welche die 3[te] und 4[te] Einheitswurzel zu Multiplicatoren haben, wird gezeigt, dass genau dieselben Resultate sich ergeben, wenn es sich um die Reduction ähnlicher Integralformen für algebraisch auflösbare Gleichungen überhaupt handelt, d. h. um Integrale von der Form

$$\int Q_\varrho p^{\frac{\varrho}{n}} dx,$$

wo Q_ϱ und p algebraische Functionen einer bestimmten Ordnung bezeichnen. Alsdann wird die Frage, wie man alle Abel'schen Integrale der bezeichneten Form, welche auf elliptische Integrale reducirbar sind, wirklich aufstellen und die Transformationen, welche die Reduction leisten, angeben kann, vollständig beantwortet für den Fall, dass Q_ϱ und p algebraische Functionen nullter Ordnung sind, oder dass die zu untersuchenden Abel'schen Integrale von der Form

$$\int \psi(x)\ (\sqrt[n]{R(x)})^\varrho\ dx$$

sind. Für die algebraische Function μ^{ter} Ordnung wird auf die Arbeit „Erweiterung des Jacobi'schen Transformationsprincips (siehe S. 321) verwiesen. Alsdann geht der Herr Verfasser auf die Frage der Reduction der Abel'schen Integrale erster Gattung von der Form

$$\int \psi(x)\ (\sqrt[n]{R(x)})^r\ dx$$

auf hyperelliptische Integrale derselben Gattung näher ein, eine Frage, „welche nach den oben angewandten Principien ebenfalls zu behandeln ist“ und auf ganz analoge Beziehungen zur complexen Multiplication der hyperelliptischen Integrale führt.

M.

E. Frisby. On the arithmetico-geometrical mean. Analyst VI. 10-14.

Bericht über Gauss' Methode zur Auswerthung des elliptischen Integrals $\int \frac{d\theta}{\omega}$, wo $\omega = \sqrt{m^2 \cos^2\theta + n^2 \sin^2\theta}$ und Werthbestimmung verschiedener damit zusammenhängender Integrale

$$\int \frac{\sin^2\theta}{\omega} d\theta, \quad \int \frac{\cos^2\theta}{\omega} d\theta, \quad \int \frac{d\theta}{\omega^3} \text{ u. s. f.}$$

Glr. (O.)

C. W. Borchardt. Sur un système de trois équations différentielles totales qui définissent la moyenne arithmético-géométrique de quatre éléments. Bull. S. M. F. VII. 124-128.

Mittheilung der Resultate aus den Untersuchungen über das arithmetisch-geometrische Mittel (Berl. Monatsber. 1876, 611, siehe F. d. M. VIII. 300), soweit sie das System der 3 totalen Differentialgleichungen betreffen, durch welches die Grenze g als Function der 4 Elemente a, b, c, d definirt wird. M.

C. W. Borchardt. Sur le choix des modules dans les intégrales hyperelliptiques. C. R. LXXXVIII. 834-837.

Die Vereinfachung, welche die in der Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels von 4 Elementen sich ergebenden Formeln im Vergleich mit den von Richelot für die Transformation 2ter Ordnung der hyperelliptischen Integrale aufgestellten, zeigen, beruht lediglich auf der Wahl der Moduln der hyper-

elliptischen Integrale. Richelot hat die algebraische Definition des Moduls der elliptischen Integrale, welche auf der Betrachtung der Werthe beruht, für welche das Radical unter dem Wurzelzeichen verschwindet, auf die hyperelliptischen Integrale ausgedehnt. Vortheilhafter ist es, wie in vorliegender Note gezeigt wird, eine Erweiterung der transcendenten Form, welche die Quadratwurzel aus dem Modul als Quotient zweier Functionen ϑ mit dem Argument Null darstellt, vorzunehmen.

M.

C. W. Borchardt. Sur les transformations du second ordre des fonctions hyperelliptiques qui, appliqués deux fois de suite, produisent la duplication.
C. R. LXXXVIII. 885-888, 955-957.

Die Resultate, zu denen Göpel und Rosenhain in der Theorie der hyperelliptischen Functionen auf ganz verschiedenen Wegen gelangt sind, lassen sich durch eine Transformation 2^ter Ordnung in einander überführen. Diese Transformation bewirkt, wie Herr Hermite gefunden, zweimal angewendet, eine Verdoppelung. Die hier gegebenen Untersuchungen über die imaginäre hyperelliptische Transformation 2^ter Ordnung haben ihr Analogon in der Theorie der elliptischen Functionen, wo die Landen'sche Transformation einen Zusammenhang zwischen den doppeltperiodischen Functionen mit dem Modul $\frac{1-k'}{1+k'}$ und anderen mit dem Modul k vermittelt, und eine zweimalige Anwendung der imaginären Transformation 2^ter Ordnung auf die Landen'schen Formeln zur Verdoppelung des Argumentes führt. Die analoge Transformation wird für die hyperelliptischen Functionen

$$\vartheta(v_1, v_2, \mu_1, \mu_2, \nu_1\ \nu_2) = \sum_{n_1, n_2 = -\omega \dots +\omega} e^{g(v_1 - \frac{1}{2}\mu_1,\ v_2 - \frac{1}{2}\mu_2,\ n_1 - \frac{1}{2}\nu_1,\ n_2 - \frac{1}{2}\nu_2)},$$

wo die ganze Function

$$g(v_1, v_2, n_1, n_2) = \pi i(2n_1 v_1 + 2n_2 v_2 + n_1^2 \tau_{11} + 2n_1 n_2 \tau_{12} + n_2^2 \tau_{22})$$

ist, durchgeführt. Die Moduln $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ der transformirten Functionen sind mit den ursprünglichen Moduln

$$\sqrt{k_1} = \frac{c_{01}}{c_3}, \quad \sqrt{k_2} = \frac{c_4}{c_5}, \quad \sqrt{k_3} = \frac{c_{23}}{c_5}$$

(nach der Bezeichnung von Weierstrass) durch die Relationen

$$\lambda_1 = \frac{1-k_1+k_2-k_3}{1+k_1+k_2+k_3}, \quad \lambda_2 = \frac{1+k_1-k_2-k_3}{1+k_1+k_2+k_3},$$
$$\lambda_3 = \frac{1-k_1-k_2+k_3}{1+k_1+k_2+k_3}$$

verbunden. Diese Transformation ist aber nicht die einzige dieses Charakters; es giebt deren sehr verschiedene, unter ihnen auch eine Anzahl reeller Transformationen. Als Beispiel für die letzteren wird diejenige gewählt, welche die Resultate Göpel's und Rosenhain's miteinander verbindet. M.

G. Halphén.. Sur le développement d'une fonction intermédiaire. Bull. S. M. F. VII. 92-98.

Der Aufsatz enthält die Entwickelung der Function

$$B(z, k) = Al_1\,(z, k)\,.\,e^{\frac{1}{6}(1+k^2)z^2},$$

wo Al_1 die Weierstrass'sche Function ist. Für diese ergiebt sich die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 B}{\partial z^2} - 8p^2\frac{\partial B}{\partial q} - \tfrac{3}{4}q\frac{\partial B}{\partial p} + \frac{pz^2}{q}B = 0,$$

welche eine Recursionsformel zur Berechnung der Coefficienten in der Entwickelung von B liefert. Am Schlusse bemerkt der Herr Verfasser, dass diese Differentialgleichung bei der Substitution

$$p = \tfrac{3}{4}g_2, \quad q = \frac{27}{4}g_3$$

in die für die Weierstrass'sche Function σ übergeht.

M.

E. Wiltheiss. Die Umkehrung einer Gruppe von Systemen allgemeiner hyperelliptischer Differentialgleichungen. Diss. Berlin.

In seiner Abhandlung: „Ueber die allgemeinsten eindeutigen und $2n$-fach periodischen Functionen von n Veränderlichen" (Berl. Monatsber. 1869; siehe F. d. M. II. 207) hat Herr Weierstrass folgende Sätze aufgestellt: „Nimmt man zwischen $2n$ veränderlichen Grössen $u_1, u_2 \dots u_n$ und $x_1, x_2, \dots x_n$ die nachstehenden Gleichungen an, in denen $\psi_1(x_\nu), \psi_2(x_\nu) \dots \psi_n(x_\nu)$ Functionen bedeuten, deren erste Ableitungen algebraische Functionen der x sind:

$$u_1 = \sum_{\nu=1\dots n} \psi_1(x_\nu), \quad u_2 = \sum_{\nu=1\dots n} \psi_2(x_\nu), \dots u_n = \sum_{\nu=1\dots n} \psi_n(x_\nu),$$

so werden im Allgemeinen zu jedem Systeme der Grössen $u_1, u_2, \dots u_n$ unendlich viele Systeme der Grösse $x_1, x_2, \dots x_n$ gehören. Es lässt sich aber zeigen, dass, wenn zu einem Systeme der Grössen $u_1, u_2, \dots u_n$ eine endliche Anzahl der Grössen $x_1, x_2, \dots x_n$ gehört, $x_1, x_2, \dots x_n$ die Wurzeln einer Gleichung n^{ten} Grades werden, deren Coefficienten algebraisch durch die partiellen Ableitungen einer eindeutigen und $2n$-fach periodischen Function von $u_1, u_2, \dots u_n$ sich ausdrücken lassen." Herr Wiltheiss betrachtet nun den Fall, wo die Ableitungen von $\psi_1(x), \psi_2(x) \dots \psi_n(x)$ mittelst eines „hyperelliptischen Gebildes vom Range ϱ" hergestellt sind, d. h. mittelst der Gesammtheit zusammengehöriger Werthepaare $x, y = \sqrt{R(x)}$, wo $R(x)$ eine Function von x vom $(2\varrho+1)^{\text{ten}}$ Grade ist, in der der Coefficient von $x^{2\varrho+1}$ gleich Eins, und wo den Quadratwurzeln stets dasselbe Vorzeichen beigelegt wird. Herr Weierstrass hat in seinen Vorlesungen über „Abel'sche Functionen" gezeigt, wie die zu diesem hyperelliptischen Gebilde gehörenden θ-Functionen gebildet werden. Die Umkehrung des hyperelliptischen Gleichungssystems

$$du_1 = \sum_{\alpha=1\dots\varrho} H(x_\alpha\, y_\alpha)_1\, dx_\alpha,$$

$$du_2 = \sum_{\alpha=1\dots\varrho} H(x_\alpha\, y_\alpha)_2\, dx_\alpha,$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$du_\varrho = \sum_{\alpha=1\dots\varrho} H(x_\alpha\, y_\alpha)_\varrho\, dx_\alpha$$

besteht nun darin, dass erstens eine Function $\varphi(x, u)$ hergestellt wird, die vom ϱ^{ten} Grade in x ist, in der die Coefficienten (abgesehen von dem von x^ϱ, der gleich 1 ist) rational aus θ-Functionen mit den Argumenten $u_1, u_2 \dots u_\varrho$ gebildet sind, und welche die Wurzeln $x_1, x_2, \dots x_\varrho$ hat; zweitens eine Function $\psi(x, u)$, die vom $(\varrho-1)^{\text{ten}}$ Grade in x ist, deren Coefficienten rational aus den θ-Functionen mit den Argumenten $u_1, u_2, \dots u_\varrho$ gebildet sind, und die ausgerechnet für $x = x_\alpha$ den Werth $-y_\alpha$ annimmt. Die Bedingung, dass die Anzahl der Gleichungen gleich ϱ sei, ist eine für die Möglichkeit der Umkehrung nothwendige; denn wären nicht ϱ, sondern weniger Gleichungen vorhanden, so könnten in der Umkehrung nicht θ-Functionen mit ϱ Argumenten, sondern nur solche mit weniger Argumenten vorkommen. Darauf wird die eindeutige Umkehrung eingehender behandelt, d. h. der Fall, dass zu jedem Systeme der $u_1, u_2, \dots u_n$ nur *ein* System der $x_1, x_2, \dots x_n$ gehört. Als Anwendungen für die entwickelte Methode, hyperelliptische Differentialgleichungen umzukehren, giebt der Herr Verfasser 1) die Darstellung der Coordinaten der geodätischen Linien auf dem Ellipsoid, die durch die Nabelpunkte gehen, und 2) die Darstellung der Coordinaten der geodätischen Linien auf dem elliptischen Paraboloid als Functionen eines unabhängigen Parameters. Beide Darstellungen sind bereits früher auf anderem Wege von den Herren Langenbeck (Diss. Göttingen 1877) und Schwering (Diss. Berlin 1869) ausgeführt; hier wird die von Herrn Rosenhain (Mém. Sav. Étrang. XI. 1851) befolgte Methode benutzt. M.

Karl Rohn. Transformation der hyperelliptischen Functionen $p = 2$ und ihre Bedeutung für die Kummer'sche Fläche. Clebsch Ann. XV. 315-354.

In seiner Dissertation (München 1878, siehe F. d. M. X. 531) hat der Herr Verfasser gezeigt, dass die Kummer'sche Fläche nicht nur als Repräsentant eines Integralsystems der hyperelliptischen Functionen dient, sondern dass sie auch die quadratische

Transformation dieser Functionen, sowie ihre Zweitheilung veranschaulicht. In der vorliegenden Arbeit wird zuerst die Theorie der quadratischen Transformation der hyperelliptischen Functionen für sich behandelt, und es wird die Darstellungsweise im Vergleich mit der von den Herren Hermite, Königsberger und Pringsheim gegebenen dadurch eine einfachere, dass alle Transformationen, welche dieselben Bedingungen zwischen den Theta's liefern, als nicht wesentlich verschieden aufgefasst werden. Der Herr Verfasser legt ein einfaches geometrisches Bild in der Ebene der Transformation zu Grunde, welches die Zuordnungen der Thetas, sowie der Perioden leicht erkennen lässt, allerdings blos mod. 2 Perioden. Die Zuordnungen mod. 4 Perioden werden auf die Relationen zwischen den Thetas basirt. Die so gewonnenen Resultate werden nun an der Kummer'schen Fläche interpretirt. Es erhellt dadurch der wechselseitige Zusammenhang der hier gegebenen Darstellung mit den von Cayley und Borchardt im Borchardt J. LXXXIV. (siehe F. d. M. IX. 1877. p. 366 u. 562) veröffentlichten Resultaten. Schliesslich werden einige Folgerungen aus der vorher entwickelten Theorie gezogen, welche die Eigenschaften der Parameter gewisser Punktgruppen auf der Kummer'schen Fläche, ferner die Curven, längs welcher diese Fläche von andern Flächen berührt wird, und die identischen Relationen zwischen den Theta's unter einem allgemeineren Gesichtspunkte aufgefasst, betreffen. M.

D. André. Sur le développement de fonctions de M. Weierstrass suivant les puissances croissantes de la variable. Liouville J. (3) V. 31-46.

D. André. Développements des trois fonctions $Al(x)$, $Al_1(x)$, $Al_2(x)$ suivant les puissances croissantes du module. Liouville J. (3) V. 131-142.

Die Resultate der ersten Abhandlung, sowie die für die Entwickelung befolgte Methode sind von dem Herrn Verfasser

bereits früher mitgetheilt in einer Note der C. R. LXXXV. 1108-1110; wir verweisen deshalb zunächst auf unser Referat F. d. M. IX. 1877. 362. Hinsichtlich der Methode ist zu bemerken, dass sie sich auf einige Eigenschaften der recurrenten Reihen stützt, sowie auf die Differentialgleichungen, denen die Weierstrass'schen Functionen genügen, ferner auf die Relationen, welche zwischen diesen und den elliptischen Functionen bestehen, und endlich auf die Form der Entwickelungen der elliptischen Functionen, wie sie in den früheren Arbeiten von dem Herrn Verfasser dargestellt ist (siehe F. d. M. VIII. 1876. p. 263 und IX. 1877. p. 340). Die allgemeinen Formen der Coefficienten, wie sie sich für $p_{n,t}$ resp. $q_{n,t}$, $r_{n,t}$, $s_{n,t}$, aus den erzeugenden Gleichungen

$$\prod_{\tau=1\ldots\eta} [z-(2\tau)^2]^{2t-2\tau^2+1} = 0, \qquad \prod_{\tau=0\ldots\eta} [z-(2\tau+1)^2]^{2t-2\tau^2-2\tau+1} = 0$$

ergeben, sind folgende:

$$p_{n,t} = \sum_{\tau=1\ldots\eta} \xi_\tau(n)\,[(2\tau)^2]^n, \quad q_{n,t} = \sum_{\tau=0\ldots\eta} \xi_\tau(n)\,[(2\tau+1)^2]^n,$$

wo $\xi_\tau(n)$ ein ganzes Polynom von n bezeichnet, das resp. vom Grade $2t-2\tau^2$ und $2t-2\tau^2-2\tau$ ist.

In der zweiten Abhandlung werden die 3 ersten der Weierstrass'schen Functionen nach steigenden Potenzen des Moduls entwickelt, ein Problem, das ganz analog demjenigen ist, welches der Herr Verfasser früher für die elliptischen Functionen gelöst hat (siehe oben S. 289). Die Resultate sind in einer Note der C. R. LXXXVI. 1498-1499 mitgetheilt; s. F. d. M. X. 1878. 324.

M.

Stephen Smith. Note on the formula for the multiplication of four theta-functions. Proc. L. M. S. X. 91-100.

Die Hauptformel für die Multiplication von 4 Thetafunctionen ist folgende (Proc. L. M. S. I. part VIII. p. 4):

$$
\begin{aligned}
2\theta_{\mu_1,\mu_1'}(x_1).\theta_{\mu_2,\mu_2'}(x_2).\theta_{\mu_3,\mu_3'}(x_3).\theta_{\mu_4,\mu_4'}(x_4) \\
= \prod_{j=1\ldots 4} \theta_{\sigma-\mu_j,\,\sigma'-\mu_j'}(s-x_j) + \prod_{j=1\ldots 4} \theta_{\sigma-\mu_j,\,\sigma'-\mu_j'+1}(s-x_j) \\
+(-1)^{\sigma'} \prod_{j=1\ldots 4} \theta_{\sigma-\mu_j+1,\,\sigma'-\mu_j'}(s-x_j) \\
+(-1)^{\sigma'+1} \prod_{j=1\ldots 4} \theta_{\sigma-\mu_j+1,\,\sigma'-\mu_j'+1}(s-x_j),
\end{aligned}
$$

worin

$$
\begin{aligned}
\theta_{\mu,\mu'}(x) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^{m\mu'} . q^{\frac{1}{4}(2m+\mu)^2} \varepsilon^{i(2m+\mu)x} \\
&= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^{m\mu'} \varepsilon^{\frac{1}{4}i\pi\omega(2m+\mu)^2} \varepsilon^{i(2m+\mu)x}
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
2s = x_1+x_2+x_3+x_4, \quad 2\sigma = \mu_1+\mu_2+\mu_3+\mu_4, \\
2\sigma' = \mu_1'+\mu_2'+\mu_3'+\mu_4', \quad q = \varepsilon^{i\pi\omega}.
\end{aligned}
$$

Aus dieser Hauptformel werden nun die 11 Fälle abgesondert. Alsdann wird eine Anwendung auf die Abel'schen Functionen gemacht, die durch die Gleichung

$$
Al_1(x) = \varepsilon^{-\xi\left(\frac{\pi x}{2K}\right)^2} \frac{\vartheta_1\left(\frac{\pi x}{2K}\right)}{\frac{\pi}{2K}\vartheta_1(0)} \text{ etc.,}
$$

definirt sind und

$$
\tfrac{1}{4}\xi = \frac{q-4q^4+9q^9-16q^{16}+\cdots}{1-2q+2q^4-2q^9+2q^{16}-\cdots}.
$$

Es folgt der specielle Fall, wo die Summe der 4 Argumente gleich Null ist. Zum Schluss wird die Multiplicationsformel für 4 vielfache Thetafunctionen aufgestellt. M.

C. Briot. Théorie des fonctions abéliennes. Paris. Gauthier-Villars.

Dies Werk bildet gleichsam eine Fortsetzung der Theorie der elliptischen Functionen, welche der Herr Verfasser im Jahre 1875 im Verein mit Herrn Bouquet veröffentlicht hat. Da uns das Werk selbst nicht vorliegt, so beschränken wir uns darauf,

eine kurze Inhaltsangabe desselben nach einem in Darboux Bull. (2) III. p. 9-14 befindlichen ausführlichen Referate gleichsam als Auszug zu bringen. Während das bekannte Werk von Clebsch und Gordan, Theorie der Abel'schen Functionen, den besonderen Fall behandelt, wo die vorgelegte Gleichung nur kritische Punkte zweiter Ordnung zulässt, behandelt Herr Briot die Frage in ihrer ganzen Allgemeinheit, unabhängig von der Ordnung der kritischen Punkte, von ihrer Vertheilung in der Ebene und dem Gesetz der Permutation der Wurzeln um diese Punkte. Die Einleitung enthält eine Uebersicht über die Principien der Theorie der analytischen Functionen. Im ersten Theil (p. 1-78) wird die Theorie der Abel'schen Integrale erster Gattung behandelt, im Wesentlichen nach der Methode von Clebsch und Gordan, doch unabhängig von den von letzteren angewendeten geometrischen Vorstellungen. Der zweite Theil (p. 79-172) beginnt mit dem Beweise, den Herr Bouquet (Bull. (1) III. 265) von der Existenz der Functionen gegeben hat, die durch ein System totaler Differentialgleichungen definirt sind. Die Abel'schen Differentialgleichungen werden dann unter der Form

$$\sum_{h=1}^{h=p} \frac{Q_i(x_h, y_h)}{F'_y(x_h, y_h)}\, dx_h = du_i \quad (i = 1, 2 \dots p)$$

gegeben, wo F' die Ableitung einer irreductiblen Gleichung $F(x, y) = 0$ vom n^{ten} Grade nach y, und wo die Q die p ganzen Polynome n^{ten} Grades bezeichnen, die bei der Bildung eines Systemes Abel'scher Integrale erster Gattung auftreten. Die Umkehrung wird nach einer der für die elliptischen Functionen befolgten analogen Methode bewirkt. Es werden dann die Haupteigenschaften der Function

$$\Theta = S e^{\sum_{i=1}^{i=p} m_i x_i + P}$$

behandelt, worin die $\frac{p(p+1)}{2}$ Constanten α, die in dem homogenen Polynome zweiten Grades

$$P = \sum_{i=1}^{p} \sum_{h=1}^{p} m_i m_h a_{i,h}$$

auftreten, so beschaffen sind, dass der reelle Theil dieses Polynoms für alle reellen Werthe der Zahlen m negativ ist. Das Studium der Function

$$\Theta[u^{(i)}(x, y) - G_i],$$

wo

$$u^{(i)}(x, y) = \int_{x_0, y_0}^{x, y} \frac{Q_i(x, y)}{F'_y(x, y)} dx$$

ein Normalintegral erster Gattung und die G_i willkürliche Constanten, führt dann zur Darstellung der Abel'schen Functionen und zur Integration der Abel'schen Differentialgleichungen.

M.

E. B. Christoffel. Ueber die canonische Form der Riemann'schen Integrale erster Gattung. Brioschi Ann. (2) IX. 240-301.

Gegenstand der Abhandlung ist die Frage nach der vollständigen Ausführung des von Riemann für den Integranden 1ter Gattung gegebenen Ausdruckes oder nach einer andern, aber endgültigen Ausdrucksform für den Integranden 1ter Gattung. Soll die irreductible Gleichung

$$F(\overset{n}{S}, \overset{m}{Z}) = 0$$

zum Geschlechte p gehören, so müssen ihre Coefficienten so bestimmt sein, dass S als Function von Z genau $r = (m-1)(n-1) - p$ Doppelpunkte hat, und dann gehören zu ihr p linearunabhängige im Ausdrucke

$$w = \int \Phi(\overset{n-2}{S} \mid \overset{m-2}{Z}) \frac{dz}{F'}$$

enthaltene Integrale 1ter Gattung, wenn F' die nach S genommene partielle Derivirte des Polynoms F bedeutet, und die ganze Function so bestimmt ist, dass sie in den Doppelpunkten verschwindet. Aber die Frage nach den Doppelpunkten S, Z und denen s, z ist für die wirkliche Darstellung von dw nur dann massgebend, wenn man z, s, nämlich Functionen von den Ordnungen μ, ν zur Darstellung von dw wählt. Die im Problem der

Doppelpunkte liegenden Schwierigkeiten bleiben nur bestehen, solange man nicht auf die Darstellung von dw als rationale Function zweier, gegenseitig irrationaler Argumente verzichtet. Desshalb ist dw als Function eines einzigen Argumentes z aufzufassen, d. h. es ist, statt zu z irgend eine gleichverzweigte, aber sonst nicht näher bestimmte Irrationalität s zu fügen, um dw durch beide rational auszudrücken, die Function

$$\frac{dw}{dz} = s$$

als unbekannte Irrationalität einzuführen. M.

D. Emmanuel. Étude des intégrales abéliennes de troisième espèce. Ann. de l'Éc. N. (2) VIII. 299-326

Der Verfasser stellt sich die Aufgabe, von den Eigenschaften der θ-Function ausgehend, zunächst die Abel'schen Integrale dritter Gattung durch diese Function darzustellen und ihre wichtigsten Eigenschaften aus dieser Darstellung abzuleiten, dann in ähnlicher Weise Summen von p Integralen 3ter Gattung durch θ-Functionen auszudrücken, und hieraus die Lösung des Jacobi'schen Umkehrproblems zu gewinnen. Die Behandlung schliesst sich an das Werk von Briot (Théorie des fonctions Abéliennes, Paris 1879, vergl. diesen Band p. 315) an und folgt, wie dieses, bei der algebraischen Untersuchung der Abel'schen Integrale dem Werke von Clebsch und Gordan, bei der Darstellung durch θ-Functionen der Riemann'schen Methode. Da die Resultate nichts wesentlich Neues enthalten, können wir uns kurz fassen. Nach Aufstellung der Abel'schen Integrale 1ter Gattung, wird das Integral 3ter Gattung

$$\int_{x_0}^{x} d\Pi_{\xi\eta}$$

gebildet und derart normirt, dass die erste Hälfte der Periodicitätsmoduln Null ist. Die zweite Hälfte der Periodicitätsmoduln besteht alsdann aus den zwischen den Unstetigkeitspunkten ξ und η genommenen Normalintegralen 1ter Gattung.

Der Verfasser setzt nun das obige Normalintegral 3ter Gattung $= \log \varphi(xy)$ und untersucht das Verhalten der Function $\varphi(xy)$ in der Umgebung der Punkte ξ und η. Hieraus folgt, nach einer Einschaltung, welche die Riemann'schen Sätze über das Verschwinden der Function $\vartheta(u-e)$ (nach Briot) reproducirt, durch Vergleichung der Unstetigkeiten die Darstellung des Normalintegrals 3ter Gattung durch θ-Functionen in der Form

$$\log \frac{\theta[u^{(i)}(x) - u^{(i)}(\eta) + h_i]}{\theta[u^{(i)}(x) - u^{(i)}(\xi) + h_i]} + \text{const.}$$

Nach einer Umformung dieses Ausdrucks mit Hülfe des Abel'schen Theorems wird diese Darstellung benutzt, um den Satz der Vertauschung von Parameter und Argument für die Integrale 3ter Gattung nachzuweisen (vergl. G. Roch, „Ueber Abel'sche Integrale 3ter Gattung" Borchardt J. LXVIII. p. 115). In derselben Weise wie für ein einzelnes Integral wird durch Vergleichung der Unstetigkeiten für die Summe von p Normalintegralen 3ter Gattung

$$T_{\xi\eta} = \sum_{k=1}^{p} \int_{\alpha_k}^{x} d\Pi_{\xi\eta}$$

der Ausdruck gewonnen

$$\log \frac{\theta\left[\sum_1^p{}_k\, u^{(i)}(x_k) - u^{(i)}(\eta) - C_i\right]}{\theta\left[\sum_1^p{}_k\, u^{(i)}(x_k) - u^{(i)}(\xi) - C_i\right]} + \text{const.},$$

und dieser Ausdruck, genau wie bei Clebsch und Gordan, zur Lösung des Jacobi'schen Umkehrproblems, d. h. zur Bestimmung der p Werthe x_k aus den Gleichungen

$$\sum_1^p{}_k\, du^{(i)}(x_k) = du_i \quad (i = 1 \ldots p)$$

benutzt. H. St.

A. Harnack. Ueber algebraische Differentiale.
Brioschi Ann. (2) IX. 302-306.

Unter Bezugnahme auf eine im Jahre 1869 in den Mem. di Bologna erschienene Arbeit des Herrn Cremona „Sugli integrali a differenziale algebrico (s. F. d. M. II. p. 244) theilt der Herr

Verfasser zunächst ein Verfahren mit, das Verhalten des Differentials

$$dV = \frac{\theta_x^{n-3}\Sigma c_1 x_2 dx_3}{a_x^{n-1}a_c} = \frac{\theta_x^{n-3}\,|\,cx\,dx\,|}{a_x^{n-1}a_c} \quad (a_x^n = 0)$$

in einem Doppelpunkt der Curve $a_x^n = 0$ zu ermitteln. (Ueber die Bezeichnung siehe des Verfassers Schrift „Ueber eine Behandlungsweise algebraischer Differentiale". Clebsch Ann. IX., siehe F. d. M. VII. 1875. 247.) Sind $u_x = 0$ und $v_x^1 = 0$ die Gleichungen zweier Geraden, die durch den Doppelpunkt $y = \widehat{uv}$ gehen, so ist die Gleichung der Curve in der Form entwickelbar

$$a_x^n = u_x^2 K_0 + u_x v_x K_1 + v_x^2 K_2,$$

und zwar geht die rechte Seite in das Product der beiden Tangenten des Doppelpunktes $(r_x s_x)$ über, wenn man in den K die Coordinaten des Doppelpunktes einsetzt, und es wird in der Nähe des Doppelpunktes

$$na_x^{n-1}c = r_x s_c + r_c s_x.$$

Bestimmt man nun eine Gerade w_x so, dass für den Doppelpunkt $w_y = |wuv| = 1$ ist, dann kann man für den vorliegenden Zweck statt des gegebenen Differentials das einfachere

$$dV = \frac{n\theta_y^{n-3}\,|\,cx\,dx\,|}{w_x(r_x s_c + r_c s_x)} \quad (r_x s_x = 0)$$

betrachten. Für den Zweig $v_x = 0$ wird, wenn $c = \widehat{sw}$ gewählt wird,

$$V = \int \frac{n\theta_y^{n-3}(s_x w_{dx} - w_x s_{dx})}{w_x s_x\,|\,rsw\,|} = \frac{n\theta_y^{n-3}}{|\,rsw\,|}(\log w_x - \log s_x)$$

für

$$s_x = 0, \quad c = \widehat{rw}, \quad V = \frac{n\theta_y^{n-3}}{|\,rsw\,|}(\log w_x - \log r_x).$$

Es ergiebt sich, dass die Summe der beiden Integrale in der Umgebung des Doppelpunktes endlich bleibt. Dies gilt auch für den Rückkehrpunkt, für welchen sich das Differential verhält, wie

$$\frac{n\theta_y^{n-3} \mid cx\,dx \mid}{2w_x r_x r_c} \quad \text{für } r_x = 0.$$

Es folgt alsdann eine Ableitung des Abel'schen Theorems für die Integrale 3ter Gattung und zum Schluss eine Andeutung, wie sich das Integral der rationalen Functionen zwischen reellen Grenzen, vorausgesetzt, dass es innerhalb des Intervalles nicht unendlich wird, in homogenen Coordinaten auswerthen lässt. Hr.

L. Königsberger. Ueber die Erweiterung des Jacobi'schen Transformationsprincips. Borchardt J. LXXXVII. 173-189.

Das Jacobi'sche Princip, welches die Grundlage für die Transformation der elliptischen Integrale und Functionen bildet, besteht darin, dass die Substitution

$$y = \frac{a + a'x + a''x^2 + \cdots a^{(p)}x^p}{b + b'x + b''x^2 + \cdots b^{(p)}x^p}$$

mit unbestimmten Coefficienten des Zählers und Nenners in den Ausdruck

$$\text{(M.)} \qquad \frac{dy}{\sqrt{A' + B'y + C'y^2 + D'y^3 + E'y^4}}$$

eingesetzt wird, und die Constanten a, a' etc., b, b' etc. so bestimmt werden, dass das Polynom unter der Quadratwurzel $2p-2$ Doppelfactoren hat. Jacobi zeigte, dass die Zahl der willkürlichen Constanten zu dieser Bestimmung ausreicht, und dass der Quotient aus der im Zähler von (M) auftretenden Function von x und den Factoren, welche aus der Quadratwurzel hervortreten, eine Constante ist. Von Jacobi wurde dann auch der Gedanke angeregt, vermittelst einer irrationalen Substitution die Transformationstheorie auf die hyperelliptischen Integrale auszudehnen, welchen Gedanken Richelot aufnahm. Er entwickelte (Crelle J. XII. und XVI.) in den Variabeln zweier hyperelliptischer Integrale quadratische Substitutionen, welche ein solches Integral in die Summe zweier anderer solcher Integrale überführten, deren Moduln in bestimmten Grössenbeziehungen zu den gegebenen

Moduln standen. Herr Hermite fasste diese Frage von einer ganz anderen Seite an, indem er die Transformation der zu den hyperelliptischen Integralen 1ter Ordnung gehörigen ϑ-Functionen ermittelte (Sur la théorie de la transformation des fonctions Abéliennes, 1855). Den von Herrn Hermite angegebenen Weg hat dann Herr Königsberger weiter verfolgt, und unter anderem auch die von Richelot auf algebraischem Wege gefundenen Resultate gewonnen. Die vorliegende Abhandlung hat nun zum Gegenstande eine rein algebraische Behandlung des allgemeinen Transformationsproblems der hyperelliptischen Integrale oder die Erweiterung des von Jacobi für die Transformation der elliptischen Integrale angewandten Principes. Dieses gelingt mit Hülfe des von dem Herrn Verfasser in der 7ten Vorlesung seiner „Theorie der hyperelliptischen Integrale" bewiesenen allgemeinen Theorems, das eine Ausdehnung des Abel'schen Satzes für elliptische Integrale ist, nach welchem jede algebraische Transformation eines elliptischen Integrals durch eine rationale ersetzt werden kann.

M.

A. Cayley. A memoir on the single and double theta-functions. (Abstract.) Proc. of London XXIX. 397-398.

Die Arbeit wird in extenso in den Phil. Trans. erscheinen. Das Referat wird dann gegeben werden. Cly. (O.)

A. Cayley. On the double ϑ-functions. Borchardt J. LXXXVII. 74-81.

A. Cayley. On the addition of the double ϑ-functions. Borchardt J. LXXXVIII. 74-81.

Die erste Abhandlung hat lediglich den Zweck, das Integral der elliptischen Differentialgleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{a-x.b-x.c-x.d-x}}+\frac{dy}{\sqrt{a-y.b-y.c-y.d-y}}=0$$

in einer Form darzustellen, wie sie für die Theorie der doppelten Thetafunctionen nutzbar gemacht werden kann. Als all-

gemeines Integral dieser Differentialgleichung kann ein particuläres Integral der Gleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{a-x.b-x.c-x.d-x}}+\frac{dy}{\sqrt{a-y.b-y.c-y.d-y}}$$
$$\pm\frac{dz}{\sqrt{a-z.b-z.c-z.d-z}}=0$$

genommen werden, wenn darin z als willkürliche Constante angesehen wird. Dieses z möge der Werth von y sein, der dem Werthe a von x entspricht. Es ergeben sich für jede der Functionen

$$\sqrt{\frac{a-z}{d-z}},\quad \sqrt{\frac{b-z}{d-z}},\quad \sqrt{\frac{c-z}{d-z}}$$

4 äquivalente Ausdrücke. Von diesen wird gezeigt, dass sie identisch sind; ferner wird bewiesen, dass die obige Differentialgleichung für jeden dieser Ausdrücke erfüllt wird. Schreibt man ferner, der Kürze halber,

$$X=a-x.b-x.c-x.d-x, \text{ etc.},$$

so wird das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{X}}+\frac{dy}{\sqrt{Y}}+\frac{dz}{\sqrt{Z}}=0$$

nach dem Abel'schen Satze:

$$\begin{vmatrix} x^2, & x, & 1, & \sqrt{X} \\ y^2, & y, & 1, & \sqrt{Y} \\ z^2, & z, & 1, & \sqrt{Z} \\ w^2, & w, & 1, & \sqrt{W} \end{vmatrix}=0,$$

wo w die Integrations-Constante bedeutet. Nun wird gezeigt, dass $w=a$ ist.

Die zweite Abhandlung enthält alsdann die Formeln für die Addition der doppelten Thetafunctionen. Der Herr Verfasser setzt

$$\Theta=a-\theta.b-\theta.c-\theta.d-\theta.e-\theta.f-\theta,$$

und betrachtet die Variabeln x, y, z, w, p, q verbunden durch die Gleichungen

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1 \\ x, & y, & z, & w, & p, & q \\ x^2, & y^2, & z^2, & w^2, & p^2, & q^2 \\ x^3, & y^3, & z^3, & w^3, & p^3, & q^3 \\ \sqrt{X}, & \sqrt{Y}, & \sqrt{Z}, & \sqrt{W}, & \sqrt{P}, & \sqrt{Q} \end{vmatrix} = 0,$$

welche zweien unabhängigen Gleichungen äquivalent sind, die dazu dienen, p und q, oder $p+q$ und pq durch x, y, z, w auszudrücken. Diese Gleichungen machen, wie bekannt, ein particuläres Integral der Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} + \frac{dz}{\sqrt{Z}} + \frac{dw}{\sqrt{W}} + \frac{dp}{\sqrt{P}} + \frac{dq}{\sqrt{Q}} = 0,$$

$$\frac{xdx}{\sqrt{X}} + \frac{ydy}{\sqrt{Y}} + \frac{zdz}{\sqrt{Z}} + \frac{wdw}{\sqrt{W}} + \frac{pdp}{\sqrt{P}} + \frac{qdq}{\sqrt{Q}} = 0$$

aus, oder sie sind, was dasselbe, wenn man p und q als willkürliche Constante ansieht, das allgemeine Integral der Differentialgleichungen:

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} + \frac{dz}{\sqrt{Z}} + \frac{dw}{\sqrt{W}} = 0,$$

$$\frac{xdx}{\sqrt{X}} + \frac{ydy}{\sqrt{Y}} + \frac{zdz}{\sqrt{Z}} + \frac{wdw}{\sqrt{W}} = 0.$$

Die Lösung des Problems der Addition der doppelten Thetafunctionen wird nun dadurch bewirkt, dass die 16 Functionen A_{56}, AB_{56} von p und q als proportional zu rationalen ganzen Functionen der 16 Functionen A_{12}, AB_{12}, A_{34}, AB_{34} von x und y, und resp. z und w ausgedrückt werden. Siehe die früheren Ar- des Herrn Verfassers über doppelte Thetafunctionen, Borchardt J. LXXXIII. und LXXXV. (F. d. M. IX. 1877. p. 365 u. X. 1878. p. 324.) M.

A. Cayley. On the triple ϑ-functions. Borchardt J. LXXXVII. 134-138.

A. Cayley. Algorithm for the characteristics of the triple ϑ-functions. Borchardt J. LXXXVII. 165-169.

C. W. Borchardt. Zusatz zur obigen Abhandlung. Borchardt J. LXXXVII. 169-171.

A. Cayley. On the triple ϑ-functions. Borchardt J. LXXXVII. 190-198.

Nach ähnlicher Methode, wie die doppelten Thetafunctionen werden im Vorliegenden die dreifachen Thetafunctionen behandelt. Hier giebt es im Ganzen 64 Functionen, welche irrationalen algebraischen Functionen dreier unabhängiger Variabeln proportional sind. Es bietet keine Schwierigkeit, den Ausdruck für diese 64 Functionen in dem Falle zu erhalten, wo das System der Differentialgleichungen verknüpft ist mit dem Integral

$$\int dx : \sqrt{a-x.b-x.c-x.d-x.e-x.f-x.g-x.h-x};$$

aber das ist nicht die allgemeine Form des Systems für das Geschlecht $p = 3$. Die vorliegende Abhandlung bezieht sich nur auf die eben erwähnte hyperelliptische Form. Wählt man von den 64 ϑ-Functionen in geeigneter Weise 8 aus, so kann das Quadrat irgend einer der übrigen Functionen als lineare Function der Quadrate der 8 ausgewählten Functionen dargestellt werden. In der zweiten Note giebt Herr Cayley einen neuen Algorithmus für die Charakteristiken der dreifachen Thetafunctionen. Die ungraden Charakteristiken entsprechen den Doppeltangenten einer Curve 4ter Ordnung; die Bezeichnung ist analog der in den Hesse'schen Untersuchungen (vgl. Salmon's Higher Plane Curves, 2nd ed. 1873, p. 222-225). In dem „Zusatze" zu dieser Abhandlung wird darauf aufmerksam gemacht, dass Herr Weierstrass zuerst den Gedanken gehabt, aus den 4^ϱ ϑ-Functionen von ϱ Variabeln $2\varrho+1$ Functionen, welche mit einem einfachen Index bezeichnet werden, so auszuwählen, dass die Composition dieser $2\varrho+1$ Indices zu $2, 3, \dots \varrho$ sämmtliche Thetafunctionen mit Ausnahme der Hauptthetа erschöpfen. Diese Auswahl kann auf verschiedenartige Weise modificirt werden. Es wird dann auf einen Satz von Herrn Heinrich Weber (Theorie der Abel'schen Functionen vom Geschlecht 3, 1876; p. 25, 27 u. 29) und auf die Verallgemeinerung dieses Satzes durch Herrn Schottky (Abriss einer Theorie der Abel'schen Functionen von drei Variabeln, 1878, p. 18) hingewiesen. Schliesslich wird die Tabelle der 64 ϑ-Functionen nach der Weierstrass'schen Bezeichnung, wie

sie sich in Herrn Henoch's Dissertation: „De Abelianarum functionum periodis," p. 15 findet, übersichtlich zusammengestellt. Die letzte Abhandlung erläutert den Zusammenhang der Theorie der dreifachen Thetafunctionen mit einer Curve 4[ter] Ordnung, welche vom Geschlechte 3 ist. Diese Thetafunctionen, als Functionen dreier Argumente, sollten verknüpft sein mit Functionen dreier Punkte der Curve, aber es ist zweckmässiger, einen 4[ten] Punkt einzuführen und diese Functionen als solche von 4 Punkten anzusehen. Aehnliches ist bereits in Herrn Weber's Abhandlung: „Theorie der Abel'schen Functionen vom Geschlecht 3" (1876), p. 156, geschehen. Hier ergeben sich die 64 Functionen proportional einer Determinante, deren 4 Reihen algebraische Functionen der Coordinaten der 4 Punkte sind. In der vorliegenden Abhandlung entwickelt nun Herr Cayley eingehender die geometrische Bedeutung dieser Relationen. M.

C. Jordan. Mémoire sur les caractéristiques des fonctions Θ. J. de l'Éc. Pol. XXVIII. 35-64.

C. Jordan. Sur les caractéristiques des fonctions Θ. C. R. LXXXVIII. 1020-1022, 1068-1071.

Bei ihren Arbeiten über die Functionen Θ mit 3 und 4 Variablen sind die Herren Weber und Nöther ausgegangen von dem Studium gewisser Gruppirungen der Charakteristiken dieser Functionen. Diese Resultate hat Herr C. Jordan auf eine beliebige Anzahl von Variablen ausgedehnt. Riemann bezeichnet als „Charakteristik" das Symbol

$$a = \binom{x_1 \dots x_n}{y_1 \dots y_n},$$

wo $x_1, y_1, \dots$ ganze Zahlen sind, die auf ihren Rest mod. 2 zurückgeführt sind. Herr C. Jordan bezeichnet als „Charakter" des Symbols a den Ausdruck

$$[a] = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n + r_1 x_1 + s_1 y_1 + \dots + r_n x_n + s_n y_n \pmod{2},$$

wo $r_1, s_1 \dots$ willkürlich gewählte ganzzahlige Constanten sind; ferner heisst „Typus" des durch die 2^{2n} Symbole a gebildeten

Systems der Ausdruck

$$r_1 s_1 + \cdots + r_n s_n \pmod{2};$$

„Vertauschungs-Exponent" (exposant d'échange) der beiden Symbole

$$a = \begin{pmatrix} x_1 \dots x_n \\ y_1 \dots y_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} x_1' \dots x_n' \\ y_1' \dots y_n' \end{pmatrix}$$

der Ausdruck

$$[a, b] = x_1 y_1' + y_1 x_1' + \cdots + x_n y_n' + y_n x_n' \pmod{2},$$

und „Product" beider Symbole das Symbol:

$$ab = \begin{pmatrix} x_1 + x_1' \dots x_n + x_n' \\ y_1 + y_1' \dots y_n + y_n' \end{pmatrix};$$

endlich heisst ein System von Symbolen, das in G enthalten ist und gewisse Eigenschaften besitzt, ein „vollständiges", wenn es nicht in irgend einem weiteren Systeme mit denselben Eigenschaften enthalten ist. Es wird nun für diese Systeme eine Reihe von Sätzen hergeleitet. Unter anderen werden folgende Probleme gelöst: Alle vollständigen Systeme zu finden, die so beschaffen sind, dass der Vertauschungsexponent von zweien ihrer Symbole gleich 1 (mod. 2) ist; alle vollständigen Systeme zu finden, die so beschaffen sind, dass die Summe der wechselseitigen Vertauschungs-Exponenten von dreien ihrer Symbole gleich 1 (mod. 2) ist, und ähnliche. M.

M. Nöther. Zur Theorie der Thetafunctionen von vier Argumenten. Clebsch Ann. XIV. 248-293.

Siehe das Referat über den Auszug in den Erl. Ber. F. d. M. X. 1878. p. 330. M.

M. Nöther. Ueber die Theta-Charakteristiken. Erlang. Ber. 1879.

M. Nöther. Ueber die allgemeinen Thetafunctionen. Erlang. Ber. 1879.

Herr Weber hat die Gruppirungen der dreireihigen Theta-Characteristiken, Herr Nöther die der vierreihigen gegeben; eine

Verallgemeinerung der Gruppirungs-Verhältnisse hat Herr C. Jordan mitgetheilt. Die von Herrn Nöther befolgte Methode (s. Clebsch Ann. XIV. p. 248, s. oben) gestattet ebenfalls, allgemein die Gruppirungen der p-reihigen Theta-Charakteristiken zu entwickeln. Dabei werden insbesondere solche Systeme von 2^p Charakteristiken gebildet, welche unmittelbar zu einem Ausdruck für das Additionstheorem der Thetafunctionen von p Argumenten führen. Der Ausdruck, welcher das Product

$$\vartheta(u+v+w).\vartheta(u-v)$$

linear durch 2^p Producte von der Form $\vartheta_\varepsilon(u).\vartheta_\varepsilon(u+w)$, deren Coefficienten wieder aus Summen von je 2^{p-3} Producten bestehen, ergiebt, ist eine Folgerung aus einem fundamentaleren Additionstheorem für die Thetafunctionen, bei welchem alle Coefficienten eingliedrig werden, aber die linke Seite aus einer Summe von 2^{p-3} Producten besteht. Dieses Fundamentaltheorem, aus welchem direct alle Thetarelationen fliessen, wird in der zweiten Note mitgetheilt.

M.

H. Weber. Ueber die Transformationstheorie der Theta-Functionen, insbesondere derer von drei Veränderlichen. Brioschi Ann. (2) IX. 1878. 126-166.

Die Transformation der θ-Functionen ist mehrfach Gegenstand von Untersuchungen gewesen (vgl. Thomae, Die allgemeine Transformation der θ-Functionen. Diss. Göttingen 1864; Königsberger, Ueber die Transformation der Abel'schen Functionen erster Ordnung. Borchardt J. LXIV. p. 17; Kronecker, Ueber bilineare Formen. Berl. Monatsber. 1866 und Borchardt J. LXVIII. pag. 273). Herr Weber hat diese Untersuchungen in erneuter Form zusammengestellt und durch wesentliche Zusätze bereichert. Den Ausgangspunkt bilden die $2p$-fach periodischen Functionen mit p Veränderlichen. Für diese wird in § 1 das Transformationsproblem so formulirt: Nachdem die Function durch Einführung passender Variabeln auf eine Normalform gebracht ist, derart, dass sie in Bezug auf jede einzelne der Veränderlichen die Periode πi hat, und ausserdem noch p Systeme zusammen-

gehöriger Perioden

$$a_{1\nu},\ a_{2\nu}\dots a_{p\nu}\quad (\nu = 1, 2\dots p),$$

welche den Bedingungen genügen, dass $a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu}$, und dass der reelle Theil von $\sum\limits_{\mu,\nu} a_{\mu\nu} x_\mu x_\nu$ negativ ist, werden an Stelle der ursprünglichen Variabeln $(u_1\dots u_p)$ neue Variabele $(v_1\dots v_p)$ eingeführt durch die linearen Substitutionen

$$(1.)\qquad u_h = \sum_{1,p}^{i} Q_i^{(h)} v \quad (h = 1, 2, \dots p)$$

und die Coefficienten $Q_i^{(h)}$ so bestimmt, dass die transformirte Function wiederum für jede der Variabeln $v_1\dots v_p$ einzeln die Periode πi hat, und dass die anderen Periodensysteme

$$k_{1\nu},\ k_{2\nu}\dots k_{p\nu}\quad (\nu = 1\dots p)$$

wiederum den für die Darstellbarkeit durch θ-Functionen erforderlichen Bedingungen genügen. Ist $\alpha_i^{(\varkappa)} (i, \varkappa = 1, 2\dots p)$ ein System von $4p^2$ ganzen Zahlen, so ergeben sich sofort die Gleichungen

$$(2.)\qquad Q_\mu^{(\nu)}.\pi i = \alpha_\mu^{(\nu)}.\pi i + \sum_{1,p}^{i} \alpha_\mu^{(p+i)} a_{i\nu}$$

$$(3.)\qquad \sum_{1,p}^{i} Q_i^{(\nu)}.\pi i = \alpha_{p+\mu}^{(\nu)}.\pi i + \sum_{1,p}^{i} \alpha_{p+\mu}^{(p+i)} a_{i\nu},$$

welche die Transformationscoefficienten $Q_\mu^{(\nu)}$ und die neuen Periodicitätsmoduln $k_{\nu\mu}$ bestimmen. Durch Elimination der Q und mit Berücksichtigung von $k_{\mu\nu} = k_{\nu\mu}$ folgen für die Zahlen $\alpha_i^{(\nu)}$ die Relationen

$$(4.)\qquad \sum_{1,p}^{i} (\alpha_{p+i}^{(\nu)} \alpha_i^{(\mu)} - \alpha_{p+i}^{(\mu)} \alpha_i^{(\nu)}) = \pm n \text{ oder } = 0,$$

je nachdem $\nu - \mu = \pm p$ ist oder nicht. Aus (4.) folgt

$$(5.)\qquad \Delta = \sum \pm \alpha_1^{(1)} \alpha_2^{(2)} \dots \alpha_{2p}^{(2p)} = \pm n^p$$

und ein dem System (4.) ähnliches und äquivalentes System von Bedingungen für die Zahlen α. Die ganze Zahl n, der Grad der Transformation, muss stets positiv sein, wie die Bedingung ergiebt, dass der reelle Theil von $\sum\limits_{\mu,\nu} b_{\mu\nu} x_\mu x_\nu$ negativ ist. § 2 beschäftigt sich mit der Zusammensetzung zweier Transfor-

mationen und der Reduction des Transformationsproblems. Zwei Transformationen (P) und (Q) vom Grade m und n setzen sich zu einer Transformation (R) vom Grade $m.n$ zusammen. Das der Transformation (R) entsprechende Zahlensystem $\gamma_\nu^{(i)}$ erhält man aus den zu (P) und (Q) gehörigen Systemen $\alpha_\nu^{(i)}$ und $\beta_\nu^{(i)}$ nach dem Multiplicationsgesetz der Determinanten, wobei jedoch das eine System nach den Vertical-, das andere nach den Horizontalreihen zu nehmen ist. Dieser Satz von der Zusammensetzung zweier Transformationen führt nun zu folgenden Vereinfachungen des Transformationsproblems. Zwei Transformationen n^{ten} Grades (P) und (Q) heissen äquivalent, wenn die eine aus der anderen durch Anwendung einer linearen Transformation entsteht, so dass $(P) = (Q).(R)$. Alle äquivalenten Transformationen bilden eine Klasse. Ist daher das Problem der linearen Transformation allgemein erledigt, so hat man nur noch für einen (und zwar beliebigen) Repräsentanten jeder Klasse (oder jedes Grades) die Transformationsformel zu entwickeln. Die Bestimmung des einfachsten Repräsentanten einer Klasse geschieht nach dem Verfahren von Kronecker (l. c.). Es werden 6 specielle, lineare Transformationen aufgestellt, durch welche sich die Determinante (Q) der allgemeinen Transformation n^{ten} Grades auf eine gewisse Normalform (N) reducirt, in der nur die Elemente der Diagonalreihe unverändert sind, während ein Theil der übrigen Elemente in 0, der andere Theil in kleinste Reste nach den Elementen der Diagonalreihe übergeht. Jede Klasse enthält nur eine Transformation von dieser Normalform (N). Unter der Voraussetzung, dass der Transformationsgrad n keinen quadratischen Theiler hat, ergiebt sich durch Anwendung zweier Transformationen ersten Grades (A) und (B), der einen vor, der anderen nach der Transformation (Q), eine weitere Reduction von (Q), bei der nur die Diagonalglieder der Determinante (Q) noch übrig bleiben, während alle anderen Determinanten Null werden. Hieraus folgt, dass jede Transformation, deren Grad ohne quadratischen Theiler ist, sich aus Transformationen zusammensetzt, deren Grad eine Primzahl ist. Ist nun n eine Primzahl, so bestehen die Diagonalglieder der reducirten Determinante aus

$2p$ Zahlen, die zur Hälfte gleich n, zur Hälfte gleich 1 sind. Man hat also noch 2^p Hauptfälle zu unterscheiden. Diesen 2^p Hauptfällen entsprechen ebensoviele Typen von Normalformen (N); man erhält dieselben aus den Hauptfällen durch Multiplication mit derjenigen Transformation ersten Grades, die sich aus (N) ergiebt, wenn man die in der Diagonalreihe stehenden Glieder alle durch 1 ersetzt. Die 2^p Hauptfälle endlich lassen sich durch lineare Transformation aus einem einzigen, beliebigen Hauptfall ableiten, also etwa aus der Determinante, deren Diagonalglieder

$$(n, n, \dots n, 1, 1, \dots 1)$$

sind. Man hat somit das Resultat: Für einen Grad n, der keinen quadratischen Theiler hat, kommt das allgemeine Transformationsproblem zurück auf die zwei Aufgaben, für den Grad 1 die allgemeinste Transformation und für einen Primzahlgrad n die Transformation eines Hauptfalles durchzuführen.

Nachdem in § 3 die complexe Multiplication, d. h. derjenige singuläre Fall der Transformation, in welchem die transformirten Moduln $k_{\mu\nu}$ den entsprechenden ursprünglichen Moduln $a_{\mu\nu}$ gleich werden, mit Hülfe einer reciproken Gleichung vom $2p^{\text{ten}}$ Grade mit ganzzahligen Coefficienten erledigt ist (cfr. Kronecker l. c.), wendet sich der Verfasser in § 4 zur Transformation der ϑ-Function, die für $p = 3$ vollständig durchgeführt wird. Aus den Functionsgleichungen der ϑ-Function ergeben sich wieder die Relationen (4.) für das Zahlensystem $\alpha_\nu^{(i)}$, und für die Charakteristiken

$$\begin{pmatrix} g_1 g_2 \cdots g_p \\ h_1 h_2 \dots h_p \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} g'_1 g'_2 \cdots g'_p \\ h'_1 h'_2 \dots h'_p \end{pmatrix}$$

der ursprünglichen aus der transformirten ϑ-Function die bekannten Beziehungen

$$(6.) \qquad \begin{cases} g'_\nu \equiv \sum\limits^{i} (g_i \alpha_\nu^{(i)} + h_i \alpha_\nu^{(3+i)} + \alpha_\nu^{(i)} \ \alpha_\nu^{(3+i)}) \\ h'_\nu \equiv \sum\limits^{i} (g_i \alpha_{3+\nu}^{(i)} + h_i \alpha_{3+\nu}^{(3+i)} + \alpha_{3+\nu}^{(i)} \alpha_{3+\nu}^{(3+i)}) \end{cases} \text{(mod. 2).}$$

Diese Relationen dienen in § 5 zum Nachweis, dass durch lineare Transformation jedes vollständige System ungrader Charakteristiken (wie dasselbe in der Schrift des Verfassers: „Ueber

die Abel'schen Functionen vom Geschlecht $p = 3$" p. 20—21 definirt ist) in ein ebensolches System übergeht. Man kann in eindeutiger Weise (mod. 2) dies System von Transformationszahlen bestimmen, durch welches ein beliebig gegebenes vollständiges System ungrader Charakteristiken auf ein bestimmtes Normalsystem zurückgeführt wird. Hieraus ergiebt sich die Anzahl der nach dem Modul 2 verschiedenen linearen Transformationen. In § 6 kommt der Verfasser zur Aufstellung der Transformationsgleichungen selber (für $p = 3$). Die lineare Transformation wird als bekannt übergangen (vgl. u. A. H. Weber, „Ueber die unendlich vielen Formen der ϑ-Functionen" Borchardt J. LXXIV. p. 57 siehe F. d. M. III. 1871. 216). Es handelt sich dann nach den Reductionen des § 2 noch um Aufstellung der Transformationsformeln für eine Primzahl n in einem der oben unterschiedenen $2^3 = 8$ Hauptfälle. Sondert man die Transformation zweiten Grades ab und behandelt zuerst den Fall, wo der Grad n eine ungrade Primzahl ist, so hat man nur die Transformationsformel für die ϑ-Function mit der Charakteristik (0) zu entwickeln, da sich aus ihr die Formel für eine beliebige Charakteristik durch Vermehrung der Variabeln um halbe Periodensysteme ergiebt. Die Functionalgleichung der ϑ-Function erster Ordnung liefert unmittelbar die gesuchte Formel

$$(7.)\qquad C.\vartheta(nv_1,\ nv_2,\ nv_3;\ nb)$$
$$= \underset{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{S}\left\{\vartheta\left(v_1+\frac{\lambda_1\pi i}{n},\quad v_2+\frac{\lambda_2\pi i}{n},\quad v_3+\frac{\lambda_3\pi i}{n};\quad b\right)\right\}^n,$$

worin sich die Summe S in Bezug auf jede der Grössen λ_1, λ_2, λ_3 über ein vollständiges Restsystem nach dem Modul n erstreckt. Durch Anwendung des Additionstheorems der ϑ-Functionen folgt hieraus der Satz, dass man die Function $\vartheta(nv_1, nv_2, nv_3; nb)$ darstellen kann als ganze und homogene Function n^{ter} Ordnung von den Functionen $\vartheta_\varpi(v_1, v_2, v_3; b)$, deren Coefficienten rational zusammengesetzt sind aus den Grössen der Form

$$\vartheta_\varpi\left(\frac{h_1\pi i}{n},\quad \frac{h_2\pi i}{n},\quad \frac{h_3\pi i}{n};\quad b\right).$$

(vergl. Königsberger l. c. § 4 und § 6.) Die Verhältnisse der Grössen

$$\vartheta_{\varpi}\left(\frac{p_1}{n}, \frac{p_2}{n}, \frac{p_3}{n}; b\right),$$

wo ϖ eine beliebige Charakteristik und p_1, p_2, p_3 alle möglichen Systeme zusammengehöriger Perioden bedeuten, hängen von den Grössen $\vartheta_{\varpi}(0; b)$ algebraisch durch die sogenannten Theilungsgleichungen ab. Setzt man in der Transformationsformel (7.) und in den entsprechenden für beliebige Charakteristiken gebildeten Formeln die Variabeln v_1, v_2, v_3 gleich Null und eliminirt mittelst der Theilungsgleichungen die Grössen

$$\vartheta_{\varpi}\left(\frac{p_1}{n}, \frac{p_2}{n}, \frac{p_3}{n}; b\right),$$

so erhält man die zu der obigen Transformation gehörigen Modulargleichungen, d. h. die Relationen zwischen $\vartheta_{\varpi}(0; nb)$ und $\vartheta_{\varpi}(0; b)$, also zwischen den ursprünglichen und den transformirten ϑ-Functionen, gebildet für die Nullwerthe der Argumente. (Hier findet sich ein Versehen; die Theilungsgleichungen werden für die Modulargleichungen angesehen). Den Schluss der Abhandlung (§ 7) bildet die Transformation zweiten Grades für die ϑ-Functionen mit beliebiger Charakteristik. Auch hier würde die Beschränkung auf einen Hauptfall genügen. Der Verfasser gewinnt jedoch durch directe Zerlegung eines Products von zwei der ursprünglichen ϑ-Functionen in die Summe von Producten aus je zweien der transformirten ϑ-Functionen Formeln, aus welchen sich eine Zusammenstellung der Transformationsgleichungen für sämmtliche acht in § 2 unterschiedenen Normaltypen ergiebt.

H. St.

H. Weber. Bemerkungen zu der Schrift: „Ueber die Abel'schen Functionen vom Geschlecht $p = 3$.“
Borchardt J. LXXXVIII. 82-84.

Der Verfasser berichtigt zwei Stellen in der angegebenen Schrift. Die eine (S. 123) bezieht sich auf einen bei den Wurzelfunctionen zweiten Grades und dritter Ordnung auftretenden Ausnahmefall, die andere (S. 128) auf die Anzahl der von ein-

ander abhängigen Wurzelfunctionen n^{ter} Ordnung. Den Schluss bildet die Bemerkung, dass der S. 48 ausgesprochene Satz, die Functionen φ haben für alle eindeutigen Transformationen den Charakter von Covarianten, dem Gedanken nach schon in dem Werke von Clebsch und Gordan über die Theorie der Abel'schen Functionen (§ 15) enthalten ist. H. St.

J. Thomae. Ueber eine specielle Klasse Abel'scher Functionen vom Geschlecht 3. Halle a. S Nebert.

In seiner Abhandlung: „Ueber eine specielle Klasse Abel'scher Functionen", Halle 1877. (s. F. d. M. IX. 367) hatte der Herr Verfasser über die Lage der Verzweigungspunkte gewisse Voraussetzungen gemacht, durch welche die Allgemeinheit insofern aufrecht erhalten blieb, als alle andern in Betracht kommenden Fälle als Grenzfälle angesehen werden können. Im Vorliegenden wird nun ein solcher specieller Fall wirklich durchgeführt. Es werden dabei Thetafunctionen eingeführt, deren Moduln einer algebraischen nicht linearen Gleichung genügen. M.

H. Stahl. Das Additionstheorem der ϑ-Functionen mit p Argumenten. Borchardt J. LXXXVIII. 117-130.

H. Stahl. Beweis eines Satzes von Riemann über ϑ-Charakteristiken. Borchardt J. LXXXVIII. 273-276.

Das von den Herren Weber (Theorie der Abel'schen Functionen vom Geschlecht 3. Berlin 1876.) und Nöther (Clebsch Ann. XIV. 248 s. p. 327) für 3 und 4 Veränderliche gegebene Additionstheorem der ϑ-Functionen wird hier auf p Veränderliche ausgedehnt. Die Grundlage (§ 1) bildet folgender Satz von Riemann über ϑ-Charakteristiken (s. Prym, Zur Theorie der Functionen in einer zweiblätterigen Fläche. Zürich 1866. § 12 und 13.): Man kann immer auf mannigfache Weise $2p+1$ Charakteristiken $a_1, a_2, \dots a_{2p+1}$ bestimmen, deren Summe Null, während je $2p$ derselben linear unabhängig sind, und aus denen sich sämmtliche

Charakteristiken auf einfache Weise zusammensetzen und auf ihren Charakter (ob grade oder ungrade) prüfen lassen. Bezeichnet man nämlich durch A die Summe der graden ($\overset{g}{\Sigma}$) oder, was dasselbe, die Summe der ungraden ($\overset{u}{\Sigma}$) unter den Charakteristiken a, durch $\overset{r}{\Sigma}$ aber die Summe von irgend r derselben, so sind die Charakteristiken

$$A \quad A+\overset{1}{\Sigma} \quad A+\overset{2}{\Sigma} \ldots A+\overset{p-1}{\Sigma} \quad A+\overset{p}{\Sigma}$$

sämmtlich verschieden und stellen alle 2^{2p} Charakteristiken dar. Von diesen Formen sind (wenn $q = 0, 1, 2 \ldots$)

$$\text{grade} \qquad A+\overset{p}{\Sigma} \qquad A+\overset{p-4q-3}{\Sigma} \qquad A+\overset{p-4q-4}{\Sigma}$$

$$\text{ungrade} \qquad A+\overset{p-4q-1}{\Sigma} \qquad A+\overset{p-4q-2}{\Sigma}.$$

Dieser Satz wird in § 2 zur Bildung der sogenannten Achtersysteme P und Q benutzt. Es werden von den $2p+1$ Charakteristiken a acht beliebige Charakteristiken $a_1 \ldots a_8$ abgesondert, desgl. eine neunte a_9 und aus den übrigen $2(p-4)$ Charakteristiken in gewisser Weise Combinationen zur $(p-4)^{\text{ten}}$ Klasse gebildet. Diese Combinationen sind bezeichnet durch

$$C^{(1)}, \; C^{(2)} \ldots C^{(s)} \; (s = 2^{p-4}).$$

Addirt man zu denselben die zweimal 8 Charakteristiken $A(a_i)$ und $A(a_i a_9)$ $(i = 1 \ldots 8)$, so erhält man das erste der obigen Systeme P von 2^p Charakteristiken. Aus ihm ergiebt sich ein zweites System Q von eben soviel Charakteristiken, indem man zu allen Charakteristiken des Systemes P die nämliche Charakteristik (AC) addirt, wo C irgend eine der obigen Combinationen $C^{(1)} \ldots C^{(s)}$ bedeutet. Setzt man die Charakteristiken der Systeme P und Q zusammen, so ergeben sich neue Charakteristiken, deren Charakter leicht zu bestimmen ist. Addirt man insbesondere irgend eine Charakteristik von P zu den 8 Charakteristiken einer Reihe von Q, so entstehen immer eine ungrade und sieben grade Charakteristiken. In § 3 werden die Systeme P und Q zur Herleitung des Additionstheorems verwandt. Das System P dient zur Aufstellung der allgemeinen Formel, d. h. zur Bildung von

(2^p+1) ϑ-Functionen zweiter Ordnung, zwischen denen eine homogene lineare Gleichung mit constanten Coefficienten besteht. Das System Q giebt die linearen Gleichungen zur Bestimmung dieser Coefficienten. Die Lösbarkeit dieser Gleichungen ist nicht weiter verfolgt. Aus dem allgemeinen Additionstheorem ergeben sich in § 4 einige Relationen für ϑ-Producte und ϑ-Quadrate, sowie für constante ϑ-Werthe.

Die zweite Abhandlung gibt für den oben citirten Satz von Herrn Riemann, den Herr Prym (l. c.) mit Hülfe der hyperelliptischen Functionen bewiesen, eine neue Herleitung. Bezeichnet man die Elemente einer Charakteristik a_λ durch

$$(r_1^{(\lambda)} \dots r_p^{(\lambda)};\ s_1^{(\lambda)} \dots s_p^{(\lambda)})$$

und bezeichnet den aus zwei Charakteristiken a_λ und a_μ gebildeten Ausdruck

$$\sum_1^p {}^i (r_i^{(\lambda)} s_i^{(\mu)} + r_i^{(\mu)} s_i^{\lambda}) (\text{mod.} 2)$$

mit $K_{\lambda\mu}$, so zeigt sich, dass die $(2p+1)$ Charakteristiken $a_1, a_2 \dots a_{2p+1}$ des Riemann'schen Satzes dadurch charakterisirt sind, dass zwischen je zweien derselben die Beziehung

$$K_{\lambda\mu} \equiv 1 (\text{mod.} 2)$$

besteht; ferner dass die Zahl der ungraden unter den Charakteristiken $a_1 \dots a_{2p+1}$ stets $\equiv p (\text{mod.} 4)$. H. St.

A. Hoesch. Untersuchungen über die Π-Function von Gauss und verwandte Functionen. Diss. Göttingen. Vandenhoeck und Ruprecht.

J. Thomae. Ueber die Functionen, welche durch Reihen von der Form dargestellt werden:

$$1 + \frac{p}{1}\frac{p'}{q'}\frac{p''}{q''} + \frac{p}{1}\frac{p+1}{2}\frac{p'}{q'}\frac{p'+1}{q'+1}\frac{p''}{q''}\frac{p''+1}{q''+1} + \cdots.$$

Borchardt J. LXXXVII 26-74.

Die Reihe

$$F_h\begin{pmatrix} a\, a' \ldots a^{(m)} \\ b\, b' \ldots b^{(m)} \end{pmatrix}$$

$$= 1 + \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \prod_{\nu=0}^{\nu=m} \frac{h+b^{(\nu)}}{h-a^{(\nu)}+1} \cdot \frac{h+b^{(\nu)}+1}{h-a^{(\nu)}+2} \cdots \frac{h+b^{(\nu)}+\mu-1}{h-a^{(\nu)}+\mu}$$

wird für den Fall $m = 2$ nach einer Methode untersucht, die, ohne die Darstellung der Functionen vorauszusetzen, lediglich ihre Definition durch Unstetigkeiten und Periodicität zum Ausgangspunkte nimmt. Als Einleitung werden einige Sätze aus der Functionentheorie und Differenzenrechnung vorausgeschickt, von denen uns folgende besonders bemerkenswerth erscheinen: Eine Lösung der Differenzengleichung

$$\Delta\varphi(n) = \varphi(n+1) - \varphi(n) = f(n),$$

welche bekanntlich unendlich viele um willkürliche periodische Functionen sich unterscheidende Integrale besitzt, ist dadurch vollständig bestimmt, dass man die Grenze angiebt, der sich $\varphi(n)$ nähern soll, wenn der reelle Theil von n entweder positiv oder negativ über alle Grenzen wächst. Dies folgt aus dem Satze, dass eine periodische Function $p(n)$, welche verschwindet, sobald der reelle Theil von n unendlich wird, identisch Null ist. Zwischen je $n+1$ Integralen einer homogenen Differenzengleichung (oder Recursionsformel) n^{ter} Ordnung besteht stets eine lineare homogene Relation mit periodischen Coefficienten. Die Integrale einer Differenzengleichung lassen sich in eine nach Gauss'schen Π-Functionen mit um Eins zu- oder abnehmenden Argumenten fortschreitenden Reihe entwickeln, welche hier statt der Potenzreihen in den Differentialgleichungen auftreten.

Wie die Potenzen von x durch die Gleichung $xf'(x) = \mu f(x)$, so sind die Π-Functionen durch die Gleichung definirt

$$n\Delta\varphi(n) = \mu\varphi(n) \quad \text{oder} \quad n\varphi(n+1) = (n+\mu)\varphi(n),$$

von welcher

$$\varphi(n) = \Pi(n+\mu-1) : \Pi(n-1)$$

diejenige Lösung ist, die durch die hinzutretende Bedingung $\lim \varphi(n) n^{-\mu} = 1$ für positiv unendliche Werthe des reellen Theiles von n bestimmt ist.

Zur Definition der Functionen, welche den eigentlichen Gegenstand der vorliegenden Untersuchung ausmachen, wird nach dem Vorgange Riemann's für die Behandlung der nahe verwandten durch die Gauss'sche Reihe darstellbaren Functionen mit

$$W\begin{pmatrix}\alpha\ \beta\ \gamma & \\ \alpha'\ \beta'\ \gamma' & n\end{pmatrix}$$

eine Function bezeichnet, die folgende Bedingungen erfüllt:

1) Sie ist eine überall ausser für $n=\infty$ eindeutige Function von n.

2) $\alpha+\alpha'+\beta+\beta'+\gamma+\gamma' = 1$.

3) Zwischen je drei Zweigen dieser Function findet stets eine lineare homogene Relation mit periodischen Coefficienten statt.

4) Die Function lässt sich in die Formen

$$\overset{+}{c}_\alpha W_+^\alpha + \overset{+}{c}_{\alpha'} W_+^{\alpha'},\quad \overset{+}{c}_\beta W_+^\beta + \overset{+}{c}_{\beta'} W_+^{\beta'},\quad \overset{+}{c}_\gamma W_+^\gamma + \overset{+}{c}_{\gamma'} W_+^{\gamma'},$$

$$\overset{-}{c}_\alpha W_-^\alpha + \overset{-}{c}_{\alpha'} W_-^{\alpha'},\quad \overset{-}{c}_\beta W_-^\beta + \overset{-}{c}_{\beta'} W_-^{\beta'},\quad \overset{-}{c}_\gamma W_-^\gamma + \overset{-}{c}_{\gamma'} W_-^{\gamma'},$$

setzen, wo

$$\overset{+}{c}_\alpha\ \overset{+}{c}_{\alpha'}, \ldots \overset{-}{c}_\alpha\ \overset{-}{c}_{\alpha'}, \ldots$$

periodische Functionen von n sind und

$$W_+^\alpha\ W_+^{\alpha'} \ldots W_-^\alpha\ W_-^{\alpha'} \ldots$$

zwölf Zweige der Function bedeuten, die durch gewisse hier nicht näher wiederzugebende Beschaffenheiten in ihrem Verhalten in den Punktfolgen $\alpha, \alpha' \ldots$ und für $n=\infty$ ausgezeichnet sind. Von der so definirten Function $W(n)$ wird gezeigt, dass sie der Differenzengleichung

$$\begin{aligned}&(n+2-\beta)(n+2-\beta')\Delta^2 W(n)\\ &+\{n(1+\gamma-\gamma')+\gamma\gamma'+(2-\beta)(2-\beta')-(\alpha+1)(\alpha'+1)\}\Delta W(n)\\ &+\gamma\gamma' W(n) = 0\end{aligned}$$

genügt (art. 1 u. 2). Die Lösung derselben erfolgt durch Reihen von der Form

$$\sum_\mu a_\mu \Pi(n+\mu-1) : \Pi(n+\lambda),$$

in denen die a_μ nach der Methode der unbestimmten Coefficienten ermittelt werden. Es werden zwölf solcher Reihen entsprechend den

zwölf Zweigen der Function W aufgestellt. Die so erhaltenen Reihen sind F-Reihen multiplicirt mit Π-Functionen, und da diese Reihen nicht immer convergiren, so werden mit Hülfe von Transformationen für jeden Zweig zehn verschiedene Darstellungen durch S-Reihen gegeben (art. 3-6). Die linearen homogenen Relationen mit periodischen Coefficienten, welche zwischen den verschiedenen Zweigen der W-Function stattfinden, werden in den art. 7 und 8 entwickelt. Im art. 9 wird die F-Reihe in Bezug auf ihr Verhalten untersucht, wenn ihre Parameter über alle Grenzen wachsen.

Eine Analogie mit den Gauss'schen Reihen zeigen die F-Reihen auch darin, dass zwischen je drei F-Reihen, deren Parameter sich nur um ganze Zahlen unterscheiden (contigue Functionen) eine lineare homogene Relation mit rationalen Coefficienten stattfindet. Eine Anzahl solcher Relationen zwischen contiguen Functionen wird hergeleitet, und in einem speciellen Falle gezeigt, wie sich die Coefficienten als Näherungszähler und -Nenner eines Kettenbruchs darstellen lassen (art. 10—12). Den Beschluss macht die Darstellung der F-Reihe durch bestimmte Integrale. Diese Form ist besonders vortheilhaft zur Herstellung von Relationen zwischen contiguen Functionen, namentlich wenn die Relationen zwischen contiguen Gauss'schen Reihen bekannt sind. Hr.

Appell. Sur une classe de fonctions analogues aux fonctions eulériennes étudiées par M. Heine.
C. R. LXXXIX. 841-844.

Auszug aus einer Abhandlung über Functionen, welche den von Herrn Heine (Crelle J. XXXIV. 290) studirten Euler'schen Integralen analog sind und auf folgende Weise gebildet werden: Es sei

$$P(z, m, n) = \prod_{\substack{\lambda=1\dots m\\ \mu=1\dots n}} \frac{\lambda\omega'+\mu\omega}{z+\lambda\omega'+\mu\omega}\, e^{\frac{z}{\lambda\omega'+\mu\omega}},$$

wo m und n zwei ganze positive Zahlen, ω und ω' zwei solche imaginäre Grössen sind, dass der Coefficient von i in $\frac{\omega'}{\omega}$ positiv ist.

Je nachdem man nun m und n wachsen lässt, wird $P(z, m, n)$ verschiedene Grenzwerthe annehmen, die sich von einander durch einen Factor von der Form e^{hz^2} unterscheiden, wo h eine Constante. $P(z)$ sei diejenige Function, welche man erhält, wenn zuerst $n = \infty$, dann $m = \infty$ gesetzt wird, und $P_1(z)$ diejenige, welche auf dem umgekehrten Wege resultirt. Dann gelten die Formeln

$$P(z)\,P(-z) = \frac{\omega}{\pi}\sin\frac{\pi z}{\omega}\cdot\frac{\theta_1'(0)}{\theta_1(z)},$$

$$P_1(z)P_1(-z) = \frac{\omega}{\pi}\sin\frac{\pi z}{\omega}\cdot\frac{\vartheta_1(0)}{\vartheta_1(0)},$$

$$P_1(z) = e^{-\frac{\pi i}{2\omega\omega'}z^2}.P(z),$$

und alle diese Functionen lassen sich mit Hülfe der Heine'schen Function:

$$\Omega\left(q^2, \frac{z}{\omega'}\right) = \prod_{n=1\ldots\infty}\frac{1-q^{2n}}{1-q^{2n+\frac{2z}{\omega'}}}$$

ausdrücken, wo $q = e^{\frac{\pi\omega' i}{\omega}}$ ist. Ferner wird gezeigt, wie man mit Hülfe der Function Ω und ihrer logarithmischen Ableitung eine eindeutige Function $F(z)$ bilden kann, welche einer der Gleichungsgruppen:

$$F(z+\omega) = F(z),\quad F(z+\omega') = f(z)F(z);$$
$$F(z+\omega) = F(z),\quad F(z+\omega') = f(z)+F(z)$$

genügt, wo $f(z)$ eine rationale Function von

$$\sin\frac{2m\pi z}{\omega}\quad\text{und}\quad\cos\frac{2m\pi z}{\omega}$$

und m eine ganze Zahl ist. Endlich gelangt der Herr Verfasser mit Hülfe dieser Functionen zu einem neuen Ausdruck für elliptische Functionen als Quotienten zweier Reihen. M.

Appell. Sur une classe de fonctions qui se rattachent aux fonctions de M. Heine. C. R. LXXXIX. 1031-1032.

Sind ω, ω', ω'' drei solche imaginäre Grössen, dass die

Coefficienten von i in den Quotienten $\frac{\omega'}{\omega}$ und $\frac{\omega''}{\omega}$ positiv sind, und

$$q = e^{\frac{\pi\omega' i}{\omega}}, \quad t = e^{\frac{\pi\omega'' i}{\omega}},$$

so wird die Function

$$M(z) = \prod_{n=0,\, m=0}^{n=\infty,\, m=\infty} \left(1 - e^{\frac{2\pi z i}{\omega}} q^{2n} t^{2m}\right)$$

gebildet, die mit der Heine'schen Function

$$O(a, \xi) = \prod_{n=1\dots\infty} (1 + a^{\xi+n})$$

auf folgende Weise zusammenhängt:

$$M(z+\omega) \;= M(z),$$

$$M(z+\omega') \;= M(z) : O\left(t^2, \frac{z}{\omega''} - 1\right),$$

$$M(z+\omega'') = M(z) : O\left(q^2, \frac{z}{\omega'} - 1\right).$$

Mit Hülfe dieser Function wird eine eindeutige Function gebildet, die den Gleichungen

$$F(z+\omega) = F(z), \quad F(z+\omega') = f(z) \cdot F(z)$$

genügt, wo $f(z)$ eine gegebene eindeutige Function mit der Periode ω ist.

M.

A. de St.-Germain. Sur les développements en séries dont les termes sont les fonctions Y_n de Laplace. C. R. LXXXVIII. 1186-1188, 1313-1314.

Der Verfasser macht den Versuch, die Lücken im Poisson'schen Beweise für die Entwickelung einer beliebigen Function zweier Veränderlicher nach Kugelfunctionen auszufüllen. Ist

$$x = \cos\vartheta \cos\vartheta' + \sin\vartheta \sin\vartheta' \cos(\psi - \psi'),$$

$$Y_n = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} F(\vartheta', \psi')\, P^n(x) \sin\vartheta'\, d\vartheta'\, d\psi',$$

so handelt es sich darum, zu zeigen, dass die Reihe

$$Y_0 + \alpha Y_1 + \alpha^2 Y_2 + \cdots$$

eine continuirliche Function von α ist und noch für $\alpha = 1$ con-

vergirt. Durch Anwendung der Differentialgleichung für $P^n(x)$, diese als Function von ϑ' und ψ' betrachtet, und durch theilweise Integration kann man, falls $F(\vartheta, \psi)$ für jeden Punkt einer Kugelfläche nur einen einzigen Werth hat, Y_n auf die Form bringen

$$Y_n = -\frac{2n+1}{4\pi n(n+1)} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\partial \sin\vartheta' \frac{\partial F}{\partial \vartheta'}}{\partial \vartheta'} + \frac{1}{\sin\vartheta'} \frac{\partial^2 F}{\partial \psi'^2} \right\} P^n(x)\, d\vartheta'\, d\psi'.$$

Ist nun A der grösste Werth des in Klammern stehenden Ausdrucks unter dem Integralzeichen, so ist der absolute Werth von Y_n kleiner als

$$\frac{(2n+1)A}{4\pi n(n+1)} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (P^n)\, d\vartheta'\, d\psi',$$

wo (P^n) der absolute Werth von $P^n(x)$ ist. Der Verfasser zeigt nun, dass

$$(1) \quad \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (P^n) \sin\vartheta' . d\vartheta'\, d\psi' < \frac{4\pi}{\sqrt{2n+1}},$$

$$(2) \quad \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (P^n)\, d\vartheta'\, d\psi' < 4\pi h + \frac{1}{\sin h} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (P^n) \sin\vartheta' d\vartheta'\, d\psi',$$

worin h eine unbestimmte zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegende Grösse ist. Wird dann für h sowohl, als für $\sin h$ $\frac{1}{\sqrt[4]{2n+1}}$ gesetzt, so wird der absolute Werth von Y_n kleiner als

$$\frac{\sqrt[4]{2n+1}^3 \cdot 2A}{n(n+1)} < \frac{4A}{n\sqrt[4]{n}}.$$

Die Reihe

$$Y_0 + \alpha Y_1 \cdots + \alpha^n Y_n + \cdots$$

geht daher über in die folgende:

$$2A\left(\omega_0 + \omega_1\, \alpha + \omega_2 \frac{\alpha^2}{2\sqrt[4]{2}} + \cdots + \omega_n \frac{\alpha^n}{n\sqrt[4]{n}} + \cdots\right),$$

wo die Grössen ω unabhängig von α und absolut kleiner als 1 sind; aus dieser Form folgt der zu beweisende Satz unmittelbar.

Die oben benutzte Formel (2) ergiebt sich leicht durch Zerlegung der Integrationsgrenzen für ϑ'. Die Formel (1) wird folgendermassen bewiesen. Man denke eine Kugelfläche vom Radius 1 mit Masse von der Dichtigkeit (P^n) belegt, theile die Oberfläche in m gleiche Theile, so ist die gesammte Masse

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} (P^n) \sin\vartheta' \, d\vartheta' \, d\psi' = \lim \frac{4\pi}{m} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_m),$$

wo die ε positive Grössen sind. Es ist aber

$$\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_m}{m} < \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \cdots + \varepsilon_m^2}{m}},$$

und

$$\lim. \frac{4\pi}{m} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \cdots + \varepsilon_m^2) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (P^n)^2 \sin\vartheta' \, d\vartheta' \, d\psi = \frac{4\pi}{2n+1},$$

woraus Gleichung (1) unmittelbar folgt. Wn.

Escary. Démonstration de la convergence d'une série double rencontrée par Lamé dans ses recherches de physique mathématique. C. R. LXXXVIII. 558-562.

Eine von Lamé in seinen „Leçons sur les fonctions inverses" (Paris 1857.) p. 241 benutzte Doppelreihe wird so transformirt, dass die einzelnen Glieder die Form der Laplace'schen Y_n haben; daraus folgt unmittelbar die Convergenz der ursprünglichen Reihe.

Wn.

F. Neumann. Ueber eine neue Eigenschaft der Laplace'schen $Y^{(n)}$ und ihre Anwendung zur analytischen Darstellung derjenigen Phänomene, welche Functionen der geographischen Länge und Breite sind. Clebsch Ann. XV. 567-576.

Der Aufsatz ist ein Abdruck einer älteren Arbeit von F. Neumann, die zuerst im Jahre 1838 in Schumacher's astronomischen Nachrichten publicirt ist. Sie behandelt die Aufgabe, in einer endlichen, nach Kugelfunctionen mit zwei Veränderlichen

(den Laplace'schen Y_n) fortschreitenden Reihe die Coefficienten so zu bestimmen, dass die Reihe für eine endliche Zahl von Werthen der unabhängigen Variabeln (geographische Länge und Breite) gegebene Werthe annimmt. Diese Aufgabe, die auch eine der Hauptaufgaben in der ein Jahr später erschienenen Theorie des Erdmagnetismus von Gauss bildet, wird hier auf folgende eigenthümliche und einfache Weise gelöst. Die gegebenen Werthe mögen zunächst auf der Erdoberfläche vertheilt sein auf eine Anzahl gleich weit von einander abstehender Meridiane

$$\left[\omega = 0,\ \omega = \alpha,\ \omega = 2\alpha, \ldots\ \omega = (2p-1)\alpha, \text{ wo } \alpha = \frac{\pi}{p}\right]$$

und in jedem Meridian auf Breiten $\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_{2p+1}$. Denkt man nun die gesuchte Function nach Sinus und Cosinus der Vielfachen von ω geordnet:

$$V(\omega, \mu) = C_0 + C_1 \cos\omega + S_1 \sin\omega + C_2 \cos 2\omega + S_2 \sin 2\omega + \cdots,$$

so kann man für jedes festgehaltene μ die Coefficienten C, S nach Lagrange's bekannter Methode bestimmen. Man erhält also, den $(2p+1)$ Werthen von μ entsprechend, für jeden jener Coefficienten $(2p+1)$ numerische Werthe. Andererseits sind C und S endliche Reihen von Kugelfunctionen (resp. von zugeordneten Kugelfunctionen nach Heine's Bezeichnung) der Variablen μ [μ gleich dem Sinus der Breite] mit zusammen $(p+1)^2$ willkürlichen Constanten. Um diese zu bestimmen, suche man $(2p+1)$ Grössen $a_1, a_2, \ldots a_{2p+1}$, die dem folgenden Gleichungssystem genügen:

$$\begin{aligned}
\Sigma a &= 1,\\
\Sigma a\mu &= 0,\\
\Sigma a\mu^2 &= \tfrac{1}{3},\\
\Sigma a\mu^3 &= 0,\\
\Sigma a\mu^4 &= \tfrac{1}{5},\\
&\cdots\cdots\cdots\\
\Sigma a\mu^{2p} &= \frac{1}{2p+1},\\
\Sigma a\mu^{2p+1} &= 0.
\end{aligned}$$

Die Summen sind so zu verstehen, dass

$$\Sigma a\mu^n = a_1\mu_1^n + a_2\mu_2^n + \cdots + a_{2p+1}\mu_{2p+1}^n.$$

Da über die Werthe $\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_{2p+1}$ bisher nicht verfügt ist, so enthält das obige System von Gleichungen mehr Grössen, über die man verfügen kann, als Gleichungen. Daher ist die Bestimmung der a stets möglich. Dann gelten, unter $X^{(n)}$ die einfache Kugelfunction der Veränderlichen μ verstanden, die Sätze:

$$\Sigma a X^{(n)} X^{(n')} = 0, \quad \Sigma a (1-\mu^2)^i \frac{d^i X^{(n)}}{d\mu^i} \cdot \frac{d^i X^{(n')}}{d\mu^i} = 0.$$

Die Summen sind dabei genommen in Bezug auf das ganze System der μ und der respectiven a, durch welche dem obigen Gleichungssystem genügt wird. Für $n = n'$ verschwinden die Summen nicht, lassen sich aber durch einfache Ausdrücke darstellen. Durch diese Hülfssätze, die für $p = \infty$ in die bekannten Integralsätze übergehen, gelingt die Bestimmung der willkürlichen Constanten unmittelbar.

Der Verfasser geht sodann auf den Fall über, dass die Anzahl der gegebenen Werthe von μ nicht gleich $2p+1$, sondern gleich $q (< 2p+1)$ ist. Dann ist auch in dem obigen Gleichungssystem die Anzahl der Glieder jeder Summe gleich q, die Anzahl der Gleichungen $q+1$. Die directe Anwendung der obigen Methode liefert aber nur eine entsprechend geringere Zahl der zu bestimmenden Constanten. Um eine grössere Zahl von Constanten bestimmen zu können, um also aus einer geringeren Zahl von Beobachtungen doch eine genauere Darstellung der gesuchten Function zu erhalten, werden zu den obigen $q+1$ Gleichungen noch $q-1$ andere ähnliche hinzugefügt, was gestattet ist, da ja bisher noch über die q Grössen a zu verfügen ist. Dann ergeben sich die μ als Wurzeln der algebraischen Gleichung

$$X^{(q)} \leqq 0.$$

Wendet man dies Resultat auf die Berechnung eines bestimmten Integrals aus q gegebenen Beobachtungen der zu integrirenden Function an, so erhält man das Gauss'sche Verfahren der mechanischen Quadratur. Wn.

Niemöller. Ueber eine Anwendung der Kugelfunctionen.
Schlömilch Z. XXIV. 57-61.

Eine von $x = -1$ bis $x = +1$ reichende begrenzte gerade Linie übe auf einen in ihrer Verlängerung liegenden Punkt (dessen Entfernung vom Anfangspunkt y sei) eine Anziehung aus, deren Potential bekannt sei, $= \varphi(y)$. Um daraus die Vertheilung der Masse auf der anziehenden Geraden zu berechnen, entwickle man $\varphi(y)$ in eine nach Kugelfunctionen zweiter Art fortschreitende Reihe (mit Hülfe der Entwickelung von $\varphi(y)$ nach fallenden Potenzen von y)

$$\varphi(y) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n Q^{(n)}(y).$$

Dann ist die lineare Dichtigkeit im Punkte x:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{2} b_n P^n(x).$$

Wn.

Escary. Généralisation des fonctions X_n de Legendre au cas de deux entiers, ou des fonctions qui naissent du développement des expressions

$$(1-2\alpha x+\alpha^2)^{\pm\frac{2l+1}{2}}.$$

Liouville J. (3) V. 47-68.

Die vorliegende Arbeit ist eine zusammenfassende Darstellung mehrerer kleinerer Aufsätze, die der Verfasser im vorigen Jahre in den Comptes rendus veröffentlicht hat, und über die F. d. M. X. 1878. p. 338-339 referirt ist. In jenem Referat ist der wesentliche Inhalt der Arbeit angegeben; es ist auch darauf aufmerksam gemacht, dass die meisten Resultate nicht neu sind, dass endlich einige der aufgestellten Formeln fehlerhaft sind. Es bleibt daher hier nur zu erwähnen, dass der Verfasser zum Schluss zeigt, wie die von ihm entwickelten Functionen bei der Lösung des Problems der stationären Temperaturvertheilung in einer Kugel und einem Rotationsellipsoid angewandt werden können.

Wn.

E. J. Routh. A method of constructing by pure analysis functions X, Y, etc., which possess the property that $\int XYd\sigma = 0$, and such that any given function can be expanded in the form $\alpha X+\beta Y+\gamma Z+\cdots$. Proc. L. M. S. X. 146-167.

Um Differentialgleichungen zu erhalten, nach deren Integralen man eine beliebige Function entwickeln kann, geht der Verfasser von derjenigen algebraischen Aufgabe aus, die in geometrischer Fassung die Bestimmung des gemeinsamen Systems conjugirter Durchmesser zweier Oberflächen zweiter Ordnung mit demselben Mittelpunkt in einem Raume von n Dimensionen zum Zweck hat. Die Flächen seien z. B.:

$$(1)\qquad A_1^2X_1^2+A_2^2X_2^2+\cdots+A_n^2X_n^2 = H^2,$$

$$(2)\qquad 2U = a_1X_1^2+a_2X_2^2+\cdots+a_nX_n^2+b_1(X_2-X_1)^2 +b_2(X_3-X_2)^2+\cdots+b_{n-1}(X_n-X_{n-1})^2 = 2.$$

Zur Bestimmung des gesuchten Systems conjugirter Durchmesser hat man die Gleichungen

$$(3)\qquad \frac{\partial U}{\partial X_m} = a_mX_m+b_{m-1}(X_m-X_{m-1})-b_m(X_{m+1}-X_m) = pA_m^2X_m.$$

Daraus folgt für p eine Gleichung n^{ten} Grades mit lauter reellen Wurzeln, und die jeder einzelnen Wurzel entsprechenden zusammengehörigen Werthe der X sind die Coordinaten des Endpunktes eines der gesuchten Durchmesser. Sind $(X_1\ X_2\ldots X_n)$ und $(Y_1\ Y_2\ldots Y_n)$ die Coordinaten der Endpunkte irgend zweier conjugirten Durchmesser, so ist

$$(4)\qquad A_1^2X_1Y_1+A_2^2X_2Y_2+\cdots+A_n^2X_nY_n = 0.$$

In der Differenzengleichung (3) werden nun die Grössen X, a, b als Functionen der Veränderlichen x betrachtet derart, dass für $x = m.h$, X in X_m, a in a_m, b in b_m übergeht. Geht man zur Grenze für $h = 0$ über, während $n.h = l$ endlich bleibt, setzt zugleich $h^2b = b'$, so geht die Differenzengleichung über in die Differentialgleichung

$$(3a)\qquad a_xX-\frac{d}{dx}\left(b'_x\frac{dX}{dx}\right) = pA_x^2.X.$$

Sind X und Y Lösungen, die zu verschiedenen Werthen von p gehören, so geht die Gleichung (4) über in

$$\text{(4a)} \qquad \int_0^l XYA_x^2\,dx = 0.$$

Die Differenzengleichung (3) nimmt für $m = 0$ und $m = n$ eine andere Form an. Damit dieselbe noch für $x = h$ und für $x = nh$ gilt, muss sein

$$\text{(5)} \qquad b_0(X_1 - X_0) = 0, \text{ resp. } b_n(X_{n+1} - X_n) = 0.$$

Für die rechten Seiten dieser Gleichungen nimmt der Verfasser allgemeiner λX_1, resp. μX_n, indem er $U + \frac{1}{2}\lambda X_1^2 + \frac{1}{2}\mu X_n^2$ an Stelle von U setzt und unter λ und μ Grössen versteht, die von p unabhängig sind. Wenn die Differentialgleichung (3) in die Differentialgleichung (3a) übergeht, gehen zugleich die Gleichungen (5) in die folgenden über:

$$\text{(5a)} \qquad b'_x \frac{dX'}{dx} = \lambda' X \text{ für } x = 0; \quad -b'_x \frac{dX_n}{dx} = \mu' X \text{ für } x = 0;$$

diese Bedingungen sind zur Bestimmung der unbestimmten Grösse p hinreichend, ersetzen also die Gleichung n^{ten} Grades, durch die p bei endlichen Werthen von n bestimmt war.

Um eine beliebige Function $f(x)$ zu entwickeln, wird zuerst eine endliche Reihe von n Gliedern betrachtet

$$\alpha X + \beta Y + \gamma Z + \cdots$$

und es werden die Coefficienten mit Hülfe der Gleichung (4) so bestimmt, dass für $x = h, 2h, \ldots nh$ die Reihe n gegebene Werthe annimmt. Geht man wieder zur Grenze $h = 0$ über, so ergeben sich die α, β etc. als Quotienten zweier bestimmten Integrale.

Es wird noch gezeigt, dass, wenn man an Stelle von U andere quadratische Formen nimmt, man auch Differentialgleichungen von höherer Ordnung erhalten kann. Ferner wird die Bestimmung des Parameters p der Differentialgleichung (3a) an zwei Beispielen (trigonometrischen Reihen und Kugelfunctionen) erläutert. Endlich wird die obige Methode so modificirt, dass man die Entwickelung von Functionen zweier Variablen erhält.

Als streng vermag Referent die Methode des Verfassers nicht anzusehen, da der wesentlichste Punkt mit Stillschweigen über-

gangen ist, nämlich der Beweis, dass beim Uebergang der endlichen zu der unendlichen Reihe die letztere auch convergirt.

Wn.

E. Lommel. Zur Theorie der Bessel'schen Functionen. Clebsch Ann. XIV. 510-536.

Im ersten Theile der Arbeit stellt der Verfasser sich die Aufgabe, diejenige Differentialgleichung zweiter Ordnung zu bestimmen, welche durch

$$y = f_1 . J^\nu(f)$$

befriedigt wird, wenn unter f_1 und f beliebige Functionen der unabhängigen Veränderlichen z verstanden werden. Durch Benutzung der Differentialgleichung für die Bessel'sche Function J^ν und durch einfache Transformationen gelangt er zu dem Satze: Die lineare Differentialgleichung

$$\text{(I.)} \quad \frac{d^2y}{dz^2} - \frac{\varphi'}{\varphi}\frac{dy}{dz} + \Big[\tfrac{1}{4}\Big(\frac{\varphi'}{\varphi}\Big)^2 - \tfrac{1}{2}\frac{d}{dz}\cdot\Big(\frac{\varphi'}{\varphi}\Big)$$
$$-\tfrac{1}{4}\Big(\frac{\psi''}{\psi'}\Big)^2 + \tfrac{1}{2}\frac{d}{dz}\cdot\Big(\frac{\psi''}{\psi'}\Big) + \Big(\psi'^2 - \frac{4\nu^2-1}{4}\Big)\Big(\frac{\psi'}{\psi}\Big)^2\Big]y = 0,$$

in der φ und ψ beliebige Functionen von z sind, hat zum allgemeinen Integral:

$$\text{(II.)} \quad y = \sqrt{\frac{\varphi\psi}{\psi'}}\{AJ^\nu(\psi) + BJ^{-\nu}(\psi)\}.$$

Falls ν eine ganze Zahl ist, tritt natürlich die Function $Y^{(n)}$ an Stelle von $J^{-(\nu)}$. Das obige Resultat wird dann specialisirt, indem $\varphi = \text{Const.}$ gesetzt wird und für ψ besondere Functionen genommen werden. Von besonderem Interesse sind hier die Fälle, wo $\nu = \frac{1}{2}$ oder ein ungrades Vielfaches von $\frac{1}{2}$ ist.

Im zweiten Theile werden Integrale mit Producten zweier Bessel'scher Functionen behandelt. Den Ausgangspunkt bildet hier der Satz: Sind y und η Integrale der Differentialgleichungen:

$$\text{(III.)} \quad \frac{d^2y}{dz^2} + P.y = 0, \quad \frac{d^2\eta}{dz^2} + Q.\eta = 0,$$

so ist

$$\text{(IV.)} \quad \int (P-Q)y\eta\, dz = y\frac{d\eta}{dz} - \eta\frac{dy}{dz}\cdot$$

Jede der beiden Differentialgleichungen (3) hat die Form der Gleichung (1), falls in letztern $\varphi =$ Const. gesetzt wird. Man hat demnach für y und η Ausdrücke der Form (2), und die linke Seite von (4.) enthält unter dem Integralzeichen das Product zweier Bessel'schen Functionen. Durch specielle Annahmen über P und Q ergiebt sich so eine grosse Anzahl von Formeln, die einzeln aufzuführen hier zu weit führen würde.

Im dritten Abschnitt endlich werden die meisten der eben erwähnten speciellen Formeln auf andere Art abgeleitet, indem direct (unter Anwendung bekannter Formeln aus der Theorie der Bessel'schen Functionen) die durch Differentiation der gesuchten Formeln entstehenden Gleichungen aufgestellt werden.

Wn.

Achter Abschnitt.

Reine, elementare und synthetische Geometrie.

Capitel 1.

Principien der Geometrie.

G. Cantor. Ueber unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten. Clebsch Ann. XV. 1-8.

Im Anschlusse an eine frühere Arbeit über n-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten (s. F. d. M. 1877. IX, 379) betrachtet Herr Cantor im obigen Aufsatze die linearen Punktmannigfaltigkeiten. Als erste Ableitung P' einer linearen Punktmenge P wird der Inbegriff aller Grenzpunkte von P definirt, als zweite Ableitung der Inbegriff der Grenzpunkte von P' u. s. f. Je nachdem dieser Ableitungsprocess endlich oder unendlich ist, wird P eine Punktmenge erster oder zweiter Gattung genannt. Einen zweiten Eintheilungsgrund giebt die Mächtigkeit der Punktmengen, wonach sie in verschiedene Klassen zerfallen. Es werden zwei derselben nach ihren Merkmalen beschrieben, durch Beispiele erläutert, und ihre Verschiedenheit nachgewiesen, worauf ein vereinfachter Beweis eines vom Verfasser schon früher bewiesenen Satzes folgt (s. F. d. M. 1874. VI, 57). Schg.

G. Cantor. Ueber einen Satz aus der Theorie der stetigen Mannigfaltigkeiten. Gött. Nachr. 1879. 127-135.

Der Verfasser beweist durch den Schluss von n auf $n+1$ folgenden Satz: „Hat man zwischen zwei stetigen Gebieten M_μ und M_ν eine solche Abhängigkeit, dass zu jedem Punkte z von M_μ höchstens ein Punkt Z von M_ν, zu jedem Punkte Z von M_ν mindestens ein Punkt z von M_μ gehört, und ist ferner diese Beziehung eine stetige, so dass unendlich kleinen Aenderungen von z unendlich kleine Aenderungen von Z, und umgekehrt, entsprechen, so ist $\mu \geqq \nu$“. Schg.

L. Pilgrim. Ueber die Anzahl der Theile, in welche ein Gebiet k^{ter} Stufe (Grassmann) durch n Gebiete $(k-1)^{\text{ter}}$ Stufe getheilt werden kann. Schlömilch Z. XXIV. 188-192.

Betrachtet man zwei unendlich grosse Theile eines Gebietes, welche im Unendlichen zusammenhängen, als einen geschlossenen, unendlich grossen Theil des Gebietes, und versteht unter $n|k$ die Anzahl der geschlossenen, unter $(n|k)$ die Anzahl der endlich grossen Theile, in welche ein Gebiet k^{ter} Stufe durch n Gebiete $(k-1)^{\text{ter}}$ Stufe getheilt werden kann, so ist

$$n|k = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k-2} + \cdots + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{0};$$

$$(n|k) = \binom{n-1}{k-1}.$$

Schg.

R. Hoppe. Einfachste Sätze aus der Theorie der mehrfachen Ausdehnungen. Grunert Arch. LXIV. 189-214.

In der Einleitung bezeichnet der Verfasser unser geläufiges Raumsystem von drei Dimensionen als ein instinktiv geschaffenes, zur objectiven Gestaltung der Sinnesempfindungen grade ausreichendes und nothwendiges Werk unseres Verstandes, welches durch Uebung in fertige Anschauung überging. Nur weil der

zwingende Anlass zur Einführung von mehr Dimensionen fehlte, empfinden wir wegen Mangel an Uebung Schwierigkeit im Vorstellen derselben. Ein ursprünglich begrifflicher Unterschied der verschiedenen Raumsysteme existirt jedoch nicht, wie denn auch die Formeln der analytischen Geometrie oft durch einfache Vermehrung der Coordinatenzahl auf die Geometrie eines Raumes von mehr als drei Dimensionen hinleiten. Den Nutzen solcher mehr-dimensionalen Untersuchungen findet der Verfasser unter anderm darin, dass durch dieselben die Erkenntnis des gesetzmässigen Fortschrittes von 2 zu 3 Dimensionen gefördert wird.

Während Grassmann in seiner „Linealen Ausdehnungslehre" auf synthetischem Wege in die Lehre von n Dimensionen eindringt, stellt sich Herr Hoppe durchaus auf den analytischen Standpunkt und behandelt solche Begriffe und Probleme, die sich auf dem oben angedeuteten Wege durch Verallgemeinerung aus der Geometrie ergeben, nämlich: rechtwinkliges Coordinatensystem, Entfernung zweier Punkte, Winkel zweier Geraden, Volumen des rechtwinkligen Variationsgebietes (Rechteck, rechteckige Säule), Loth aus einem gegebenen Punkte auf eine gegebene lineare „m-Dehnung" (ebene Mannigfaltigkeit m^{ter} Stufe), Transformation des m-dehnigen Volumen-Elements, Volumen des allgemeinen und regelmässigen n-dehnigen $(n+1)$-Ecks, runde $(n-1)$-Dehnungen und dadurch begrenzte n-Dehnungen (aus Kreislinie und Kreisfläche hervorgehend), endlich n-dehnige Winkel, speciell von 2, 3 und 4 Seiten.

Schg.

V. Schlegel. Ueber neuere geometrische Methoden und ihre Verwandtschaft mit der Grassmann'schen Ausdehnungslehre. Schlömilch Z. XXIV. 83-96.

Es werden der Siebeck'sche Punktcalcül, Möbius' barycentrischer Calcül, Chasles' Schnittverhältnisse, Schendel's Trilinearcoordinaten, die nichteuklidische Geometrie, Björling's Darstellung des Imaginären und Hamilton's Quaternionen zu Grassmann's Ausdehnungslehre in Beziehung gebracht.

H.

M. DE TILLY. Essai sur les principes fondamentaux de la géométrie et de la mécanique. Mém de Bord. (2) III. 1-190.

Das erste Capitel dieser Arbeit enthält eine eingehende Untersuchung der Axiome, welche zur Begründung der Riemann'schen („doppelt abstracten"), Gauss'schen („abstracten") und Euklidischen Geometrie nothwendig und hinreichend sind. Der Verfasser stellt drei Axiome auf und zeigt, dass jedes derselben unbeweisbar ist. 1) Der Abstand zweier Punkte A und B variirt stetig, wenn A nach B sich bewegt. Und wenn neben einem Punktsystem A, B, C ... ein Punkt B' so gegeben ist, dass $AB = AB'$, so giebt es Punkte, C', D', ..., die so beschaffen sind, dass $BC = B'C'$ etc. (Dieses Axiom ist also gleichbedeutend mit folgendem: Der Raum hat überall stetigen Zusammenhang und jedes Gebilde kann sich ohne Deformation überall frei in ihm bewegen). Den Abstand zweier Punkte im Raume definirt der Verfasser als eine Function ihrer 6 Coordinaten

$$(x_1 y_1 z_1), \qquad (x_2 y_2 z_2),$$

und er unterscheidet a) den idealen Abstand, welcher jeder beliebigen Function der Coordinaten entspricht, b) den analytischen Abstand, welcher den Forderungen des ersten Axioms genügt, c) den physischen Abstand (im Erfahrungsraume). Der analytische Abstand F_{12} kann nur eine von folgenden drei Formen haben:

$$F_{12} = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2},$$

$$F_{12} = \frac{A}{\pi} \operatorname{arc} \mathfrak{Cos} \frac{1-a_1a_2-b_1b_2-c_1c_2}{\sqrt{(1-a_1^2-b_1^2-c_1^2)(1-a_2^2-b_2^2-c_2^2)}}.$$

(Hierin ist A eine Constante,

$$a_1 = \mathfrak{Tg}\frac{\pi x_1}{A}, \quad a_2 = \mathfrak{Tg}\frac{\pi x_2}{A}, \quad b_1 = \mathfrak{Tg}\frac{\pi y_1}{A} \text{ etc.},$$

und alle Functionen sind hyperbolische). Die dritte Form unterscheidet sich von der zweiten nur dadurch, dass an die Stelle von A eine andere Constante D tritt, dass alle Vorzeichen rechts positiv und alle Functionen cyklische sind. Das erste Axiom gilt in allen drei Geometrien, aber die drei Arten des analytischen Abstandes entsprechen der Reihe nach der Euklidischen, Gauss'-

schen und Riemann'schen Geometrie. Es folgt die Ableitung derjenigen Begriffe und Sätze, welche nur das erste Axiom voraussetzen, also allen drei Geometrien gemeinsam sind. — 2) Der Abstand zweier Punkte hat keine obere Grenze, kann also beliebig vergrössert werden. (Hierdurch wird also die Unendlichkeit des Raumes ausgesprochen). Durch Einführung dieses Axioms wird die Riemann'sche Geometrie ausgeschlossen, und es folgen nun diejenigen Begriffe und Sätze, welche auf diesem zweiten Axiome beruhen, also der Gauss'schen und Euklidischen Geometrie gemeinsam sind. Darunter finden sich auch die Sätze: „Ein System von Punkten in unveränderlicher gegenseitiger Lage lässt sich um zwei feste Punkte, die ihm angehören, bewegen." und: „Bei dieser Bewegung beschreiben alle Punkte des Systems geschlossene Linien und vollenden in derselben Zeit eine ganze Umdrehung," Sätze, welche bei Helmholtz zusammen als viertes Axiom auftreten. — Es wird dabei stets auf die abweichenden Sätze der doppelt-abstracten Geometrie Rücksicht genommen. — 3) Durch einen Punkt kann man zu einer Geraden nur eine Parallele ziehen. Durch Einführung dieses Axioms wird auch die Gauss'sche Geometrie ausgeschlossen, indem in der Riemann'schen keine, in der Gauss'schen unendlich viele Parallelen möglich sind.

Im zweiten Capitel werden die Veränderungen angegeben, welche verschiedene Abschnitte des Lehrbuchs der Geometrie von Rouché und Camberousse unter Zugrundelegung jener drei Axiome zu erleiden haben, unter beständiger Berücksichtigung der abweichenden Resultate in den andern beiden Geometrien.

Das dritte Capitel enthält die Sätze der gewöhnlichen, das vierte die der allgemeinen Trigonometrie, d. h. die Sätze und Formeln, welche nur das erste Axiom voraussetzen. Ausserdem werden einzelne Probleme in allen drei Arten der Trigonometrie durchgeführt. Die doppelt abstracte Trigonometrie fällt hiernach mit der sphärischen zusammen. Das letzte Capitel bringt die Hauptsätze der Mechanik, im Anschluss an das Lehrbuch von Gilbert, ohne bemerkenswerthe Neuerungen. Schg.

R. S. Ball. The non-euclidean geometry. Herm. VI. 500-541.

In dieser Arbeit wird eine elementare Uebersicht über die Nicht-Euklidische Geometrie von Gauss, Cayley und Klein gegeben. Die benutzten Methoden sind fast durchweg rein geometrisch. Die Arbeit beginnt mit der Definition, dass die Entfernung zwischen zwei Punkten gleich sei c Mal dem Logarithmus des anharmonischen Verhältnisses, in welches die die beiden Punkte verbindende Linie durch den fundamentalen Kegelschnitt getheilt wird. Daraus ergiebt sich, dass der Kreis ein Kegelschnitt sein muss, welcher doppelte Berührung mit dem fundamentalen Kegelschnitt hat, während der Mittelpunkt des Kreises der Pol der Berührungssehne ist. Es ist ferner bekannt, dass jede Verrückung der Ebene in sich selbst hervorgebracht werden kann durch eine Drehung der Ebene um einen gewissen Punkt in der Ebene. Der Winkel zwischen zwei Linien ist proportional dem Logarithmus des anharmonischen Verhältnisses des Büschels, welches von den zwei Strahlen des Winkels und den zwei Tangenten von ihrem Schnittpunkt an den Fundamentalkegelschnitt gebildet wird. Ein rechter Winkel wird durch die Bemerkung definirt, dass, wenn zwei entsprechende Strahlen eines anharmonischen Büschels den Fundamentalkegelschnitt berühren, dann die zwei andern Strahlen sich unter rechten Winkeln schneiden. Es ist auch bekannt, dass es bei der Verrückung eines starren Systems zwei gerade Linien giebt, welche unverändert bleiben und diese Linien conjugirte Polaren in Bezug auf den fundamentalen Kegelschnitt sind.

Eine Drillung (twist) besteht aus einem Paar Rotationen um conjugirte Polare. Die Zusammensetzung zweier Drillungen wird untersucht. Das Paar gemeinsamer Transversalen, welche die beiden Paare conjugirter Polaren schneiden, hat zwei kritische Punkte, welche durch jede der Drillungen in derselben Richtung entstehen. Aus dieser Eigenschaft der kritischen Punkte kann die Zusammensetzung der Drillungen leicht hergeleitet werden. Zwei Linien sind parallel, wenn sie dasselbe Paar erzeugender Linien des fundamentalen Kegelschnitts schneiden. Daran schliesst

sich eine Besprechung des merkwürdigen Satzes von Clifford über eine Drillung auf einer Schraube, deren Ganghöhe die Einheit ist.

Csy. (O.)

Th. Craig. Note on the projection of the general locus of space of four dimensions into space of three dimensions. Am. J. II. 252-260.

Sind x, y, z, t unabhängige Variable, so ist $F(x, y, z, t) = 0$ die Gleichung einer M_3 (dreidimensionaler Raum) in einer ebenen M_4. Speciell ist $\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta t+\varepsilon = 0$ die Gleichung einer ebenen M_3 (euklidischer Raum). Zwei Gleichungen mit 4 Variablen, $F = 0$ und $\Phi = 0$, stellen zusammen die Oberfläche dar, welche den durch die einzelnen Gleichungen dargestellten M_3 gemeinsam ist. Diese Oberfläche wird nun vom Verfasser in der Weise auf dem euklidischen Raume abgebildet, dass die kleinsten Theile einander ähnlich bleiben. Es wird das System der Bedingungsgleichungen dieser Abbildung entwickelt und zum Schluss die erweiterte Aufgabe behandelt, den Schnitt zweier M_{n-1}, welche in einer ebenen M_n liegen, auf einer ebenen M_{n-1} abzubilden.

Schg.

G. B. Halsted. Addenda to bibliography of hyper-space and non-euclidean geometry. Am. J. II. 65-70.

Weitere Ergänzungen zu der Arbeit, über die F. d. M. X. 1878. p. 343 berichtet worden ist.

O.

F. W. E. A. Kettner. Beschouwingen over de theorie der evenwijdige lijnen als grondslag der meetkunde. Diss. Leiden.

Die bekannte und schon so viel besprochene Theorie der Parallelen wird auch in dieser Dissertation behandelt. Dieselbe beginnt mit einer geschichtlichen Notiz über die Schwierigkeiten, welche das XI. Axiom des Euklid verursacht hat; sodann werden

im ersten Capitel einige Grundsätze, die sich auf die Ebene beziehen, discutirt, und gezeigt, wie das genannte Axiom mit dem Satze, dass die Summe der Winkel eines Dreiecks $2R$ beträgt, in Verbindung steht. Im zweiten Capitel werden zwei Fälle besprochen, welche früher von Legendre, und später auch von Lobatschewsky behandelt sind: 1) In keinem Dreiecke kann die Summe der Winkel grösser sein als $2R$; 2) wenn nur in einem Dreiecke die Summe gleich $2R$ ist, so ist dieses in jedem Dreiecke der Fall. Das dritte Capitel kehrt zum Axiom des Euklid zurück; alle Beweise, welche von früheren Mathematikern gegeben sind, besonders der von Legendre gegebene, werden geprüft und unzureichend gefunden, so dass sich zeigt, dass man auf diesem Wege nichts erreicht hat. Im vierten und letzten Capitel werden die neuesten Untersuchungen mit grosser Ausführlichkeit vorgeführt, und es wird gezeigt, wie auch die neuesten Beweise von Bertrand, J. C. Becker und Carton nicht ausreichen, um in ganzer Strenge den Satz der Parallelen zu begründen. Ueber diesen Gegenstand ist der Verfasser mit Herrn Baltzer in Correspondenz getreten und theilt aus derselben einiges mit. Schliesslich kommt er zu dem Resultate, dass das XI. Axiom Euklid's nicht bewiesen ist und auch nicht bewiesen werden kann ohne eine Hypothese anzuwenden, welche mit dem zu beweisenden Satze gleichwerthig ist.

G.

V. de Rossi Re. Dimostrazione del quinto postulato di Euclide. Acc. P. N. L. XXXI. 461-473.

Es werden 22 Sätze (incl. Erklärungen), die sich auf einander stützen, nebst Beweisen (oder Citaten von Euklid) aufgestellt. Der letzte als Resultat ist der Euklid'sche Parallelensatz. Der entscheidende Fehler liegt im Beweise zum 10ten Satz, wo von einem anfänglich spitzen, mit seiner Lage variirend gedachten Winkel als selbstverständlich ausgesagt wird, dass, wenn er irgend einmal stumpf werden sollte, eine Lage die erste sein müsste, in der dies stattfände. Im Gegentheil gehen jeder solchen Lage immer andere voraus, die in gleichem Falle sind.

H.

A. GENOCCHI. Dimostrazione del quinto postulato di Euclide. Nota del Prof. Vincenzo de Rossi Re estratto dagli Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei. XXXI. Boncompagni Bull. XII. 812.

Nachweis eines Fehlers, der sich in dem Beweise der No. XIV. der obigen Arbeit befindet. O.

TH. DUDA. Die fundamentalen Lehrsätze von der Geraden und der Ebene mit Rücksicht auf die Zwecke des Unterrichts, methodisch entwickelt. Pr. Brieg.

Der Verfasser kritisirt zuerst die Definitionen der Geraden, dann der Ebene. Die bemerkten Mängel bestehen grösstentheils darin, dass mit der Begriffsbegrenzung nicht zugleich die Möglichkeit und die positive Vorstellung gegeben werde. Dass alles dies in einem Satze enthalten sein müsse, ist der nachherigen Bearbeitung zufolge nicht seine Meinung. Letztere sucht mit Festhaltung der Strenge eine grössere Gründlichkeit, macht sich aber frei von der Euklidischen Form und der Beschränkung auf die einfachen planimetrischen Begriffe, indem sie vom Raume ausgeht und von der Bewegung ausgedehnte Anwendung macht. Sie beginnt mit einer philosophischen Entwickelung der Grundbegriffe, die der Verfasser wohl nur dann für fähig halten konnte von Schülern verstanden zu werden, wenn ihm die von Grund aus verfehlte Kant'sche Auffassung angeborenes Eigenthum jedes menschlichen Geistes zu sein schien. Dieser Theil der Schrift charakterisirt jedoch das übrige nicht, welches sich in manchen Punkten durch richtigen Blick und umsichtige Logik auszeichnet. Dass er den Begriff der Starrheit der Gebilde gleich anfangs an's Licht zieht und weiterhin zu Grunde legt, zeigt richtige Beobachtung; nur ist es eine Täuschung, wenn er denselben als apriorisch betrachtet und mit einer Definition erledigen will. Zuerst erklärungsfähig wird nun die Kugelfläche genannt. Durch Bewegung einer in 2 Punkten festen starren Linie gelangt er als Grenze zur Geraden und deren Fundamentaleigenschaften,

durch den Schnitt zweier Kugelflächen zum Kreise. Der Winkel wird als Linienfigur erklärt, hiervon einige Anwendungen, insbesondere auf die Kegelfläche, gemacht. Dann folgen die Fundamentalsätze von der Ebene, deren letzter, der Euklidische Parallelensatz, einen vielleicht neuen, aber falschen Beweis erhält. Der Beweis ist richtig bis zur Schlussfolgerung, aus der, auf die Hyperbel und Asymptote geschnitten von der Axe angewandt, hervorgehen würde, dass erstere sich treffen müssen. H.

H. Noth. Die vier Species in den Elementen der Geometrie. Pr. Freiberg 1874 u. 1879.

Der Verfasser sucht in diesen beiden Abhandlungen die Principien der Grassmann'schen Ausdehnungslehre für die Geometrie der Lage fruchtbar zu machen. Zu diesem Zwecke bedient er sich einer abgekürzten Bezeichnung, die auf folgender Erwägung beruht. Jeder Punkt X einer Ebene lässt sich (nach Grassmann) mittelst der reellen Zahlen α, β, γ durch drei feste Punkte A, B, C bestimmen, so dass $X = \alpha A+\beta B+\gamma C$ ist. Jede auf dieser Bezeichnung beruhende Formel drückt aber, ausser der Lagenbeziehung der Gebilde, vermöge der Zahlen α, β, γ noch eine Massbeziehung aus, welche für die Geometrie der Lage als überflüssige Zuthat erscheint. Herr Noth bezeichnet nun einen beliebigen im Dreieck ABC liegenden Punkt durch $X = A+B+C$ und leitet dann alle Punkte der Ebene aus A, B und C mittelst ganzer Zahlen, (a, b, c) ab, wobei er für $X = aA+bB+cC$ abgekürzt $X = |a\ b\ c|$ schreibt. Hierdurch wird neben der Vereinfachung der Formeln erstens erreicht, dass sich die geometrischen Grundgebilde ohne Anwendung metrischer Relationen durch Zahlen und ihre Beziehungen durch Zahlformeln darstellen lassen, wodurch das Princip der Dualität zur vollen Geltung gelangt. Dann aber geht aus diesem Formalismus auch eine sehr beachtenswerthe geometrische Darstellung zahlentheoretischer Sätze hervor. Die Grundlage des Ganzen bildet hiernach die Möbius'sche Lehre von den geometrischen Netzen; Herr Noth findet aber durch Aufstellung des für diese Lehre geeignetsten analytischen Formalis-

mus das Mittel, diese Lehre in allen ihren Consequenzen auszubilden. Sehr fruchtbar erweist sich der Begriff des „numerischen Productes" und der „numerischen Potenz" von Punkten und Geraden, während freilich für diese Begriffe ein anderer Name zu wünschen wäre, da die Bezeichnung „numerisches Product von Punkten" mit noch grösserem Rechte auf das von Siebeck aufgestellte Punktproduct (Crelle's J. LV. p. 221 ff.) anzuwenden ist.

Die erste Abhandlung enthält (zum Theil in Anlehnung an Staudt und Hankel) die formalen Gesetze der 4 Species, dann die besonderen Gesetze für die Addition und Subtraction geometrischer Gebilde, wobei allerdings auch Summe und Differenz in der Geometrie des Masses behandelt werden. Die zweite Abhandlung beschäftigt sich ausschliesslich mit der Geometrie der Lage. Hierin werden die Begriffe der projectivischen Summe und des projectivischen Productes von Punkten und Geraden in der Ebene erörtert, worauf eine ausführliche Theorie der geometrischen Netze folgt. Im Anschluss an die Begriffe des numerischen Productes und der numerischen Potenz werden dann Punktreihen und Strahlenbüschel erster und zweiter Ordnung betrachtet. Den Schluss bildet eine Erweiterung der vorgetragenen Theorie auf die geometrischen Netze in der Ecke und im Raume.

Schg.

Capitel 2.

Continuitätsbetrachtungen (Analysis situs).

S. Kantor. Ueber eine Gattung von Configurationen in der Ebene und im Raume. Wien. Ber. 1879. 227.

Versteht man unter einer ebenen Configuration eine derartige Anordnung von Punkten und Geraden, dass jede der Geraden eine bestimmte Anzahl (m) von Punkten, jeder der Punkte eine be-

stimmte Anzahl (n) von Geraden enthält, so lassen sich solche Configurationen für jedes beliebige Werthepaar von $m(>2)$ und $n(>2)$ angeben. Diese Configurationen lassen sich auch auf höhere Mannigfaltigkeiten übertragen.

Schg.

P. G. Tait. On the measurement of beknottedness. Proc. of Edinb. 1879. 48-58.

Gegenstand der Arbeit ist die Beschreibung einer Methode, welche, während sie wenigstens theilweise gewisse Einwendungen gegen die früher vom Verfasser zur Messung von Verknotungen angewandte Methode verringert, einige der wichtigsten Vorgänge für die Behandlung von Knoten vereinfacht. Der Verfasser bemerkt, dass diese neue Methode den Zusammenhang der Frage mit der elektrodynamischen Theorie sehr viel klarer macht.

Cly. (O.)

R. Hoppe. Gleichung der Curve eines Bandes mit unauflösbarem Knoten nebst Auflösung in vierter Dimension. Grunert Arch. LXIV. 224.

Die Gleichungen

$$x = \tfrac{1}{2}\cos u[3\cos u(1+\cos t)+3+\cos t]F(t),$$
$$y = \tfrac{1}{2}\sin u[5\cos u(1+\cos t)+1-\cos t]F(t),$$
$$z = \tfrac{1}{2}\sin u(25\cos^2 u-1)(1+\cos t)F(t),$$
$$w = u\sin t\,F(t)$$

drücken eine mit der Zeit t variirende Curve im Raume von vier Dimensionen aus, welche für $t=0$ in eine geschlossene Raumcurve mit unauflösbarem Knoten, für $t=2R$ in einen ebenen Kreis übergeht. Die erstere Curve lässt sich also durch stetige Aenderung von $t=0$ bis $t=2R$ in die letztere überführen (d. h. der Knoten wird aufgelöst), sobald man den Uebergang durch den vierdimensionalen Raum zulässt.

Schg.

E. Hess. Combinationsgestalten höherer Art. Marb. Ber. 1879. 99-103.

Der Verfasser giebt einige Beispiele von gleicheckigen Polyedern höherer Art aus der Oktaeder-Hexaeder-Gruppe. Die Methoden der Herleitung entwickelte der Verfasser in seiner Schrift „Ueber die zugleich gleicheckigen und gleichflächigen Polyeder“ (Cassel 1876), worüber im 8ten Bande dieses Jahrbuchs p. 339—342 ausführlich referirt ist. Scht.

E. Hess. Vergleichung der Volumina verschiedener Gruppen von Polyedern, deren Oberfläche denselben Werth hat. Marb. Ber. 1879. 103-111.

Ist P der Umfang, F die Fläche eines regulären n-Ecks, so ergiebt sich

$$F = \lambda . P^2,$$

wo

$$\lambda = \frac{1}{4n . tg\frac{\pi}{n}}$$

bei wachsendem n wächst, und für $n = \infty$ den Werth $\frac{1}{4\pi}$ erhält. Analog kann man, wenn U die Oberfläche eines Polyeders, V sein Volumen bedeutet,

$$V = U^{\frac{3}{2}} . \lambda$$

setzen. Dann ist λ eine absolute Zahl. Der Verfasser berechnet dieselbe für die fünf regulären Polyeder, für die geraden Prismen mit regulären Endflächen, für die geraden Doppelpyramiden mit regulärer Basis und für einige gleichflächige Polyeder aus der Hexaeder-Oktaeder-Gruppe. Am Schluss macht Herr Hess darauf aufmerksam, dass unter allen Polyedern, welche aneinander gefügt lückenlos den Raum zu erfüllen vermögen, das Rhombendodekaeder bei gleicher Oberfläche das grösste Volumen besitzt, ein Resultat, welches der Verfasser mit der rhombendodekaedrischen Form der Bienenzellen in Zusammenhang zu bringen geneigt scheint. Scht.

H. Schubert. Constantenzahl eines Polyeders und der Euler'sche Satz. Grunert Arch. LXIII. 93-100.

Die Constantenzahl c eines Polyeders, welches e Ecken und nur Dreiecke als Grenzflächen besitzt, ist natürlich gleich $3e$. Ist das Polyeder allgemein, so zerlege man jede Fläche in Dreiecke. Hat man zu dieser Zerlegung d Diagonalen nöthig, so ist $c = 3e - d$, weil dann das Polyeder als ein Dreiecks-Polyeder mit d Neigungswinkeln gleich 180° aufgefasst werden kann. Entstehen durch die Zerlegung im ganzen δ Dreiecke, so ist einerseits $\delta = d + f$, weil bei jeder Fläche ein Dreieck mehr entsteht, als Diagonalen gezogen werden müssen, andererseits

$$3\delta = 2k + 2d,$$

weil jedes Dreieck drei Seiten hat, von denen jede entweder zweimal als Kante oder zweimal als Diagonale auftritt. Demnach ergiebt sich die Constantenzahl

$$c = 3e + 3f - 2k.$$

Andererseits bestimmt der Verfasser, indem er das Polyeder aus gegebenen Stücken direct zu construiren sucht:

$$\begin{aligned} c &= 2(k+d) - 3e + 6 - d + 6 \\ &= 4k - 3e - 3f + 12. \end{aligned}$$

Aus den beiden Werthen für c ergiebt sich einerseits der Euler'sche Lehrsatz, andererseits, dass die Constantenzahl eines Polyeders gleich $k+6$ ist. Demnach ist ein allgemeines Polyeder, abgesehen von seiner Lage, durch genau so viele einfache Bedingungen bestimmt, wie es Kanten besitzt. Letzteres bemerkte zuerst Herr R. Hoppe (Grun. Arch. LV., s. F. d. M. V. 1873. p. 298.)

Scht.

R. Hoppe. Ergänzung des Euler'schen Satzes von den Polyedern. Grunert Arch. LXIII. 100-103.

Für den Euler'schen Satz giebt der Verfasser einen Beweis, aus dem zugleich die Bedingung seiner Geltung erhellt. Diese Bedingung ist bekanntlich die, dass das Polyeder ein einfach zu-

sammenhängendes Netz hat, welches auf einer Kugelfläche so abgebildet werden kann, dass dieselbe vollständig und überall nur einfach bedeckt wird. Wird diese Bedingung nicht erfüllt, so treten zu der Euler'schen Gleichung Ergänzungsglieder hinzu, welche der Verfasser aufsucht. Es ist nämlich:

$$f+e = k+2+h+2g-2c,$$

wo f die Zahl der Flächen, e die Zahl der Ecken, k die der Kanten bezeichnet, wo ferner h angiebt, wie viel Durchbrechungen von Flächen, die nicht Mündungen von Canälen sind, vorkommen, g, wie viel leere Räume vorhanden sind, und c endlich die Anzahl aller Canäle ist, sowohl der leeren im vollen Körper, wie auch der vollen im leeren Raume. (Dass Herr Hoppe sowohl für die ein Polyeder begrenzenden Ebenen (Flächen), wie auch für die diese Ebenen begrenzenden Strecken ein und dasselbe Wort „Seite“ gebraucht, ist nicht geeignet die Deutlichkeit zu erhöhen.) Scht.

E. Hess. Ueber einige einfache Polyeder mit einseitiger Oberfläche. Marb. Ber. 1879. 1-7.

Polyeder mit einseitiger Oberfläche oder Möbius'sche Polyeder sind solche, deren Oberfläche sowohl durch die Aussenseite als auch durch die Innenseite jeder Grenzfläche gebildet wird, bei denen man also auf der Oberfläche fortgehend auf die entgegengesetzte Seite der Fläche, von welcher man ausging, gelangen kann, ohne auf diesem Wege jemals eine Fläche zu durchbrechen. Unter den Polyedern, welche dieser Bedingung genügen, giebt es auch solche, welche entweder nur gleicheckig oder nur gleichflächig sind. Der Verfasser, welcher bei seinen Untersuchungen über gleicheckige und gleichflächige Polyeder höherer Art (siehe F. d. M. VIII. 1876. 339, IX. 1877. 414, X. 1878. 346) alle Polyeder aufgefunden hat, welche die beiden genannten Bedingungen zugleich erfüllen, beschreibt hier zunächst zwei solche Polyeder. Das erste dieser beiden Polyeder, welches zwölf gleiche, nicht convexe Vierecke als Grenzflächen hat, wird erhalten, wenn man die zwölf gleichen Grenzflächen eines Trigondo-

dekaeders oder Pyramidentetraeders so erweitert, dass je vier in Beziehung auf eine der sechs Tetraederkanten gleichartig liegende Flächen sich in einem Punkte schneiden. Das zweite Polyeder entspricht dem ersten polar. Scht.

E. Hess. Ueber ein Problem der Katoptrik. Marb. Ber. 1879 7-20.

Die Zahl der Bilder eines leuchtenden Punktes, der innerhalb des Winkels α zweier spiegelnden Ebenen sich befindet, ist für den allgemeinen Fall zuerst von H. Klein (Pogg. Ann. CLII. 506-512, F. d. M. VI. 1874. 668) bestimmt worden. Am einfachsten erhält man diese Zahl in folgender Weise. Die Verbindungsebene des leuchtenden Punktes mit der Schnittlinie der beiden Spiegel theile α in die beiden Theile φ und φ', so dass $\varphi+\varphi' = \alpha$ ist. Man bestimme aus φ und φ' die ganzen Zahlen x und x' durch die folgenden Ungleichungen:

$$\frac{180^\circ-\varphi}{\alpha} \leqq x < \frac{180^\circ-\varphi}{\alpha}+1,$$
$$\frac{180^\circ-\varphi'}{\alpha} \leqq x' < \frac{180^\circ-\varphi'}{\alpha}+1.$$

Dann ist immer $x+x'$ die Zahl der Bilder. Wenn $\frac{360^\circ}{\alpha}$ eine grade Zahl ist, so fallen immer die beiden im Scheitelwinkel des Spiegelwinkels liegenden Bilder zusammen. Ist $\frac{360^\circ}{\alpha}$ eine ungrade Zahl $2n+1$, so giebt es $2n$ Bilder, wenn $\varphi = \varphi' = \frac{\alpha}{2}$ ist, sonst $2n+1$ Bilder. In allen sonstigen Fällen ergiebt sich für die Anzahl der Bilder die kleinere oder die grössere der beiden ganzen Zahlen, welche $\frac{360^\circ}{\alpha}$ am nächsten sind, je nach der Lage des leuchtenden Punktes zwischen den beiden Spiegeln.

Nach einigen Bemerkungen über die Anordnung der so entstehenden Bilder behandelt Herr Hess die einfachsten Fälle der bis dahin noch nicht in Angriff genommenen Aufgabe, die Lage und Anzahl der Bilder eines Punktes zu bestimmen, der

sich innerhalb einer drei- oder mehrflächigen Ecke befindet, deren Innenseiten Spiegel sind. Natürlich liegen hier der leuchtende Punkt nebst allen seinen Spiegelbildern auf einer Kugelfläche, deren Centrum der Scheitel der Ecke ist. Dass man eine endliche Anzahl von Bildern erhält, folgt daraus, dass Strahlen, welche nach einer Reflexion von einem Punkte herzukommen scheinen, der in der Scheitelecke der Spiegelecke liegt, keinen Spiegel mehr treffen, also nicht noch einmal reflectirt werden können. Wenn die Spiegel auf der um den Scheitel der Ecke durch den leuchtenden Punkt construirten Kugelfläche ein sphärisches Polygon bilden, welches vermöge seiner direct symmetrischen oder congruenten Wiederholungen ein zusammenhängendes, die Kugelfläche einmal bedeckendes Netz liefert, und welches in der Kugelfläche $k$mal enthalten ist, so entstehen $k-1$ Bilder, welche mit dem leuchtenden Punkte zusammen die Eckpunkte eines gleicheckigen und in besonderen Fällen eines regulären Polyeders darstellen. Hiernach zählt der Verfasser 22 Fälle auf, von welchen wir beispielsweise hervorheben:

1. Haben drei Spiegel die Neigungswinkel 120°, 60°, 60°, und liegt der leuchtende Punkt mitten zwischen den Spiegeln, die unter 120° geneigt sind, so bilden er und seine 11 Bilder die 12 Eckpunkte eines (4 + 4)-flächigen Tetraeders mit abgestumpften Ecken.

2. Haben drei Spiegel die Neigungswinkel 90°, 60°, 36°, so bilden der leuchtende Punkt und seine 119 Bilder die 120 Ecken eines (12 + 20 + 30)-flächigen (2 + 60)-Ecks.

3. Haben drei Spiegel die Neigungswinkel sämmtlich gleich 72°, so bilden der in der Mitte liegende leuchtende Punkt und seine 19 Bilder die Ecken des regulären Dodekaeders.

4. Haben fünf Spiegel die Neigungswinkel sämmtlich gleich 120°, so bilden der in der Mitte liegende leuchtende Punkt und seine 11 Bilder die Ecken eines regulären Ikosaeders.

Scht.

Capitel 3.

Elementare Geometrie (Planimetrie, Trigonometrie, Stereometrie).

K. F. Junghans. Lehrbuch der ebenen Geometrie. 2 Theile. Berlin. Weidmann.

Dasselbe soll dem Schüler eine ausführliche und correcte Darstellung für die häusliche Repetition bieten; Paragraphencitate sind vermieden, der Ausdruck deutlich und präcis. Der zweite Theil enthält die Anwendungen, eine Auswahl von Sätzen der neueren Geometrie, die algebraische Geometrie und eine grosse Zahl geometrischer und algebraischer Analysen, die zur Erlangung der nöthigen Fertigkeit im Lösen von Aufgaben dienen sollen.

T.

O. Henrici. Elementary geometry of congruent figures. London. Longmans, Green and Co. 18°.

V. Schlegel. Verallgemeinerung eines geometrischen Paradoxons. Schlömilch Z. XXIV. 123-128.

Eine bekannte scheinbare Verwandlung des Quadrats 8.8 in das Rechteck 5.13 wird hier auf gesuchte Zahlen a, b (für 3, 5) übertragen, welche dann der Gleichung

$$(a+b)^2 \pm 1 = b(a+2b)$$

zu genügen haben. Es ergeben sich für a und b je zwei successive Glieder der Reihe

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ \ldots$$

recurrent bestimmt durch

$$a_k + a_{k+1} = a_{k+2} = b_{k+1}.$$

Eigenschaften der Reihe sind: 1) Ihre Differenzenreihen sind alle gleich; sie ist also arithmetische Reihe der Ordnung ∞; 2) $5a^2 \pm$ ·

ist ein Quadrat; 3) $\mp 4ab$ lässt sich in 3 Quadrate, eins subtractiv, zerlegen; 4) ist p Primzahl, so ist das p^{te} Glied durch kein anderes theilbar; 5) nimmt man u, v statt λ, 1 zu Anfangsgliedern, so reducirt sich das neue allgemeine Glied auf das ursprüngliche; 6) die Grenze des Verhältnisses $b:a$ ist der goldene Schnitt. Schliesslich werden bei Untersuchung der independenten Bestimmung noch mehrere Relationen entwickelt.

H.

T. Mitcheson, C. K. Pillai. Solutions of a question (5684). Educ. Times XXXII. 27-28.

In dem Dreieck ABC seien AD, BE, CF die Lothe auf die gegenüberliegenden Seiten und O ihr Schnittpunkt. Die Punkte G und H liegen so auf AB und AC, dass $BH = BA$, $CG = CA$. HK, GK ferner seien parallel ED und FD; CG und DF endlich schneiden sich in M, BH und DE in N. Dann liegen je die Punkte B, G, O, H, C, K; O, M, D, C, E; O, N, D, B, F auf einem Kreise. Ferner ist: $AD.DO = BD.DC$. Dies wird nebst anderen Sätzen derselben Art bewiesen.

O.

A. Schlosser. Geometrische Untersuchungen (I. Theil) mit Compass für Anfänger in der Mathematik sammt Gebrauchs-Anweisung als Beigabe. Pr. Eichstädt.

Die geometrischen Untersuchungen erstrecken sich mit Weitläufigkeit auf die Theildreiecke, Seitenabschnitte, Winkel und dergleichen mehr, welche durch die Ecktransversalen eines Dreiecks und Vierecks gebildet werden. Als Anhang ist ein Compass für den Anfänger beigegeben (zu seiner Orientirung auf dem Oceane von Wahrheiten, dem er durch das Studium der Mathematik zusteuern will), mit andern Worten ein kurzer Leitfaden für die ersten algebraischen Rechnungen.

Schl.

E. Cavalli. Una proprietà baricentrica del triangolo. Riv. scient. ind. 1879. 134-140.

J. E. Hendricks. Demonstration of a proposition. Analyst VI. 83-84.

Beweis des Satzes: Wenn ein Parallelogramm durch eine gerade Linie in zwei Trapeze getheilt wird, und eine gerade Linie durch die Schnittpunkte der Diagonalen dieser Trapeze gezogen wird, so wird das Parallelogramm halbirt.

Glr. (O.)

E. Haerens. Solution d'une question (498). N. C. M. V. 412-416.

In jedem Dreieck ist die Entfernung des Mittelpunktes des eingeschriebenen Kreises von dem eines umschriebenen Kreises gleich zwei Mal der mittleren Proportionalen zwischen der Differenz ihrer Radien und dem Radius des umschriebenen Kreises.

Mn. (O.)

T. Mitcheson, G. Turriff. Solutions of a question (5924). Educ. Times XXXI. 84-85.

Man theile einen Kreis durch Radien in zwölf gleiche Theile, fälle von einem der Theilpunkte ein Loth auf den nächsten Radius, vom Fusspunkt desselben ein Loth auf den folgenden u. s. f. in infinitum. Die Summe dieser Lothe ist dann gleich dem Durchmesser des Kreises vermehrt um die Seite des eingeschriebenen gleichseitigen Dreiecks.

O.

E. Hain. Die Radicalaxen der wichtigsten Symmetriekreise des Dreiecks. Grunert Arch. LXIII. 401-403.

Die Radicalaxe des Feuerbach'schen und des eingeschriebenen Kreises ist zugleich die Harmonikale des Höhenpunktes.

Schl.

N. von Lorenz. Ueber einige Sätze aus dem Gebiet der Dreieckslehre. Grunert Arch. LXIII. 294-310.

N. von Lorenz. Ueber eine Reihe von neuen Dreiecksproblemen. Grunert Arch. LXIV. 253-267.

In dem ersten Aufsatze werden die zum Theil bekannten metrischen Beziehungen zwischen den Seiten eines Dreiecks und den oberen Abschnitten der Höhen und der Winkelhalbirenden, zwischen den Radien des um- und eingeschriebenen Kreises und den Abständen des Höhenpunktes von den Mittelpunkten der beiden Kreise u. s. w. durch Rechnung, nicht immer auf dem einfachsten Wege, hergeleitet. Am Schlusse wird die cubische Gleichung aufgestellt, deren Wurzeln die drei Seiten des Dreiecks sind. Ihre Coefficienten sind von drei Grössen r, s, t abhängig, von denen die beiden ersten die Radien der beiden Kreise und die dritte die Potenz des Höhenpunktes in Bezug auf den Feuerbach'schen Kreis ist. In der zweiten Arbeit werden mit Hülfe derselben Grössen r, s, t noch vier andere cubische Gleichungen für die Höhen, ihre oberen und unteren Abschnitte und die oberen Abschnitte der Winkelhalbirenden aufgestellt. Werden nun von den funfzehn Coefficienten dieser fünf Gleichungen drei beliebige ausgewählt, so lassen sich zunächst r, s, t und dadurch auch die übrigen Coefficienten berechnen. Der Verfasser hat schematisch diejenigen Combinationen von je drei Coefficienten zusammengestellt, welche bei der Berechnung von r, s, t auf Gleichungen vom ersten oder zweiten oder höheren Grade führen, und giebt am Schlusse mehrere Beispiele. Schl.

M. Pokorný. Ueber das Sehnenviereck. Casopis VIII. 133-134. (Böhmisch).

Enthält einen einfachen Beweis des bekannten Theorems. Std.

K. Schwering. Neues elementares Schliessungsproblem. Schlömilch Z. XXIV. 344.

Es sollen die Bedingungen festgestellt werden, unter denen eine Reihe von Kreisen, deren jeder seine beiden Nachbarn und zwei in der Ebene gegebene feste Kreise berührt, geschlossen sein wird. M.

H. M. TAYLOR. Note on Euclid II. 12, 13. Messenger (2) IX. 122-123.

Die Note enthält eine Methode, um Euklid I. 47 und II. 12, 13 aus der Proportionalität der Seiten in ähnlichen Dreiecken zu beweisen. Glr. (O.)

M. L. COMSTOCK. Note. Analyst VI. 54-55.

Zwei Beweise für Euklid I. 47. Glr. (O.)

TH. SINRAM. Vierter Pythagoräischer Lehrsatz. Grunert Arch. LXIII. 108.

Die Höhe des rechtwinkligen Dreiecks ist die vierte Proportionale zu der Hypotenuse und den beiden Katheten.

Schl.

SCHLOSSER. Vom Studirtische. Bayr. Bl. XV. 452.

Bekanntes über Vielecksschnittverhältnisse. Gr.

J. PETERSEN. Methoden und Theorien zur Auflösung geometrischer Constructionsaufgaben, angewandt auf etwa 400 Aufgaben. Uebersetzt in's Deutsche von R. von Fischer-Benzon; in's Englische von S. Hagener; in's Französische von O. Chemin. Kopenhagen, A. F. Höst und Sohn.

Um die Auflösung der Constructionsaufgaben, welche bisher von vielen als eine Art Räthselrathen angesehen wurde, gewissen Gesetzen des Nachdenkens zu unterwerfen, hat der Herr Ver-

fasser eine grosse Menge von solchen Aufgaben gelöst und die Gedankenbewegung, welche zur Idee der Lösung führte, analysirt, um auf diese Weise mehr oder weniger allgemeine Methoden zu gewinnen. Diese Methoden und Theorien sind in dänischer Sprache bereits im Jahre 1866 veröffentlicht und liegen jetzt in deutscher, französischer und englischer Uebersetzung vor. Die Eintheilung des Buches ist folgende: I. Geometrische Oerter, und zwar A. für Punkte, B. für Linien; II. Umformung der Figur, A. Parallelverschiebung, B. Umlegung, Drehung um eine Axe; III. die Drehungstheorie. Zusätze: Ueber den Durchschnitt von Kreisbogen; Ueber Systeme von Kreisen; Ueber die Möglichkeit, eine gegebene Aufgabe mit Hülfe von Zirkel und Lineal zu lösen. Da die Darstellung der Methode dem Herrn Verfasser die Hauptsache ist, so sind die Lösungen oft nur angedeutet, und ist ihre Entwickelung dem Leser überlassen. Wie fruchtbar diese Methoden sind, zeigen die Auflösungen mehrerer Aufgaben (darunter das Malfatti'sche Problem), welche bisher meist unter Anwendung der neueren Geometrie ausgeführt wurden. M.

Weitere Lehrsätze und Lösungen von Aufgaben über Dreieck, Viereck und Polygone von C. de Polignac, J. Young, M. Brierley, C. Anthony, R. E. Riley, J. O'Regan, W. J. Macdonald, Donald, D. Mac Alister, H. L. Orchard, J. L. Kitchin, E. Rutter, G. H. Hopkins, Evans, E. B. Seitz, R. Tucker, C. Swift, J. C. Glashan, E. J. Lawrence, Cochez, W. J. C. Miller, Ch. Ladd, Morel, T. Mitcheson, J. F. A. Steggall, E. B. Elliott, F. D. Thomson, J. J. Sides, R. Knowles, Lez, Robaglia, Cottereau, A. Leinchugel, F. Pisani finden sich Educ. Times XXXI. 40-43, 53, 56, 65, 73-74, 80, 82, 85-86, 88-90, 92, 99; XXXII. 30-31, 34, 37-39, 60-61, 80, 89-90; Nouv. Ann. (2) XVIII. 112, 113, 114, 172-173, 309, 311-315, 368-369, 427-428

O.

Weitere Lehrsätze und Lösungen von Aufgaben über den Kreis von G. TURRIFF, W. A. MACDONALD, CLIFFORD, R. F. DAVIS, F. D. THOMSON, C. A. HINTON, T. R. TERRY, W. GALLATLY, J. SCOTT, E. ANTHONY, H. L. ORCHARD, J. O'REGAN, B. ROBAGLIA, C. BOELL, P. TERRIER, MORET-BLANC finden sich Educ. Times XXXII. 22, 55-56, 65, 70-71, 102, 104; Nouv. Ann. (2) XVIII. 108-109, 334, 361, 374-375, 420, 421.

O.

F. EDLER. Ueber Maxima und Minima bei ebenen Figuren. Hoffmann Z. X. 245-259.

Für den bekannten Steiner'schen Satz, dass von allen Figuren mit gleichem Umfang der Kreis den grössten Inhalt hat, wird ein neuer Beweis mitgetheilt. Neun Hülfssätze über Maxima und Minima bei ebenen isoperimetrischen Figuren sind vorausgeschickt, z. B. folgender: Von allen Polygonen mit 2^n Seiten und gegebenem Umfange ist das reguläre Polygon das Maximum. Schl.

W. W. JOHNSON, W. P. CASEY and E. B. SEITZ. Solution of a problem. Analyst VI. 93-95.

Bestimmung eines Punktes P in einem Dreieck ABC, so dass $m.PA+n.PB+r.PC$ ein Minimum ist, wo m, n, r constant.

Glr. (O.)

A. MAIER. Aufgaben aus der praktischen Geometrie zum Schulgebrauch. Zweite Hälfte. Karlsruhe.

Zweiter Theil einer Arbeit, deren erster Theil dem Referenten zu seinem Bedauern entgangen ist. Der vorliegende Theil bietet in klarer und übersichtlicher Weise eine Reihe von Anwendungen der Trigonometrie auf Feldmesskunst. Zum Gebrauch für die Schule kann die Sammlung nur empfohlen werden. O.

F. J. Studnička. Ueber das delische Problem. Casopis VIII. 132-133 (Böhmisch).

Weist auf die neuen Methoden von Buonfalce hin.

Std.

J. Bernard. Zur Trisection des Winkels. Casopis VIII. 35. (Böhmisch).

Enthält eine kritische Bemerkung über Thiese's Constructionsangaben aus dem „Scientific American“, sowie einen neuen Versuch. Std.

J. Scheffer. On the trisection of an angle. Analyst VI. 117-119.

Bericht über frühere Methoden zur Dreitheilung des Winkels durch Curven, Mechanismen etc. Glr. (O.)

E. Horst. Ueber die Theilung des Winkels in beliebig viele gleiche Theile. Schlömilch Z. XXIV. 407-408.

Die Archimedische Spirale $r = c\varphi$ führt die Theilung des Winkels (φ) auf die entsprechende Theilung der Geraden (r) zurück. Ein Lineal, welches einen Quadranten derselben enthält, ist daher ein ausreichendes Instrument zur n-Theilung aller Winkel. H.

L. Maleyx. Correspondance. Nouv. Ann. (2) XVIII. 95-96.

Die Gleichheit der Winkel bei den Tangenten der Kegelschnitte wird bewiesen, indem die Tangente betrachtet wird als der Schnitt der Ebene der Kegelschnitte mit der Tangentialebene an den geraden Kegel, auf dem sich der Kegelschnitt befindet.

O.

Th. Sinram. Beitrag zur Ellipse. Grunert Arch. LXIII. 443-445.

Es wird ein Satz von der Ellipse angegeben, der sich zur Lösung der Aufgabe anwenden lässt, einem gegebenen Parallelogramm eine Ellipse berührend einzuschreiben. Mz.

E. Hain. Ueber die Theilung der Seiten eines Dreiecks. Grunert Arch. LXIII. 403-407.

Wenn auf jeder Dreieckseite zwei Punkte in symmetrischer Lage zum Mittelpunkte der Seite bestimmt werden, deren Abstände von den Endpunkten zu der ganzen Seite in einem gegebenen für alle drei Seiten constanten Verhältnisse stehen, so liegen diese sechs Punkte nach dem Carnot'schen Satze auf einem Kegelschnitte. Die Gleichung desselben wird aufgestellt und für einzelne specielle Werthe des Verhältnisses discutirt. Es ergiebt sich, dass alle Kegelschnitte ähnliche und concentrische Ellipsen sind.

Schl.

W. Fuhrmann. Aufgaben über Kegelschnitte. Pr. Königsberg i. Pr.

Der Herr Verfasser behandelt solche Probleme über die Kegelschnitte, welche mit den Hülfsmitteln, die einem Schüler zu Gebote stehen, gelöst werden können. Es kommen zuerst Aufgaben, die die Construction der Parabel betreffen, wie etwa: Eine Parabel zu construiren, wenn Brennpunkt und Pol und Polare gegeben sind — mit zwei Auflösungen etc. Nachher folgen Aufgaben über die Construction allgemeiner Kegelschnitte mit Vorausschickung einiger Hülfssätze, die beim ersten Unterricht meist übergangen werden. Eine dieser Aufgaben ist, einen Kegelschnitt zu construiren, wenn der Brennpunkt, zwei Tangenten und ein Punkt von ihm gegeben sind u. s. w. Diese Abhandlung enthält viel Nützliches für den angehenden Studirenden.

Mz.

E. Anthony. Note on geometrical conics. Messenger (2) IX. 42-44.

Geometrische Beweise gewisser elementarer Eigenschaften der Kegelschnitte. Glr. (O.)

B. Lieber und F. von Lühmann. Leitfaden der Elementar-Mathematik. Dritter Theil: Ebene Trigonometrie, Stereometrie, sphärische Trigonometrie. 2te Auflage. Berlin. Simion.

Der Inhalt ist der gewöhnliche, ebenso die Anordnung; Methode und Ausdruck concinn, tadellos correct und sachgemäss. Einzeln zu erwähnen ist vielleicht eine einfach constructive Reduction der Inhaltsberechnung der Kugel auf den Cavalieri'schen Grundsatz, die, wenn auch nicht neu, doch selten angewandt, also wenig bekannt ist. H.

F. J. van den Berg. Outwikkeling van eenige algebraische en van daarmede gelykvormige goniometrische identiteiten. Versl. en Mededeel. XIV. 340-389.

Ausgehend von einigen bekannten Sätzen der Determinantentheorie werden einige goniometrische Identitäten entwickelt, zum Beispiel:

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{\sin(a_k-b_1)\sin(a_k-b_2)\dots\sin(a_k-b_n)}{\sin(a_k-a_1)\sin(a_k-a_2)\dots\sin(a_k-a_{k-1})\sin(a_k-a_{k+1})\dots\sin(a_k-a_n)}$$
$$= \sin\left(\sum_1^n a_k - \sum_1^n b_k\right),$$

aus welcher Formel sich wieder viele andere ableiten lassen. G.

A. W. Gravelaar. De grondformulen der goniometrie. Nieuw Arch. V. 187-190

Neue elementare Beweise für die Grundformeln der Goniometrie:

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b,$$
$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

G.

J. W. L. Glaisher. Addition to a paper: „A theorem in trigonometry. Vol. XV. p. 151-157.“ Quart. J. XVI. 329-338.

Entwickelung der beiden Reihen

$$\operatorname{arctang}\frac{x^{2n}}{1^{2n}}+\operatorname{arctang}\frac{x^{2n}}{2^{2n}}+\operatorname{arctang}\frac{x^{2n}}{3^{2n}}+\cdots$$

und

$$\operatorname{arctang}\frac{x^{2n}}{1^{2n}}+\operatorname{arctang}\frac{x^{2n}}{3^{2n}}+\operatorname{arctang}\frac{x^{2n}}{5^{2n}}$$

in die Form von unendlichen Producten. Specielle Fälle und Anwendungen auf elliptische Functionen. Siehe auch p. 189.

Schl.

J. W. L. Glaisher. A trigonometrical identity. Messenger (2) IX. 124.

Die Identität heisst:

$$\begin{aligned}&\sin\beta\sin\gamma\sin(\beta-\gamma)\{\sin^2\beta+\sin^2\gamma+\sin^2(\beta-\gamma)\}\\&+\sin\gamma\sin\alpha\sin(\gamma-\alpha)\{\sin^2\gamma+\sin^2\alpha+\sin^2(\gamma-\alpha)\}\\&+\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha-\beta)\{\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2(\alpha-\beta)\}\\&+\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)\sin(\alpha-\beta)\{\sin^2(\beta-\gamma)+\sin^2(\gamma-\alpha)+\sin^2(\alpha-\beta)\}=0.\end{aligned}$$

Glr. (O.)

W. W. Johnson. Solution of a problem. Analyst VI. 17-21.

Discussion der Gleichungen, deren Wurzeln resp. $\sin\frac{2k\pi}{n}$; $\cos\frac{2k\pi}{n}$ sind, wo k die Werthe 0, 1, 2, ... $n-1$ hat.

Glr. (O.)

W. W. Johnson. Symmetrical functions of the sines of the angles included in the expression $a_0+\frac{2k\pi}{n}$. Analyst VI. 105-107.

Wenn die Winkel, die man dadurch erhält, dass man in $a_0+\frac{2k\pi}{n}$ dem k die Werthe 0, 1, 2, ... $n-1$ giebt, mit

$a_0, a_1, a_2, \dots a_{n-1}$ bezeichnet werden, so ist, wie Herr Johnson zeigt,

$$\Sigma(\sin a)^{2r} = \frac{n}{2^{2r-1}} \cdot \frac{(2r-1)!}{r!(r-1)!}.$$

Er betrachtet ferner symmetrische Functionen von $\sin a_0$, $\sin a_1, \dots$ $\dots \sin a_{n-1}$. Glr. (O.)

J. Diekmann. Ueber ein Eliminationsproblem der metrischen Geometrie. Grunert Arch. LXIII. 267-285.

Die Sätze vom Dreieck und den Transversalen werden mit Hülfe der Trigonometrie gruppirt. Das Gegenwärtige ist ein Auszug aus einer früheren Programmarbeit des Verfassers mit dem Nachweis, dass der Inhalt eines inzwischen erschienenen Artikels von Zahradnik bereits in jenem Programme enthalten war. H.

A. Pánek. Ueber Methoden der Dreiecksberechnung. Casopis VIII. 124-131. (Böhmisch).

Eine historisch-methodische Arbeit, veranlasst durch den Reidt-Brockmann'schen Streit, der in Hoffmann's Zeitschrift eben geführt wurde. Std.

A. Pánek. Ueber den Flächeninhalt eines durch seine Seiten gegebenen Vierecks. Casopis VIII. 182-183. (Böhmisch).

Enthält eine kurze Ableitung der bekannten Formel unter Verwendung des zugehörigen Satzes von Ptolemäus.

Std.

S. Günther. Zur Didaktik der sphärischen Trigonometrie. Bayr. Bl. XV. 405-411.

Der Grundgedanke dieser Methode ist der, jede einzelne der sechs Formeln, mittelst deren eine jede Aufgabe der sphärischen

Trigonometrie gelöst werden kann, logarithmisch zu adaptiren. Nur drei dieser Formeln werden wirklich abgeleitet, die drei anderen aus ihnen durch polare Umsetzung gewonnen. Zum Schlusse wird gezeigt, wie durch einen Grenzübergang in weit einfacherer Weise, als es z. B. in dem Sondhauss'schen Programm (Neisse 1879) geschieht, die Gleichungen der räumlichen in diejenigen der ebenen Trigonometrie übergeführt werden können. Gr.

C. Sondhauss. Ableitung der Sätze über das ebene Dreieck aus den Sätzen der sphärischen Trigonometrie. Pr. Neisse.

Mz.

F. X. Stoll. Die Hauptaufgaben der sphärischen Trigonometrie. Pr. Bensheim.

Es werden die sechs Hauptaufgaben der sphärischen Trigonometrie in einer Weise behandelt, welche von der in den meisten Lehrbüchern gegebenen etwas abweicht. Die benutzten Formeln zeichnen sich dadurch aus, dass sie meist dieselbe Function für die Winkel, und auch dieselbe Function für die Seiten enthalten. Sind nämlich a, b, c die Seiten und α, β, γ deren Gegenwinkel in einem sphärischen Dreieck, so hat man:

$$\operatorname{tg} a = \operatorname{tg} b \cos\gamma + \operatorname{tg} c . \cos\beta + \operatorname{tg} a . \operatorname{tg} b . \operatorname{tg} c . \cos\beta . \cos\gamma$$

und zwei ähnliche Gleichungen. Mittelst dieser Gleichungen werden die Seiten gefunden, wenn die Winkel gegeben sind — und zwar mit Einführung der Unbekannten:

$$x = \cot b . \cot c, \quad y = \cot c . \cot a, \quad z = \cot a . \cot b,$$

wobei die für x, y, z resultirenden Gleichungen linear werden. Weiterhin werden die Gleichungen hergeleitet:

$$\cot\beta \cot\gamma + \cot\gamma \cot\alpha \cos c + \cot\alpha \cot\beta \cos b = \cos b \cos c$$

und zwei entsprechende, welche die Winkel aus den Seiten ergeben. Die Lösung der vier übrigen Hauptaufgaben geschieht dann durch Umformung der angegebenen Gleichungen, wobei

auch die sonst benutzten Relationen, wie die von Gauss und Neper auftreten. Mz.

E. Meissel. Beitrag zur Sphärik. Clebsch Ann. XV. 380-387.

Es wird die Aufgabe gelöst, ein sphärisches Dreieck zu berechnen, von welchem die Differenzen der Seiten und der gegenüberliegenden Winkel gegeben sind. Mz.

J. L. Kitchin, R. Knowles. Solutions of a question (5728). Educ. Times XXXI. 76.

Ein gleichseitiges sphärisches Dreieck werde einem Kreise vom Radius ϱ einbeschrieben und umschrieben. Dann ist der Cosinus eines Winkels desselben im ersten Fall $\frac{3\cos^2\varrho-1}{3\cos^2\varrho+1}$, im zweiten Fall $\frac{3}{2}\cos^2\varrho-1$. O.

Jamet. Sur la géométrie de la sphère. N. C. M. V. 151-156.

Theorie der Transversalen in der sphärischen Geometrie. Mn. (O.)

J. Scheffer. Solution of a problem. Analyst VI. 26-28.

Wenn $ABCD$ ein sphärisches Viereck ist, dessen Seiten AB, DC verlängert sich in P, dessen Seiten AD, BC verlängert sich in Q und dessen Diagonalen AC, BD sich in R schneiden, so ist
$$\sin AB.\sin CD.\cos P-\sin AD.\sin BC.\cos Q = \pm\sin AC.\sin BD.\cos R.$$
Glr. (O.)

E. Collignon. Note sur la résolution, au moyen de tableaux graphiques, de certains problèmes de cosmographie et de trigonométrie sphérique. Nouv. Ann. (2) XVIII. 179-191.

Es handelt sich um die Construction einer graphischen Tafel, aus der man ohne Weiteres die Stunden des Auf- und Untergangs der Sonne an einem beliebigen Orte der Erde und zu beliebiger Jahreszeit ablesen kann. Abgesehen wird dabei von der Depression, dem Einfluss der Strahlenbrechung, der Variation der Declination während eines Tages und der Zeitgleichung.

O.

A. Tissot. Remarques au sujet d'une note de M. Collignon. Nouv. Ann. (2) XVIII. 286-288.

Herr Tissot bemerkt, dass ähnliche Constructionen sich in seinem „Précis de Cosmographie" p. 156 u. 158 befinden, ohne dass dort von den trigonometrischen Formeln ausgegangen werde.

O.

S. Günther. Ueber die planimetrische Behandlung elementarer astronomischer Probleme. Hoffmann Z. X. 99-105.

Im Anschluss an die frühere Arbeit des Verfassers (siehe F. d. M. VIII. 1876. p. 337) und eine sich daran anschliessende von Pick (siehe F. d. M. IX. 1877. p. 411) werden weitere Aufgaben der Astronomie mit Umgehung der sphärischen Trigonometrie gelöst. So namentlich die Frage: Man kennt den Tagesbogen π eines Sternes; welches sind Azimuth und Höhe desselben, wenn seit seinem Aufgang die Zeit t verflossen ist?

O.

C. Hellwig. Die Kegelflächen am Dreikant. Grunert Arch. LXIII. 215-220.

Der Herr Verfasser wendet die von ihm hergeleiteten Formeln, die sich auf die Functionen Sinus und Cosinus einer dreikantigen Ecke E und diejenigen der durch eine neue Gerade (oder Ebene) mit den Kanten (oder Ebenen) der ursprünglichen

Ecke bestimmten Theilecken beziehen, auf den besonderen Fall an, dass die Gerade (Ebene) mit den Kanten (Ebenen) der Ecke denselben Winkel bildet. Die Gerade ist dann die Axe desjenigen Umdrehungskegels, welcher um die Ecke beschrieben werden kann; im anderen Falle ist die auf der Ebene im Scheitel der Ecke errichtete Normale die Axe desjenigen Umdrehungskegels, welcher sich in die Ecke einschreiben lässt. Durch Rechnung werden nun einige Sätze hergeleitet. Mz.

P. Riccardi. Esercitazione geometrica II. Mem. di Modena XVII. 3-17.

Als Fortsetzung des Artikels Mem. di Modena XVI. 3 werden zwölf Sätze über den Durchschnitt von Geraden bewiesen. H.

Th. Sinram. Neue Berechnung des Volumens eines Prismatoids. Grunert Arch. LXIII. 440-443.

Der Herr Verfasser behandelt die Aufgabe, statt der bekannten Formel:

$$\text{Vol.} = \frac{h}{6}(G+g+4D),$$

durch welche der Inhalt eines Prismatoids gefunden wird, eine andere abzuleiten, in der nur zwei Durchschnittsflächen vorkommen; er berechnet hierzu das Volumen eines Prismatoids aus einer Grundfläche, der Höhe und der Durchschnittsfläche in einem Abstande hx von jener Grundfläche. In der Endformel wird dann x so angenommen, dass die andere Grundfläche, die zuerst in ihr vorkommt, weggeht; dies giebt x entweder $=\frac{2}{3}$ oder $=\frac{1}{3}$. Mz.

E. Lucas. Questions de géométrie élémentaire. N. C. M. V. 12-13.

Beweise mehrerer elementarer Sätze, speciell des folgenden merkwürdigen, dessen erster Theil Steiner gehört, durch die Methode der Inversion: „Wenn die Diagonalen eines Oktaeders sich

rechtwinklig schneiden und die Projectionen des Schnittpunktes der Diagonalen auf die Seiten des Oktaeders auf einer Kugel liegen, so schneiden die Lothe vom Schnittpunkt der Diagonalen auf jede der Seiten die entgegengesetzten Seiten in acht Punkten, welche auf derselben Kugel liegen. Mn. (O.)

G. Dostor. Propriétés générales des polyèdres réguliers étoilés. Liouville J. (3) V. 209-227.

Der Verfasser zeigt von neuem (s. F. d. M. X. 1878. p. 370), dass es zweckmässig ist, ausser der einbeschriebenen und der umbeschriebenen Kugel eines regulären Polyeders auch diejenige Kugel zu berücksichtigen, welche alle Kanten berührt. Es werden ausser den fünf platonischen regulären Körpern, auch die von Kepler und Poinsot entdeckten vier regulären Stern-Polyeder, und zwar alle neun Körper von einem einheitlichen Gesichtspunkte aus behandelt. Den Relationen zwischen den Radien jener drei Kugeln werden für alle Polyeder die Werthe des Neigungswinkels zweier anstossender Flächen und alle Formeln hinzugefügt, welche jene Radien und das Volumen durch die Kantenlänge ausdrücken. Scht.

G. Dostor. Surface d'un polygone sphérique étoilé quelconque. Grunert Arch. LXIII. 433-435.

Die Fläche eines sphärischen Sternpolygons ist nicht, wie in den convexen sphärischen Polygonen, ausschliesslich von der Grösse der Winkel desselben abhängig. Bezeichnet $S_{n,p}$ und $\Sigma_{n,p}$ die Fläche und die Winkelsumme des sphärischen Sternpolygons von n Seiten und von der p^{ten} Gattung und $\Sigma_{n,p-1}$ die Summe der Winkel eines zweiten mit ebensoviel Seiten aber von der $(p-1)^{\text{ten}}$ Gattung, welches mit dem ersteren aus demselben convexen Polygone abgeleitet ist, und wird die Oberfläche des Kugeloktanten als Flächeneinheit gewählt, so ist

$$S_{n,p} = \Sigma_{n,p} - \Sigma_{n,p-1} + 2\pi.$$

Schl.

G. HEPPEL, VEX. Solutions of a question (3750.) Educ. Times XXXII. 23.

Eine grosse Zahl gleicher Kugeln wird in möglichst enge Berührung mit einander gebracht. Das Verhältnis der Summe ihrer Volumina zu dem von ihnen eingenommenen Raum wird bestimmt

$$\tfrac{1}{6}\pi\sqrt{2} : 1.$$

O.

A. SCHIAPPA MONTEIRA. Sobre a area laterale e volume d'una cunha conica. Jorn. d. sc. math. e astr. II. 68-76.

J. G. W. OEHLER. Ueber krystallographische Zonen. Pr. Bautzen.

Die Darstellung der Zonen nach den drei verschiedenen Methoden von Quenstedt, Neumann und Miller wird kurz auseinandergesetzt und durch viele Beispiele und Figuren erläutert.

Schl.

Weitere Lehrsätze und Lösungen von Aufgaben aus der Stereometrie von D. THOMAS, R. TUCKER, R. GRAHAM, T. R. TERRY, COCHEZ, H. L. ORCHARD, G. H. HOPKINS, LEZ, LANNES, L. DE LAUNAY, LEINCHUGEL finden sich Educ. Times XXXI. 56, 57, 59; XXXII. 40-41; Nouv. Ann. (2) XVIII. 109, 117, 310-311, 410-419.

O.

Capitel 4.

Darstellende Geometrie.

F. TILŠER. Grundlagen der Ikonognosie. I. Abtheilung. Prag. Abh. (6) IX. B. 1-88.

In der Einleitung, welche die Ueberschrift: „Von den Grundlagen der Ikonognosie, ihrem Verhältniss zu anderen exacten

Wissenschaften, insbesondere zu Monge's Géométrie descriptive" trägt, bespricht der Verfasser zunächst die Entstehung des Monge'schen Werkes sowie die Anregungen, welche dieses Werk zur weiteren Entwickelung der darstellenden Geometrie gegeben habe, und sucht daraus die Mängel herzuleiten, denen diese Wissenschaft noch heute unterliege. Er sucht dieselben in der nicht consequenten Durchführung einer bestimmten Terminologie und Symbolik und namentlich darin, dass dieselbe nicht, wie die analytische Geometrie, zunächst mit ebenen Gebilden beginne und dann erst zum Raume fortschreite. Dem will er in der vorliegenden Arbeit abhelfen, welche die allgemeinen Principien bestimmter Darstellungen geometrischer Gebilde entwickeln soll. Die Abtheilung I enthält die Abschnitte: Von den wesentlichsten naturgemässen Mitteln, der Unzulänglichkeit der Entwickelungs-Elemente der descriptiven Geometrie abzuhelfen. A. Von den Principien der Determination der Gebilde des Raumes und ihren wesentlichsten Elementen. B. Von den Principien der Ableitung der Projectionen determinirter Gebilde des Raumes und deren wichtigsten Grundgebilden. C. Von den Grundsätzen der Construction der Bilder determinirter Projectionen. O.

W. Fiedler. Geometrische Mittheilungen. IV. Neue elementare Projectionsmethoden? Wolf Z. XXIV. 205-226.

Der Verfasser beschäftigt sich mit der folgenden Frage: Sind die Centralprojectionen in der gewöhnlichen Form und die orthogonale Parallelprojection in der Form der „Géométrie descriptive" die einzigen elementaren Projectionsmethoden?

O.

Schönemann. Die Gesetze der Centralprojection und ihre Anwendung auf die Geometrie. Pr. Soest.

Der Zweck der Abhandlung ist, die Lehre von der Perspective vom geometrischen Standpunkte in einer für den Unterricht geeigneten Darstellungsweise systematisch zu entwickeln.

Dies geschieht in zwei Abschnitten, von welchen der erste über die Gesetze der perspectivischen Abbildung handelt, der zweite die Anwendung auf geometrische geradlinige Figuren enthält.

Schl.

A. SUCHARDA. Beweis eines Satzes über Projectionen. Grunert Arch. LXIV. 105-109.

Verfasser giebt einen einfachen Beweis für den zuerst von Staudigl ausgesprochenen Satz, dass jede ebene Central- oder Parallelprojection irgend eines Raumgebildes ebenso als eine centrale, wie als eine schiefe oder orthogonale Projection eines mit dem gegebenen collinearen Raumgebildes für irgend ein beliebiges Projectionscentrum betrachtet werden kann. Schl.

DIETSCH. Ueber eine Aufgabe der darstellenden Geometrie. Bayr. Bl. XV. 123.

Die Aufgabe, eine Gerade zu suchen, welche durch einen gegebenen Punkt geht und auf einer gegebenen Geraden senkrecht steht, wird in einer dem Fassungsvermögen der Schüler entsprechenderen Weise gelöst, als es in dem in den bayrischen Realschulen eingeführten Lehrbuch von Klingenfeld geschieht.

Gr.

HERMARY. Solution simple d'un problème de géométrie descriptive. Bull. S. M. F. VII. 138-140.

Betrifft die Construction der 8 Kugeln, welche die Flächen eines Tetraeders berühren. Schl.

J. M. DE TILLY. Correspondance. N. C. M. V. 437-448.

1. Sind zwei Körper gegeben, die ein einziges unveränderliches System bilden und durch Oberflächen zweiter Ordnung mit Mittelpunkten begrenzt werden, so kann man, mit Cirkel und

Lineal, die Entfernung der Mittelpunkte dieser Flächen construiren.

2. Die „Géométrie de la règle" des Herrn de Coatpont setzt implicite voraus, dass man den Schnitt eines Kreises mit einer Geraden, deren Entfernung vom Mittelpunkt constant ist, finden kann. Setzt man dies explicite als gegeben voraus, so lässt sich die Auseinandersetzung des Herrn Coatpont vereinfachen.

Mn. (O.)

J. Herzog. Aufgabe über Kegelschnitte. Grunert Arch. LXIII. 429-431.

Auf rein constructivem Wege sind folgende Aufgaben behandelt: Einen Rotationskegel, dessen Axe auf der horizontalen Projectionsebene senkrecht steht, nach einer Hyperbel so zu schneiden, dass sowohl die horizontale als auch die verticale Projection gleichseitige Hyperbeln werden. Mz.

E. Catalan. Sur une épure de géométrie descriptive. N. C. M. V. 435-437.

Geometrischer Beweis des folgenden Satzes: Wenn man einen Umdrehungskegel durch eine Ebene schneidet und die Figur auf eine Ebene, senkrecht zur Axe des Kegels, projicirt, so ist der eine der Brennpunkte der Projection der Fusspunkt der Axe. Der Verfasser bemerkt, dass der Satz gültig ist für jeden Kegel mit Kreisbasis, wenn die Projection parallel der Linie erfolgt, welche den Scheitel mit dem Mittelpunkt der Basis verbindet.

Mn. (O.)

Negri. Nota su di una relazione tra le linee d'ombra delle superfizie di rivoluzione ed elicoidee. Atti di Torino XIV. 116-125.

Geometrische Beziehungen zwischen der Selbstschattengrenze eines Rotationsellipsoids und der Grenzcurve des Schlagschattens

derselben Fläche in einer Projectionsebene, zu welcher die Axe der Fläche vertical ist, bei paralleler Beleuchtung.

Schl.

C. Pelz. Zur Tangentenbestimmung der Selbstschattengrenzen von Rotationsflächen. Wien. Ber. 1879.

Nach der etwas modificirten Methode von Staudigl, welche im 68. Bande der Berichte der K. K. Akad. d. Wiss. in Wien in der Abhandlung: „Bestimmung von Tangenten an die Selbstschattengrenze von Rotationsflächen", veröffentlicht ist, hat der Verfasser die Lösung des Problems der Tangentenconstruction an die Selbstschattengrenze eines kreisförmigen und eines elliptischen Wulstes oder Annuloids für parallele und centrale Beleuchtung vollständig durchgeführt. Schl.

J. W. Sharpe. Notes on a method in areal coordinates, connected with the geometrical method of orthogonal projection. Messenger (2) IX. 10-22.

Der Inhalt der Arbeit ist aus dem Titel zur Genüge zu ersehen. Glr. (O.)

J. Krejčí. Bemerkungen zu den Reductionsformeln aus den Miller'schen Symbolen des isoklinen in die Naumann'schen Symbole des hexagonalen Krystallsystems. Prag. Ber. 1878. 321-328.

Die in einer früheren Abhandlung des Verfassers (Prag. Ber. 1874.) enthaltenen Reductionsformeln, nach welchen sich die Miller'schen Symbole der isoklinen oder rhomboëdrischen Krystallflächen unmittelbar in die entsprechenden Naumann'schen Symbole umrechnen lassen, sind in der vorliegenden Abhandlung noch näher erklärt und durch die Vergleichung mit den Symbolen von Des Cloizeaux ergänzt. Schl.

Websky. Ueber die Wahl der Projectionsaxen in einer Normalen-Projection für triklinische Krystalle. Berl. Monatsber. 1879. 124-132.

In einer Neumann'schen Normalen-Projection eines triklinischen Krystalls können die planimetrischen Projectionsaxen so gewählt werden, dass die Coordinaten (axoparallelen Abstände) des Flächenortes einer Fläche $f = \frac{a}{\mu} : \frac{b}{\mu} : c$ die Länge

$$\frac{\mu}{a \sin\beta \sin C} \quad \text{und} \quad \frac{\nu}{b \sin\alpha \sin C}$$

erhalten, wo a, b die Einheitswerthe der Krystallaxen OA, OB; $c = 1$ den Einheitswerth der Axe OC; α, β die Axenwinkel BOC, AOC und C den Winkel zwischen den Axenebenen AOC und BOC im positiven Octanten bedeuten. Dieser Satz, von welchem der Verfasser bei seinen Untersuchungen über die Relation der Winkel zwischen vier Krystallflächen in einer Zone ausgegangen ist, wird in der vorliegenden Abhandlung näher begründet.

Schl.

Websky. Ueber Krystall-Berechnung im triklinischen System. Berl. Monatsber. 1879. 339-364.

Der Zweck der Abhandlung ist, den praktischen Nutzen der Formeln zu zeigen, welche der Verfasser in der Sitzung der Berliner Akademie vom 17. Jan. 1876 für die Relation der Normalenbögen zwischen den Krystallflächen einer Zone und deren Symbolen aufgestellt hat. Mit Hülfe derselben lässt sich nämlich der Zahlenaufwand, den die Berechnung der triklinischen Krystalle erfordert, weiter reduciren, als dies irgend eine andere der vorgeschlagenen Methoden bewirkt, und zwar dadurch, dass die Rechnung ausschliesslich zonenweise geführt wird.

Schl.

Capitel 5.

Neuere synthetische Geometrie.

A. Ebene Gebilde.

M. Simon und A. Milinowski. Die Kegelschnitte für die oberen Classen. Zweite Abtheilung: Ellipse und Hyperbel von A. Milinowski. Berlin. Calvary.

Wie der Herr Verfasser im Vorworte sagt, verdient für die Schule die synthetische Geometrie den Vorzug vor der analytischen. Dem entsprechend ist nun die Behandlung der beiden Kegelschnitte: Ellipse und Hyperbel. In kurzer Uebersicht werden die harmonischen Punkte und Strahlen und deren Bedeutung für den Kreis besprochen; darauf folgt die Erklärung der harmonischen Verwandtschaft, und der Beweis des Pascal'schen Satzes für den Kreis, indem von zwei besonderen Fällen — einmal, dass zwei Gegenseiten des Sechsecks parallel, und das andere Mal, dass sie sich im Centrum des Kreises treffen — zum allgemeinen übergegangen wird. Hieran schliesst sich der Satz des Brianchon für den Kreis. Es folgen dann die Definitionen der Kegelschnitte mit ihren Parameterkreisen, d. h. mit den Kreisen, die über denjenigen Kegelschnitts-Sehnen, die den Namen Parameter führen, als Durchmesser beschrieben werden; und weiter folgt die Uebertragung der zu Anfang erwähnten harmonischen Eigenschaften des Kreises und der Sätze von Pascal und Brianchon auf die Kegelschnitte. Sehr viele gut gewählte Uebungsaufgaben bilden den Schluss der Arbeit. Mz.

Emil Weyr und Eduard Weyr. Grundlinien der höheren Geometrie. Drei Theile. Prag 1871, 1874, 1878 (Böhmisch).

Der erste Theil (111 Seiten) giebt, gestützt auf den Begriff des Doppelverhältnisses, die Theorie der projectivischen Grundgebilde erster Stufe mit Einschluss der quadratischen Involution,

sowie die Anwendung der Theorie zur Lösung der wichtigsten, dahin gehörigen Aufgaben des ersten und zweiten Grades. Beigegeben ist eine Tafel mit 81 Figuren.

Der zweite Theil (180 Seiten) behandelt in knapper Darstellung bei reichem Inhalte die Kegelschnitte als Erzeugnisse projectivischer Büschel und Reihen. Beigegeben sind 2 Tafeln mit 79 Figuren.

Der dritte Theil (162 Seiten) enthält die wichtigsten Eigenschaften der geradlinigen Flächen zweiten Grades und die Theorie der collinearen und der reciproken Verwandtschaft der Grundgebilde zweiter und dritter Stufe. Da die betrachteten Beziehungen auch durch den Calcul festgesetzt werden, so sind die imaginären Elemente bei allen Betrachtungen zugelassen worden, wodurch die metrischen Eigenschaften dem Ganzen rascher angepasst erscheinen, als es sonst in einem Elementarbuch hätte geschehen können. Beigegeben ist eine Tafel mit 32 Figuren.

Std.

J. Töplitz. Geometrische Untersuchungen über den Zusammenhang der Theorie der Curven mit der Theorie der Verwandtschaften. Pr. Lissa.

Die fleissige Arbeit des Verfassers bespricht die *m*-*n*-deutige Verwandtschaft zwischen den Elementen zweier Grundgebilde im allgemeinen, die projective Verwandtschaft im besondern, die Bedeutung des Verschwindens der Invarianten der letztern und giebt mehrere auf Kegelschnitte bezügliche Beispiele von projectiven und involutorischen Punktreihen. In einem besonderen Capitel wird „eine neue Coordinatenbestimmung entdeckt", nämlich folgende. Man nehme zwei feste Strahlen L und L', die sich in O schneiden, und auf einem derselben L' zwei feste Punkte P und Q. Dann sind die Coordinaten eines Punktes A der Ebene die Entfernungen von O bis zu den beiden Schnittpunkten von L mit den Verbindungslinien AP und AQ. Neue Resultate oder neue Gesichtspunkte enthält die Arbeit nicht.

Scht.

Kiessling. Ueber die harmonische Theilung vom Standpunkte der Lagegeometrie und der Algebra. Hamb. math. Ges. 1879. 196-206.

Die harmonische Theilung lässt sich auf doppeltem Wege begründen. Für den ersten sind die Verhältniscoordinaten, welche die Lage jedes Punktes einer geraden Punktreihe eindeutig bestimmen, der einfachste Ausgangspunkt. Auf dem zweiten, dem rein geometrischen Wege, sind die Fundamentaleigenschaften der harmonischen Gebilde aus den Eigenschaften zweier reciproken Gebilde, des Dreiseits und des Dreikants, herzuleiten. Für didaktische Zwecke ist es geboten, diese beiden Wege, welche in der Abhandlung noch weiter angedeutet werden, streng auseinander zu halten. Schl.

E. Hain. Zur Geometrie der Geraden. Grunert Arch. LXIV. 267-274.

Bezeichnet $\lambda = (ABCD)$ das anharmonische Verhältnis von den vier Punkten A, B, C, D einer Geraden, ist ferner

$$\mu = (ABCE) \quad \text{und} \quad \mu = \frac{\alpha\lambda+\beta}{\gamma\lambda+\delta},$$

so bilden die Punkte D, E für variable λ zwei projectivische Punktreihen auf derselben Geraden und sind conjugirte Punkte einer Involution, wenn $\alpha+\delta = 0$ ist. Es werden nun noch mehrere Sätze über projectivische Punktreihen auf demselben Träger, besonders über die Gegen- und Doppelpunkte derselben bewiesen. Schl.

A. Milinowski. Zur Theorie der Kegelschnitte. Borchardt J. LXXXVI. 290-297.

Der Verfasser sucht die synthetische Theorie der Kegelschnitte dadurch eleganter und einfacher zu gestalten, dass er den Zusammenhang der Focaleigenschaften mit den projectivischen in möglichst einfacher Weise vermittelt, während dieser Zusammenhang bei den bisher üblichen Methoden sich nur in etwas verwickelter Weise ableiten lässt. Er bedient sich dazu eines

Abbildungsprincipes, welches er als das der harmonischen Verwandtschaft bezeichnet. Nimmt man in einer Ebene einen festen Punkt *P* (Centrum) und eine feste Gerade *p* (Axe) an, welche nicht durch *P* geht, so heissen zwei Punkte verwandt, deren Verbindungslinie durch *P* geht und welche durch *p* und *P* harmonisch getrennt werden. Dann entsprechen sich auch zwei Gerade, welche durch denselben Punkt der Axe gehen und durch *p* und *P* harmonisch getrennt sind. Vier harmonischen Punkten oder Geraden entsprechen wieder harmonische Punkte oder Gerade u. s. w. Der Kegelschnitt wird definirt als der Ort eines Punktes, dessen Abstände von einem festen Punkte (Brennpunkte) und einer festen Geraden (Directrix oder Leitlinie) constantes Verhältnis haben, woraus, wie bekannt, die Focaleigenschaften und viele andere Eigenschaften sich sehr elementar ableiten lassen. Namentlich ergiebt sich auch der Satz: „Der Winkel, welchen zwei Brennstrahlen bilden, wird halbirt durch den Strahl, welcher nach dem Schnittpunkte der Tangenten des Kegelschnittes in den Endpunkten jener Brennstrahlen gerichtet ist."

Wählt man nun als Centrum der harmonischen Verwandtschaft den Brennpunkt *F* und als Axe diejenige Gerade *f*, welche parallel ist der Leitlinie *l* und auf der andern Seite derselben denselben Abstand von *l* hat wie *F*, so dass also der Geraden *l* die unendlich entfernte Gerade verwandt ist, so bildet sich der Kegelschnitt in einen Kreis ab, dessen Mittelpunkt der Brennpunkt ist, und dessen Durchmesser gleich ist der Sehne durch den Brennpunkt parallel zur Leitlinie. Dieser Satz lässt sich umkehren. Es werden nun als entsprechende Strahlen projectivischer Strahlbüschel solche definirt, deren Durchschnittspunkte auf einem durch die Mittelpunkte der Büschel gelegten Kegelschnitte liegen. Dann bietet die Abbildung in einen Kreis die Handhabe, um die fundamentalen Beziehungen der projectivischen Relation zu ermitteln: die Bestimmung des Kegelschnittes durch fünf seiner Punkte und die einfache Construction desselben, woran sich endlich der einfache Nachweis schliesst, dass jeder Kegelschnitt auf unendlich viele Weisen in einen Kreis projicirt werden kann.

A.

Ch. Ladd. The Pascal hexagram. Am. J. II. 1-13.

Es wird in dieser Abhandlung eine neue Bezeichnung für die Linien und Punkte, die mit dem Pascal'schen Sechseck in Verbindung stehen, vorgelegt, ferner ein kurzer Bericht über die Entdeckungen von Veronese (Nuovi teoremi sul hexagrammum mysticum, Reale Accademia dei Lincei 1876—1877) gegeben. Dazu werden noch einige weitere Eigenschaften der Figur entwickelt. Auch ist eine kurze historische Skizze der Resultate von Pascal, Brianchon, Steiner, Plücker, Kirkman, Cayley, Salmon und Veronese gegeben. Das Nähere ist in der Arbeit selbst nachzusuchen. Mz.

P. Treutlein. Der Beweis des Satzes von Brianchon und das Princip der Dualität. Hoffmann Z. X. 89-98.

Weinmeister. Herr Professor Treutlein über den Lehrsatz des Brianchon. Hoffmann Z. X. 191-193.

Weinmeister. Nachtrag zu der Bemerkung über den Lehrsatz des Brianchon. Hoffmann Z. X. 407-408.

Der Brianchon'sche Lehrsatz wird gewöhnlich durch Polarisation aus dem Pascal'schen abgeleitet. In der ersten Abhandlung wird nun ein von dem Pascal'schen Satze unabhängiger elementarer Beweis dieses Satzes für den Kreis mitgetheilt, welcher sich auf den Satz des Ceva und auf einen Lehrsatz von Chasles über die von den Eckpunkten eines Dreiecks an einen Kreis gezogenen 6 Tangenten gründet. Herr Weinmeister erhebt in der Besprechung des Treutlein'schen Aufsatzes gegen diesen interessanten neuen Beweis verschiedene subjective Bedenken und empfiehlt dagegen in dem Nachtrage ein anderes aus der Centralprojection hergeleitetes Beweisverfahren. Schl.

F. Folie. Restitution de priorité en faveur de M. Catalan. Nouv. Ann. (2) XVIII. 238-239.

Derselbe Artikel, über den nach den Bull. de Belg. bereits im Jahrbuch Bd. X. 1878. p. 389 berichtet worden ist. O.

J. Neuberg. Sur les triangles homologiques. N. C. M. V. 270-275.

Zwei homologe Dreiecke sind reciproke Polaren in Beziehung auf einen gewissen Kegelschnitt s_0; ihre Ecken sind die eines Sechsecks H_1, umschreibbar einem Kegelschnitte s_1, ihre Seiten die eines Sechsecks H_2, einschreibbar einem Kegelschnitte s_2; die s_1 und s_2 gemeinsamen Punkte und die Ecken eines der Dreiecke sind sieben Punkte eines Kegelschnitts s_3; die s_1 und s_2 gemeinsamen Tangenten und die Seiten eines der Dreiecke geben in ihren Berührungspunkten sieben Punkte eines Kegelschnitts s_4; die Sechsecke H_1, H_2, die Kegelschnitte s_1, s_2, die Kegelschnitte s_3, s_4 sind reciproke Polare in Beziehung auf s_0.

Mn. (O.)

G. Darboux. Sur les polygones circonscriptibles à un cercle. Darboux Bull. (2) III. 64-73.

Die bekannte Bedingung eines dem Kreise umschriebenen (nämlich ihn umschliessenden) Vierseits ist von Steiner (nicht, wie hier steht, berichtigt, sondern) in allgemeinerer Auffassung des Umschreibens dahin erweitert: „Die Gegenseiten eines dem Kreise umschriebenen (d. h. mit allen Seiten berührenden) Vierseits haben gleiche Summe oder Differenz“, und umgekehrt. Dasselbe folgt dann auch von den Paaren anstossender Seiten. Wenn also einer der vier Punkte variirt, so beschreibt er einen durch den Gegenpunkt gehenden Kegelschnitt um die zwei übrigen als Brennpunkte. Dieser Umstand dient hier zum Beweise der Umkehrung. Weiter wird daraus der Satz hergeleitet: „Variirt ein Tangentenvierseit *ABCD* bei constanten Seitenlängen und zwei festen Punkten *A*, *B*, so ist der Ort des eingeschriebenen Kreises ein Kreis, der zum Durchmesser das Segment hat, welches die Diagonalen *AC*, *BD* harmonisch theilt, wenn es in die Lage geführt wird, wo seine vier Ecken in gerader Linie liegen.“ In gleicher Weise wird dann die Untersuchung auf ein Polygon ausgedehnt.

H.

Laguerre. Sur la relation qui existe entre un cercle circonscrit à un triangle et les éléments d'une conique inscrite dans ce triangle. Nouv. Ann. (2) XVIII. 241-246.

Die Brennpunkte eines einem Dreieck einbeschriebenen Kegelschnitts mögen *F* und *G* heissen, der Mittelpunkt des dem Dreieck umbeschriebenen Kreises *O*. Auf *OF* bestimme man den Punkt *F'*, welcher *F* in Bezug auf den Kreis conjugirt ist, ebenso auf *OG* den Punkt *G'*, welcher *G* conjugirt ist. Durch *F* ziehe man die Parallele zu *OG*, diese schneide *GF'* in *R*. Dann ist das Rechteck aus den Strecken *GR* und *GF'* gleich dem Quadrat über der *F* und *G* enthaltenden Kegelschnitt-Axe.

Scht.

Laguerre. Sur la relation qui existe entre un cercle circonscrit à un quadrilatère et les éléments d'une conique inscrite dans ce quadrilatère. Nouv. Ann. (2) XVIII. 246-256.

Die Brennpunkte eines einem Kreis-Viereck einbeschriebenen Kegelschnitts mögen *F* und *G*, der Mittelpunkt des dem Viereck umschriebenen Kreises möge *O* heissen. Auf *OF* und *OG* bestimme man die Punkte *F'* und *G'*, welche in Bezug auf den Kreis beziehungsweise den Punkten *F* und *G* conjugirt sind. Der Schnittpunkt der Verbindungsgeraden *FG'* und *GF'* heisse *D*. Durch *O* ziehe man zu *OD* die Parallele, welche *F'G* in *R* schneidet. Dann ist das Rechteck aus den Strecken *GR* und *GF'* gleich dem Quadrate der *F* und *G* enthaltenden Kegelschnitt-Axe. Ferner ist *D* der constante Diagonalen-Schnittpunkt aller Vierecke, welche dem gegebenen Kreise und dem gegebenen Kegelschnitte zugleich umbeschrieben sind.

Am Schluss der Abhandlung wird das Analogon dieses Satzes für den Fall abgeleitet, dass einem Fünfeck ein Kreis umbeschrieben und eine Parabel einbeschrieben ist.

Scht.

A. Hurwitz. Ueber unendlich-vieldeutige geometrische Aufgaben, insbesondere über die Schliessungsprobleme. Clebsch Ann. XV. 8-16.

Der Fundamentalsatz der Algebra, dass eine Gleichung mit einer Unbekannten, die mehr Wurzeln hat, als ihr Grad angiebt, durch jeden Werth der Unbekannten befriedigt wird, also unendlich viele Wurzeln hat, führt für geometrische Aufgaben zu folgendem Kriterium: „Findet zwischen den Elementen einer einstufigen rationalen Mannigfaltigkeit, z. B. den Punkten einer rationalen Curve, eine (abgebraische) Correspondenz (m, n) statt — eine Correspondenz, vermöge welcher jedem Elemente P n Elemente P' und jedem Elemente P' m Elemente P entsprechen — und lassen sich bei dieser Correspondenz mehr als $(m+n)$ Coincidenzen aufweisen, d. h. Elemente, in denen zwei einander entsprechende Elemente zusammenfallen, so hat die Correspondenz unendlich viele solcher Elemente, und zwar ist jedes Element Coincidenz-Element.“ Es wird gezeigt, dass sich aus diesem Satze die auf die Schliessungsprobleme bezüglichen Sätze von Steiner, Poncelet, Darboux u. A. mit Leichtigkeit ergeben.

M.

Laguerre. Sur une propriété du cercle jouissant de la propriété que de chacun de ses points on voit sous un angle droit une conique donnée. Nouv. Ann. (2) XVIII. 204-206.

Die Polare eines beliebigen Punktes N der Ebene in Bezug auf einen Kegelschnitt schneide diese in den Punkten Q und Q', ferner den Kreis, von dessen Punkten aus der Kegelschnitt unter einem rechten Winkel erscheint, in den Punkten M und M'. Dann haben die QNQ' und MNM' gleiche Halbirungslinien. Ist der gegebene Kegelschnitt eine Parabel, so gilt ein specieller Satz, den man leicht findet, wenn man beachtet, dass dann der erwähnte Kreis zur Directrix wird.

Scht.

L. Maleyx. Propriété de la tangente à l'ellipse; construction du point commun à deux normales infiniment voisines; directrice relative à un foyer.
Nouv. Ann. (2) XVIII. 85-89.

Herleitung einiger bekannten Sätze und Constructionen für lie Ellipse mit Hülfe des mit der grossen Axe um einen Brennɔunkt geschlagenen Kreises. O.

ℑ. Bečka. Ueber einige Probleme aus der Theorie der quadratischen Strahleninvolution. Prag. Ber. 1878. 272-289.

Von dem Satze ausgehend, dass, wenn in einer quadratischen itrahleninvolution O einer der centralen Strahlen, X_1 und X_2 ein 'aar entsprechender Strahlen sind, immer die Gleichung gilt:

$$\mathrm{tg}\widehat{OX}_1.\mathrm{tg}\widehat{OX}_2 = \text{const.} = k^2,$$

ehandelt der Herr Verfasser in diesem Aufsatze einige Theoreme, elche sich auf quadratische Strahleninvolution beziehen und ..egelschnitte, sowie auch Systeme von Kegelschnitten betreffen. u Anfang wird nachgewiesen, dass in einer quadratischen trahleninvolution immer zwei Paare P_1P_2, R_1R_2 vorhanden sind, ie einen gegebenen Winkel ω einschliessen. Zur geometrischen onstruction dieser Paare dient dann der Hülfssatz: Drehen sich ie Schenkel eines bestimmten Winkels ω um einen festen unkt t, welcher auf einem gegebenen Kegelschnitte C liegt, so t die Enveloppe derjenigen Geraden, welche die Durchschnittsınkte der Schenkel mit dem Kegelschnitte C bei jeder Lage des 'inkels ω verbinden, ein Kegelschnitt $(C_t)_\omega$. Dieser wird dann rgänzungskegelschnitt genannt und in folgender Weise verandt: Ist eine quadratische Strahleninvolution durch zwei Paare ɛgeben, so lege man durch den Schnitt t dieser Involution einen eliebigen Kegelschnitt C, der die Paare M_1M_2, N_1N_2 in den ınkten m_1m_2, n_1n_2 trifft. Die Sehnen m_1m_2, n_1n_2 gehen dann ırch einen bestimmten Punkt p, durch den auch alle andern hnen gehen, welche Schnittpunkte x_1x_2 entsprechender Strahlen

X_1X_2 auf dem Kegelschnitt C verbinden. Nun construirt man den Ergänzungskegelschnitt $(C_t)_\omega$ und legt an diesen von p die beiden Tangenten; letztere treffen C in je einem Punktepaar, wodurch die geforderten Paare der Strahleninvolution bestimmt werden. Es wird dann auf besondere Fälle aufmerksam gemacht und gesagt, dass der Kegelschnitt $(C_t)_\omega$ nicht wirklich construirt zu werden braucht, sondern durch fünf seiner Tangenten ersetzt werden kann. Die Lage des Kegelschnitts $(C_t)_\omega$ zu demjenigen C wird ferner genauer discutirt. Es folgt nun die Erweiterung vorstehender Sätze auf ein Kegelschnittbüschel und am Schluss der Arbeit mit der Methode der analytischen Geometrie der Beweis des vorher erwähnten Hülfssatzes. Mz.

E. Hain. Zur Involution. Grunert Arch. LXIII. 407-413.

Mehrere Sätze über Involutionen auf den Seiten eines Dreiecks, z. B.: Die Durchschnittspunkte eines Kegelschnittes bestimmen mit den Ecken des Dreiecks auf den Seiten desselben drei Involutionen, deren Centralpunkte in einer Geraden liegen. Die Centra der drei Involutionen, welche der Feuerbach'sche Kreis auf den Seiten des Dreiecks mit den Ecken desselben bestimmt, liegen auf der Harmonikalen des Höhepunktes.

Schl.

J. Neuberg et E. Dewulf. Correspondance. N. C. M. V. 18-22.

Die Herren Neuberg und Dewulf beweisen verschiedene Sätze im Anschluss an gewisse Sätze von Herrn Folie, die sich auf die Theorie der Involutionen n^{ter} Ordnung beziehen. Als Beispiel möge dienen: Wenn zwei Vierecke *abcd*, *ABCD* einem Kegelschnitt eingeschrieben sind, und wenn die drei Seiten *ab*, *bc*, *cd* des ersten die drei Seiten *AB*, *BC*, *CD* respective in drei Punkten schneiden, die in gerader Linie liegen, so liegt 1) der Schnittpunkt *da*, *DA* der vierten Seite auch auf dieser Geraden

gelegen (Chasles) und 2) liegen die Punkte (*ab*, *CD*), (*AB*, *cd*), (*bc*, *DA*), (*BC*, *da*) auf einer zweiten Geraden. Mn. (O.)

J. C. V. Hoffmann. Zu einer Aufgabe von Schlömilch und zum Rulf'schen Satz. Hoffmann Z. X. 412-414.

Reproduction einiger Artikel aus Poncelet's: „Traité des propriétés projectives des figures", veranlasst durch eine Bemerkung auf p. 118 derselben Zeitschrift. O.

G. Veronese. Teoremi e costruzioni di geometria projettiva. Battaglini G. XVII. 172-183.

Mittheilung einer Reihe von untereinander nicht im Zusammenhang stehenden Sätzen und Constructionen aus der Lehre von den Kegelschnitten ohne Beweise. Der Satz (p. 176. teorema I.) findet sich auch bei v. Staudt („Beiträge z. G. d. L." p. 17).

B. K.

Weitere Lehrsätze und Lösungen von Aufgaben über Kegelschnitte in synthetischer Behandlung von Cochez, G. Turriff, J. L. McKenzie, R. Knowles, C. F. D'Arcy, D. Edwardes, R. Graham, Wolstenholme, J. L. Kitchin, Ch. Ladd, C. Sharp, F. D. Thomson, E. Anthony, L. A. Kittüdge, A. W. Scott, R. E. Riley, G. Heppel, E. Fauquembergue finden sich Educ. Times XXXI. 53, 57-58, 64-65; XXXII. 32-33, 46-47, 48-49, 58-59, 80-81, 83; Nouv. Ann. (2) XVIII 325.

O.

J. R. Rydberg. Konstruktioner af kägelsnitt i 3- och 4- punktskontakt. Lund Ak. Afh. 1879.

Aus bekannten Sätzen über Krümmungscentrum und Evolute eines Kegelschnittes leitet der Verfasser durch projectivische und

dualistische Transformationen entsprechende Theoreme her über Kegelschnitte, die mit einem gegebenen dreipunktige Berührung haben, über den Ort des Endpunktes der Polarsubtangente etc. Im zweiten Theile der Abhandlung werden verschiedene Constructionsaufgaben behandelt über Kegelschnitte in vierpunktiger Berührung, die als besonderer Fall der gewöhnlichen doppelten Berührung betrachtet wird. Bg.

J. Eilles. Zwei und drei Curven zweiter Ordnung in allgemeiner Lage. Pr. Landshut.

Im Anschluss an eine frühere Arbeit (F. d. M. IX. 1877. 427) bringt die vorliegende eine Darstellung der Theorie des Kegelschnitt-Büschels und -Netzes mit besonderer Berücksichtigung imaginärer Elemente. B. K.

M. Trebitscher. Reduction eines Büschels von Curven zweiter Ordnung auf ein Strahlenbüschel. Wien Ber. LXXX.

Der Herr Verfasser bringt die Punkte der Ebene in eine quadratische Verwandtschaft, bei welcher die imaginären Kreispunkte im Unendlichen als Doppelpunkte auftreten. Die Hauptdreiecke (a, b, c) und (a', b', c') dieser Verwandtschaft dürfen dann nicht mehr beliebig angenommen werden, sondern fünf Hauptpunkte z. B. $(a, b, c; a', b')$ bestimmen in diesem Falle den sechsten c'. Der Herr Verfasser zeigt, wie dieser Punkt gefunden wird, nämlich so: Um a, b, c beschreibe man den Kreis K_2, und ziehe die Sehne (cs) parallel mit $(a'b')$; es sind dann $(a'c')$ und $(b'c')$ resp. parallel mit (bs) und (cs) und damit ist c' gefunden. Dies wird durch die Principien der quadratischen Verwandtschaft begründet, wobei erwähnt wird, dass der unendlich fernen Geraden im einen System der Kreis im andern entspricht, der durch die Ecken des Hauptdreiecks geht, und dass jedem Punkte einer Seite $(a'b')$ eines Hauptdreiecks der Punkt c entspricht. Es wird nun gesagt, dass den durch einen Hauptpunkt a

gehenden Geraden, die Fundamentalstrahlen heissen, Gerade durch den homologen Hauptpunkt a' entsprechen, und hieran die Construction des Punktes, der einem gegebenen entspricht, geknüpft. Statt beliebiger Wahl von fünf Punkten kann auch das Hauptdreieck a, b, c des einen Systems und vom andern der Umkreis K'_2 und das Perspectivitätscentrum s' auf ihm beliebig angenommen werden, wo s' ebenso im zweiten System herauskommt, wie vorher von s im ersten System gesagt wurde. Dies Letztere benutzt nun der Herr Verfasser bei der geometrischen Betrachtung der Kegelschnitte und Kegelschnittbüschel; er rechnet diese Gebilde zum ersten System und nimmt vom zweiten System K'_2 und s' als Hilfselemente an. Wenn ein Kegelschnitt M_2 durch fünf Punkte a, b, c, d, e gegeben ist, so werden drei derselben — etwa a, b, c — zu Hauptpunkten des ersten Systems gemacht, die Elemente K_2 und s' des zweiten Systems willkürlich angenommen und dann gezeigt, wie das Geradenbild M' des Kegelschnitts, d. i. die ihm im zweiten System entsprechende Gerade gefunden wird, ferner wie man seinen Mittelpunkt, seine Axen und Asymptoten construirt. Ferner werden die Scheiteltangenten angegeben Dem wird eine Discussion über die Natur des Kegelschnitts hinzugefügt. Hierauf geht der Herr Verfasser zur Reduction des Kegelschnittbüschels auf ein Geradenbüschel über; es werden von den vier Grundpunkten (a, b, c, d) drei (a, b, c) Hauptpunkte des ersten Systems, und zu d wird im zweiten System (K'_2, s') der entsprechende k gesucht, der dann Scheitel des Geradenbüschels ist. Dies wird genauer entwickelt, und am Schluss der Arbeit werden auch noch Curven höherer Grade in Betracht gezogen. Mz.

Laguerre. Sur la courbe enveloppée par les axes des coniques qui passent par quatre points donnés et sur les axes des surfaces de révolution du second ordre qui passent par cinq points donnés. Sur les lignes spiriques. Nouv. Ann. (2) XVIII. 206-218.

Die Axen der ∞^1 Kegelschnitte, welche durch vier feste Punkte gehen, umhüllen bekanntlich eine Curve K vierter Ord-

nung dritten Ranges, deren Doppeltangente die unendlich ferne Gerade ist. Da diese Curve zu ihrer Bestimmung nur 6 Constante, eine Gruppe von 4 gegebenen Punkten aber 8 Constante erfordert, so muss es ∞^2 Gruppen von vier Punkten geben, welche eine gegebene Curve K in der angegebenen Weise erzeugen. Um die Lage dieser Gruppen zu bestimmen, beweist der Verfasser, dass die Enveloppe der Axen der einem gegebenen Viereck $ABCD$ umschriebenen Kegelschnitte zugleich die Enveloppe der Asymptoten der ∞^1 Kegelschnitte ist, welche dem Viereck $\alpha\beta\gamma\delta$ umschrieben sind, das man aus dem gegebenen Viereck $ABCD$ erhält, wenn man zu jedem der 4 Dreiecke ABC, ABD, ACD, BCD das Centrum des umbeschriebenen Kreises bestimmt. Dabei wird auch gezeigt, wie man aus einem solchen Viereck $\alpha\beta\gamma\delta$ das ursprüngliche Viereck $ABCD$ construiren kann.

Bei der Uebertragung auf den Raum wird sowohl der Complex der ∞^3 Axen untersucht, welche den durch vier gegebene Punkte gehenden Rotationsflächen zweiten Grades angehören, wie auch die Congruenz der ∞^2 Axen aller derjenigen ∞^2 Rotationsflächen zweiten Grades, welche durch fünf gegebene Punkte A, B, C, D, E gelegt werden können. Die letztgenannte Congruenz ist zugleich die Congruenz der Asymptoten der ∞^2 cubischen Raumcurven, welche durch die Centra der umbeschriebenen Kugeln der fünf Tetraeder $ABCD$, $ABCE$, $ABDE$, $ACDE$, $BCDE$ gelegt werden können.

Die vom Verfasser bewiesenen Sätze sind specielle Fälle von Sätzen, welche sich auf Curven vierter Ordnung beziehen, die eine Symmetrie-Axe besitzen und die beiden unendlich fernen imaginären Kreispunkte zu Doppelpunkten haben (lignes spiriques).

Scht.

Laguerre. Sur quelques propriétés des coniques homofocales. Bull. S. M. F. VII. 66-72.

Ein System von confocalen Kegelschnitten besitzt immer zwei Kegelschnitte, welche durch einen beliebigen Punkt M der Ebene gehen. Verbindet man die Centren der beiden Kreise,

welche diese beiden Kegelschnitte in M osculiren, so erhält man einen M eindeutig zugeordneten Strahl, welchen der Verfasser Axe des Punktes M nennt. Jeder Strahl μ der Ebene ist Axe zu drei Punkten M, M', M'' und der Kreis, welcher diese drei Punkte enthält, geht auch durch das gemeinsame Centrum der Kegelschnitte des Systems, sowie auch durch die beiden Punkte, in denen die beiden Axen der Kegelschnitte des Systems von der Geraden geschnitten werden, die auf μ in dem Berührungspunkte des μ berührenden Kegelschnitts senkrecht steht. Dieser μ berührende Kegelschnitt ist zugleich dem Dreieck $MM'M''$ einbeschrieben. Nachdem der Verfasser im ersten Capitel diese und einige weitere Eigenschaften eines Systems von confocalen Kegelschnitten bewiesen hat, löst er im zweiten Capitel namentlich die Aufgabe, die Osculationspunkte derjenigen Kreise zu finden, welche einen gegebenen Punkt als Centrum haben, und ein System confocaler Kegelschnitte osculiren sollen. Scht.

R. Pendlebury. Theorem relating to a system of conics.
Messenger (2) VIII. 130.

Der Satz, um den es sich handelt, heisst: Wenn ein System von Kegelschnitten so beschaffen ist, dass das Büschel von Tangenten, das von einem Punkte gezogen worden ist, in Involution ist, so besitzt das System von Kegelschnitten vier gemeinsame Tangenten. Glr. (O.)

F. Schur. Synthetischer Beweis der Identität einer Tripelcurve mit dem Erzeugnis eines Kegelschnittbüschels und eines ihm projectiven Strahlbüschels.
Schlömilch Z. XXIV. 119-123.

Für die im Titel genannte Identität hatte Herr Milinowski in Schlömilch's Z. XXIII. 327-336 (s. F. d. M. X. 1878. p. 397.) einen Beweis gegeben, der dort synthetisch genannt ist, aber dies eigentlich nicht ist. Deshalb veröffentlicht Herr Schur hier seinen rein synthetischen Beweis für die in Rede stehende, auch

von Reye in seiner „Geometrie der Lage“ und von Schröter in seinen „Kegelschnitten“ (pag. 507) besprochene Identität. Man nehme ein Kegelschnittbüschel und ein ihm projectives Strahlbüschel an und auf der von diesen beiden Büscheln erzeugten Curve dritter Ordnung drei beliebige Punkte x, y, z. Wenn man dann durch einen vierten Punkt m der Curve alle möglichen Strahlen zieht, auf jedem dieser Strahlen die beiden sonstigen Schnittpunkte mit der Curve bestimmt, und durch diese Schnittpunkte den auch durch x, y, z gehenden Kegelschnitt legt, so erhält man ∞^1 Kegelschnitte, von denen der Verfasser synthetisch nachweist, dass sie ein Kegelschnittbüschel bilden, welches dem durch m gezogenen Strahlbüschel projectiv ist. Zweitens zeigt Herr Schur dann noch direct, dass das Erzeugnis eines Kegelschnittbüschels und eines ihm projectiven Strahlbüschels sich durch zwei in halb perspectiver Lage liegende Strahleninvolutionen erzeugen lässt.

Scht.

J. Solin. Ueber Curven dritter Ordnung, welche eine unendlich ferne Rückkehrtangente haben, und deren Auftreten in der geometrischen Statik. Prag. Abh. (3) IX.

Der Verfasser entwickelt in dieser ziemlich umfangreichen Abhandlung einige Eigenschaften der oben bezeichneten Curven auf synthetischem Wege. Referent muss gestehen, dass der Aufwand an Hilfsmitteln ihm in keinem Verhältnisse zu dem sehr einfachen Zwecke der Untersuchung zu stehen scheint. Denn da die Gleichung der Curven in Parallelcoordinaten bei passender Wahl der Axen die einfache Form

$$y = \frac{1}{p^2} x^3$$

annimmt, und sich hieraus die in Betracht gezogenen Eigenschaften auf das einfachste ergeben, so muss man der Vorliebe des Verfassers für synthetische Methoden ein allzugrosses Opfer bringen, wenn man sich durch die ersten vierzehn grossen Quartseiten hindurcharbeiten soll. Synthetische Methoden sollten nur da angewendet werden, wo sie zur Vermeidung umständlicher

Rechnungen und zu durchsichtiger Entwickelung dienen, nicht aber, um an sich einfache Dinge complicirt darzustellen. Die statischen Anwendungen, in welchen der Herr Verfasser von den betrachteten Curven Gebrauch macht, sind nun folgende: Er betrachtet zunächst einen einfachen horizontalen Balken, der in zwei Punkten (respective Querschnitten) A und B unterstützt ist, und dessen Belastung zwischen A und B stetig vertheilt ist, und zwar so, dass die Belastung eines Längenelements dx des Balkens im Querschnitte mit dem Abstande x von A proportional mit x ist, so dass die Belastung graphisch durch ein rechtwinkliges Dreieck dargestellt wird, dessen eine Kathete AB ist. Um dann die Spannungen im Innern des Balkens zu beurtheilen, wird im Abstande x von A ein Querschnitt gelegt. Denkt man sich durch diesen Querschnitt den Balken getheilt, so hat man in demselben an dem linken Balkentheile eine Transversalkraft und ein Kräftepaar, an dem rechten die entgegengesetzte Kraft und das entgegengesetzte Kräftepaar anzubringen, um das Gleichgewicht zu erhalten. Hierdurch wird also die gegenseitige Einwirkung der beiden Balkentheile im Querschnitte x dargestellt. Stellt man nun für einen, etwa den linken Balkentheil die Transversalkraft und das Moment durch eine Ordinate zur Abscisse x graphisch dar, so erhält man bei veränderlichem x zwei Curven, welche als Curve der Transversalkräfte und als Momentencurve bezeichnet werden. Die erstere ist eine Parabel, deren Durchschnitt mit AB den sogenannten mittleren Querschnitt ergiebt. Die letztere ist eine der oben besprochenen Curven dritter Ordnung.

Es wird dann durch graphische Methoden der Uebergang zu dem Fall entwickelt, wo statt des Belastungsdreiecks ein Belastungstrapez auftritt.

Weiter wird die Momentencurve eines einfachen Balkens für variable gleichförmige Belastung aufgesucht, und endlich die Influenzcurven für Momente der einzelnen Querschnitte eines continuirlichen Trägers von constantem Querschnitte.

A.

G. Jung. Ricerche intorno ai sistemi polari. Nota I., II., III.
Rend. Ist. Lomb. (2) XII. 169-179, 218-228, 535-536.

G. Jung. Recherches sur les systèmes polaires.
Nouv. Ann. (2) XVIII. 444-459.

In der Theorie der Trägheitsmomente ebener Systeme paralleler Kräfte P_i mit festen Angriffspunkten tritt bekanntlich ein gewisses Polarsystem auf. Werden zu den Strahlen eines Büschels V je in der Entfernung des Trägheitsradius, der dem Systeme in Bezug auf den Strahl zugehört, beiderseitig die Parallelen gezogen, so umhüllen diese die Trägheitscurve (V) von V, die vom zweiten Grade ist; die dem Schwerpunkt O des Systems zugehörige ist die Centralcurve C. Es sei D ihre conjugirte oder supplementäre; so ist diese die Nullcurve des Systems, eingehüllt von den Geraden, deren Trägheitsmoment Null ist, und die Ordnungscurve des erwähnten Polarsystems. Zu jeder Geraden nämlich ist in Bezug auf sie der Pol der Mittelpunkt der statischen Momente der P_i in Bezug auf die Gerade, wenn diese Momente an den Angriffspunkten der P_i als Kräfte angebracht werden. (Vergl. insbes. Cremona's lith. Vorlesungen über graphische Statik. Mailand 1868—1869.)

Dieses Polarsystem entwickelt Herr Jung rein geometrisch. Er geht von einem gegebenen Polarsystem Σ aus, dessen (reelle oder imaginäre) Ordnungscurve D sei; er nennt es — abweichend von der Benennung in den Steiner-Schröter'schen Vorlesungen — hyperbolisch oder elliptisch, je nachdem D eine Hyperbel oder eine (reelle oder imaginäre) Ellipse ist. Zu jedem Elemente wird nun das ihm in Bezug auf das Centrum von D symmetrische Element construirt, dasselbe bildet mit dem dem ersteren in Σ entsprechenden ein neues Polarsystem Σ'; die conjugirte Curve C von D ist dessen Directrix; beide sind gleichzeitig Hyperbeln oder gleichzeitig Ellipsen, im letzteren Falle aber nicht gleichzeitig reell. Herr Jung nennt C die Centralcurve von Σ, sie ist auch, ebenso wie D, ihre eigene Polarcurve in Σ, aber in anderer Art: wenn ein Punkt die C durchläuft, so umhüllt seine Polare in Σ die C, aber je im diametral gegenüberliegenden Punkte berührend.

In der zweiten Note werden die Trägheitscurven (V) geometrisch construirt: für jeden Punkt V als Mittelpunkt wird ein Kegelschnitt construirt, für den O und die Polare v von V in Σ Pol und Polare ist, und der die sämmtlichen conjugirten Strahlen um V in Σ zu conjugirten Durchmessern hat, was, weil von der früheren Bedingung nicht unabhängig, nur eine einfache Bedingung ist. In dualer Weise wird zu jeder Geraden v ein Kegelschnitt (v) construirt, und diese Curven (V) und (v) finden eingehendere Betrachtung.

In der dritten Note wird besprochen, dass das Polarsystem Σ' aus Σ auch so entsteht, dass die eine der beiden Ebenen, die in Σ reciprok bezogen sind, zuerst um die eine der Axen von Σ (oder D), dann um die andere umgelegt wird. Legt man diese Ebene erst um die eine, dann um die andere, dann nochmals um die erste Axe um, so geben die vier Lagen der bewegten Ebene mit der festen vier Polarsysteme, von denen zwei Hyperbeln, eins eine reelle, eins eine imaginäre Ellipse zur Directrix hat, und welche vier conjugirt harmonische Polarsysteme sind, wie sie Steiner-Schröter § 55, 57 betrachtet.

Der Aufsatz der Nouv. Ann. ist eine Uebersetzung der ersten Note. Sm.

F. Folie. Fondements d'une géometrie supérieure cartésienne (1872) et éléments d'une théorie des faisceaux (1878). Analyse faite par l'auteur. Darboux Bull. (2) III. 278-279.

In dem hier vorliegenden Auszuge aus den im Titel genannten Büchern theilt der Herr Verfasser mit, dass es ihm gelungen sei, die Mehrzahl der fundamentalen Theoreme, die bis dahin nur für Kegelschnitte bekannt waren, auf höhere Curven und Flächen auszudehnen. Bei den ebenen Curven lassen sich diese Theoreme bis zu Curven fünften Grades, doch darüber hinaus im Allgemeinen nicht mehr, übertragen. Bei Flächen geschieht die Uebertragung bis zum dritten Grade inclusive. Der Herr Verfasser giebt nun einige Theoreme an, welche die Be-

ziehungen conjugirter Dreiseite und Vierseite zu den Curven dritten Grades betreffen, z. B. dass das Product der Entfernungen eines Punktes der Curve von den Seiten des einen Dreiecks zu dem Product der Entfernungen von den Seiten des andern Dreiecks in constantem Verhältnis steht. Nachher wird das Entsprechende von den Flächen erwähnt. Mz.

S. Kantor.*) Una semplice generazione della curva Jacobiana di una rete di curve di 3° ordine. Acc. R. d. L. (3) III. 93-95.

Es wird für die Jacobi'sche Curve des Netzes von Curven dritter Ordnung, die durch 7 Punkte $A_1 \dots A_7$ gehen, folgende Construction hergeleitet: Man suche zunächst diejenigen Punkte $A'_4 A'_5 A'_6 A'_7$ auf, welche den Punkten $A_4 A_5 A_6 A_7$ vermöge der quadratischen (Steiner'schen) Verwandtschaft, deren Fundamentalpunkte $A_1 A_2 A_3$ sind, entsprechen, und beziehe die Kegelschnitte B_k durch $A_4 A_5 A_6 A_7$ auf die Kegelschnitte C_k durch $A'_4 A'_5 A'_6 A'_7$ in der Weise projectivisch auf einander, dass für die Punkte β_k von B_k und resp. γ_k des entsprechenden Kegelschnitts C_k das Strahlenbüschel

$$\beta_k(A_4 A_5 A_6 A_7) \wedge \gamma_k(A'_4 A'_5 A'_6 A'_7)$$

ist; jedem C_k entspricht ferner vermöge der quadratischen Verwandtschaft eine Curve vierter Ordnung D_k mit den Doppelpunkten $A_1 A_2 A_3$ und den einfachen Punkten $A_4 A_5 A_6 A_7$, und alle D_k bilden ein Curvenbüschel, das auch zu dem Büschel der B_k projectivisch ist; das Erzeugnis dieser beiden Büschel ist dann die gesuchte Jacobi'sche Curve. Gleichzeitig ergiebt sich, dass sie von der sechsten Ordnung ist, $A_1 \dots A_7$ zu Doppelpunkten hat, und die Tangenten in einem Doppelpunkte gleichzeitig die Tangenten derjenigen Curve des Netzes sind, welche in diesem Punkte einen Doppelpunkt hat (cfr. Cremona, Curve piane Nro. 96). T.

*) In den Acc. R. d. Linc. steht in Folge eines Druckfehlers „Cantor“ statt „Kantor.“ O.

S. Kantor. Ueber eine Gattung von Configurationen in der Ebene und im Raume. Wien. Ber. LXXX.

In seiner Untersuchung „Ueber eine Gattung merkwürdiger Geraden und Punkte bei vollständigen n-Ecken auf dem Kreise“ (Wien. Ber. 1878, s. F. d. M. X. p. 386) war der Verfasser zu einer merkwürdigen Configuration von Punkten und Linien gelangt; in der gegenwärtigen Mittheilung macht derselbe auf die ganze Serie von Configurationen (d. h. Anordnungen von Geraden und Punkten, wo durch jeden Punkt eine bestimmte Zahl von Geraden geht und sich in jeder Geraden eine bestimmte Anzahl Punkte finden) aufmerksam, welche hierdurch gewonnen sind.

Es werden zwei Figuren abgeleitet, die durch Verallgemeinerung aus dem bekannten Satze über die perspectivische Lage zweier Dreiecke und der Bemerkung Hesse's hervorgehen, dass die drei Perspectivitätsaxen g_3 dreier Dreiecke mit demselben Perspectivitätscentrum sich in einem Punkte T_3 treffen. Liegen nämlich die Ecken dreier Vierecke auf vier durch einen Punkt gehenden Strahlen, so liefern die vier unter einander perspectivischen Dreieckstripel derselben vier Hesse'sche Punkte T_3, welche wiederum in einer Geraden g_4 liegen; andererseits: Liegen die Ecken von vier Vierecken auf vier durch einen Punkt gehenden Strahlen, so liefern dieselben, viermal zu dreien geordnet, vier Gerade g_4, welche wiederum durch denselben Punkt T_4 gehen. Man kann in der Verallgemeinerung weiter zu 5-, 6-Ecken u. s. w. fortschreiten, indem man abwechselnd die Anzahl der Ecken und Vielecke je um eine Einheit wachsen lässt. So gelangt man zu den Sätzen: 1) Construirt man $n-1$ vollständige n-Ecke, deren Ecken auf n gegen einen Punkt convergirenden Strahlen liegen, so erhält man je eine Reihe von $n-1$ vollständigen $(n-1)$-Ecken in jede Combination dieser Strahlen zu $n-1$ eingeschrieben, und jede dieser Reihen liefert einen Punkt T_{n-1}; diese n Punkte T_{n-1} liegen alle in einer Geraden g_n. 2) Werden n vollständige n-Ecke in der beschriebenen Lage angenommen, so treffen sich die für ihre n Combinationen zu je $n-1$ construirten Geraden g_n in demselben Punkte T_n. Von den so entstandenen beiden Figuren liefert

nun die erste eine Configuration von $\binom{2n-1}{n-1}$ Punkten, durch deren jeden n Gerade gehen, und von ebensoviel Geraden, auf deren jeder n Punkte liegen; die zweite dagegen eine solche von $\binom{2n}{n}$ Punkten, deren jeder n Gerade, und von $\binom{n-1}{2n}$ Geraden, deren jede $n+1$ Punkte enthält. Durch eine leichte weitere Verallgemeinerung wird eine Configuration hergestellt, so dass auf jeder Geraden m Punkte liegen und nach jedem Punkte eine ganz beliebige Anzahl n von Geraden gehen. Diese Configuration — wie ausdrücklich hervorgehoben wird, keineswegs die allgemeinste von der genannten Eigenschaft — kann man sich, wie der Herr Verfasser ausführt, noch in anderer Weise entstanden denken. Schliesslich werden analoge Betrachtungen über räumliche Gebilde angestellt. T.

S. Kantor. Quelques théorèmes nouveaux sur l'hypocycloïde à trois rebroussements. Darboux Bull. (2) III. 136-144.

Mit Hülfe seiner Untersuchungen über Gruppen von Punkten auf einer Kreislinie hat der Verfasser eine grosse Reihe neuer Eigenschaften über die Steiner'sche Hypocycloide gewonnen, die hier zusammengestellt sind. Sie beziehen sich auf Vielseite, welche der Curve umschrieben sind, ferner auf dreifach berührende Ellipsen. (S. Wien. Ber. 1878 u. F. d. M. X. p. 407). T.

S. Kantor. Zur Geometrie von Punktgruppen auf dem Kreise. Clebsch Ann. XIV. 323-331.

Fällt man von einem Punkte P eines Kreises O auf die Seiten eines eingeschriebenen Dreiecks $A_1A_2A_3$ Senkrechte und verlängert dieselben, bis sie den Kreis in resp. G_1 G_2 G_3 treffen, so haben die drei Geraden A_iG_i und die Gerade σ_3, welche durch ihre Fusspunkte auf den Dreiecksseiten geht, dieselbe Richtung (III). Sind A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 bezw. parallel zu A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 und

$P_1 P_2 P_3$ die ersten Drittheilpunkte der Bogen $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$, so bilden P_1 P_2 P_3 ein gleichseitiges Dreieck; diese und nur diese Punkte P haben die Eigenschaft, dass die zugehörige Richtung (III) mit der ihres Halbmessers übereinstimmt.

Ferner analog: Fällt man von einem Punkt P eines Kreises O auf eine Seite $A_{x_1} A_{x_2}$ eines eingeschriebenen Vierecks $A_1 \dots A_4$ eine senkrechte Sehne, verbindet deren Endpunkte mit A_{x_3} und zieht zu dieser Verbindungslinie wieder eine senkrechte Linie durch P, verbindet endlich deren Endpunkt mit A_{x_4}, so hat diese Linie eine von der Wahl der Complexion $x_1 \dots x_4$ unabhängige Richtung, die Richtung (IV) für P. Lässt man von den Punkten A_i die Sehnen $A_i B_i$ von jener Richtung (III) ausgehen, welche dem Punkte A_i bezüglich des gegenüberliegenden Dreiecks (d. h. des von den übrigen A gebildeten) zukommt, und sucht den ersten Viertheilpunkt P_i des Bogens $A_i B_i$, so bilden die vier Punkte P_i ein Quadrat, und für jeden solchen Punkt P_i hat die zugehörige Linie (IV) mit dem Radius OP_i gleiche Richtung. Der Ableitung dieser zum Theil Bekanntes (cfr. Steiner, Crelle J. LIII.) enthaltenden Sätze und einigen weiteren Ausführungen folgt dann unmittelbar die interessante Verallgemeinerung für ein beliebiges Kreisvieleck.

Die oben erwähnte Gerade σ_3, welche einem Punkte bezüglich eines Dreiecks zugeordnet ist, giebt Anlass zur Erzeugung entsprechender Geraden für Vierecke, Fünfecke u. s. w. Ist ausser P das Viereck $A_1 A_2 A_3 A_4$ gegeben, so entstehen vier Gerade σ_3, die Fusspunkte der von P auf diese Geraden gefällten Senkrechten liegen in einer Geraden σ_4. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhält man allgemein: Die Senkrechten aus P zu seinen Geraden σ_{n-1} bezüglich der n vollständigen $(n-1)$-Ecke eines gegebenen n-Ecks treffen diese σ_{n-1} in Punkten einer Geraden σ_n d. h. die σ_{n-1} sind Tangenten einer um P als Brennpunkt beschriebenen Parabel mit der Scheiteltangente σ_n; die Richtung von σ_n ist identisch mit der Richtung (N) (analog der Richtung (III) (IV) u. s. f.) für P bezüglich des n-Ecks. T.

S. Kantor. Zur Theorie der cubischen Involution auf einem Kegelschnitte. Prag. Ber. 1878. 312-316.

Ist auf einem Kreise *C* eine cubische Involution von Punkten gegeben, so haben die Involutionsdreiecke, die bekanntlich einem Kegelschnitte *I* umschrieben sind, folgende Eigenschaften: Ihre Höhen hüllen eine Curve vierter Klasse ein, welche die unendlich-ferne Gerade zur Doppeltangente hat, der Ort der Höhenpunkte ist ein Kreis *H*, der der Schwerpunkte ein Kreis *S*, und die Centren von *H*, *C*, *I* liegen auf einer Geraden. Die einem Punkte *P* von *C* bezüglich aller Involutionsdreiecke entsprechenden Fusspunktgeraden σ gehen durch einen Punkt *u*, der Winkel zweier dieser Geraden σ ist gleich dem Winkelabstande, welchen die Höhenschnitte der beiden Dreiecke, zu denen sie gehören, auf dem Kreise *H* von einander haben; durchläuft *P* den Kreis *C*, so umhüllen die Convergenzpunkte einen Kegelschnitt *U*, dessen Centrum ebenfalls auf der Geraden der Centren von *H*, *C*, *I* liegt.

An die Ableitung dieser Sätze schliessen sich noch Beziehungen für den Abstand zweier Höhenschnitte und der interessante Satz, dass die Differenz der Axen der Ellipse *U* gleich dem Radius des Kreises *C*, also ganz unabhängig von der Art der cubischen Involution ist. T.

S. Kantor. Geometrische Untersuchungen. II. Schlömilch Z. XXIV. 54-57.

Dieselben führen eine Angabe in der Arbeit desselben Verfassers „Ueber Eigenschaften des Dreiecks u. s. w.“ in den Wien. Ber. 1877 (cfr. F. d. M. IX. p. 425) näher aus; dieselbe bezieht sich auf die Winkel, welche die Axen der Ellipse *V* — d. i. derjenigen Ellipse, welche entsteht, wenn man zu einem Punkte *P* eines Kreises die Fusspunktgeraden σ bezüglich zweier eingeschriebenen Dreiecke *A* und *A'* und deren Schnittpunkt construirt und *P* den Kreis durchlaufen lässt — mit der Euler'schen Geraden *OH* des Dreiecks *A* bilden. Ferner fügt der Verfasser den Satz hinzu: Die Axen der Ellipse *V* sind die Halbirungslinien des-

jenigen Winkels, welcher von der Euler'schen Geraden *OH* mit dem Durchmesser *PP'* gebildet wird, dessen Endpunkten die zu *OH* parallele und die zu *OH* senkrechte Fusspunktgerade σ (bezüglich des Dreiecks *A*) entsprechen. T.

S. Kantor. Weitere symmetrische Beziehungen an vollständigen Vierecken. (Fortsetzung.) Wien. Ber. LXXIX.

Eine weitere Fortsetzung der Arbeiten in den Wien. Ber. LXXVI. u. LXXVIII.: cfr. F. d. M. IX. 1877. p. 426 u. X. 1878. p. 385. T.

S. Kantor. Verallgemeinerung eines Poncelet'schen Satzes. Borchardt J. LXXXVI. 269-279.

Der Poncelet'sche Satz, dass die Ecken zweier einer C_2 umschriebenen Dreiseite allemal auf einer neuen C_2 liegen, und der diesem reciproke wird in der Weise verallgemeinert, dass anstatt zweier Dreiseite zunächst ein Dreiseit und ein Vierseit, welche einer C_2 umschrieben sind, in Betracht gezogen werden; ihre neun Eckpunkte bilden die Basispunkte eines Curvenbüschels dritter Ordnung von specieller Natur; unter den Curven C_3 des Büschels giebt es 4 zerfallende und nur 4 eigentliche Curven mit einem Doppelpunkte (diese 4 Doppelpunkte bilden — wie der Verfasser nachträglich bemerkt hat — ein Viereck mit dem festen Dreiseit als Diagonaldreiseit); sechs von den C_3 berühren die C_2 und alle Wendetangenten des Büschels hüllen eine Curve neunter Klasse mit vier dreifachen Tangenten ein. Die „beigeordneten“ Geraden des Grundvierseits (d. h. diejenigen, auf welchen die drei Tangentialpunkte liegen, deren jeder je zwei gegenüberliegenden Ecken gemein ist) bezüglich sämmtlicher C_3 werden von einer Curve dritter Klasse eingehüllt, welche von den Seiten des Vierseits berührt wird. Die zwölf Eckpunkte zweier der C_2 umschriebenen Vierseite liegen auf ein und derselben C_3, der sich noch unendlich viele andere Vierseite einschreiben lassen, deren Seiten ebenfalls die C_2 berühren; von der C_3 lehrt der Verfasser beliebig viele

Punkte durch einfaches Linienziehen construiren. Construirt man zu jedem Vierseit die „beigeordnete“ Gerade, so umhüllen alle diese Geraden einen Kegelschnitt, welcher ebenso wie C_2 zu C_3 involutorisch liegt und mit C_2 ein gemeinsames Tangentenvierseit auf C_3 besitzt. Sind drei Vierecke einer C_2 eingeschrieben, so haben die Curven der Klasse, welche von den Seiten je zweier dieser Vierecke berührt werden, drei Tangenten gemeinsam (cfr. den Satz von drei eingeschriebenen Dreiecken in Schröter-Steiner's Kegelschnitte).

Den Fall eines umgeschriebenen Vier- und Fünfseits und zweier eingeschriebenen Fünfseite noch betrachtend gelangt der Verfasser schliesslich zu einer Ausdehnung des Vorhergehenden auf beliebige umschriebene Vielseite — Resultate, auf welche Herr Weyr in seiner Theorie der Involutionen höherer Grade auf einem Kegelschnitte (Borchardt J. LXXII. p. 285—292) auf anderem Wege geführt worden ist und die F. d. M. II. 1870. p. 383f. angeführt sind. T.

E. Dewulf. Observations sur le compte rendu d'un mémoire de M. Andréief. Darboux Bull. (2) III. 382-383.

Herr Bugaïef giebt im „Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques“ (année 1879) eine Analyse der Schrift von Andréief: „Des affinités géometriques appliquées au problème de la construction des courbes“, zu welcher der Herr Verfasser bemerkt, dass Jonquières nicht nur, wie dort gesagt ist, einige besondere Principien zur Construction der Curven vierter Ordnung aufgestellt hat, sondern dass er eine allgemeine und gleichmässige Art angegeben hat, geometrische Curven beliebig hoher Ordnung, die durch eine hinreichende Anzahl von Punkten gegeben sind, zu construiren; dass er ferner diese Art angewandt hat zur Construction aller Curven vierten Grades mit Doppelpunkten, einiger Curven fünften und sechsten Grades mit vielfachen Punkten und besonders der allgemeinen Curve vierten Grades, welche durch 14 Punkte bestimmt ist. Auch hat er fünf verschiedene Arten gegeben, diese Curve zu beschreiben, sowie einige Fragen behandelt, welche den Durchschnitt der Curve vierten Grades mit ge-

raden Linien, Kegelschnitten oder Curven dritten Grades betreffen. In einer anderen Abhandlung hat er noch eine Beschreibungsart der allgemeinen Curve fünften Grades, die durch zwanzig Punkte bestimmt ist, gegeben. Ausserdem bemerkt der Herr Verfasser noch, dass Herr Bugaïeff in seiner geschichtlichen Uebersicht der allmäligen Entwickelung der geometrischen Transformationen eine Abhandlung von Jonquières: „De la transformation géométrique des figures planes“ (année 1864) unerwähnt gelassen hat.

Mz.

A. Ameseder. Ueber Curven vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten. Wien. Ber. 1879.

A. Ameseder. Ueber einfach berührende Kegelschnitte der Curven vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten. Wien. Ber. 1879.

A. Ameseder. Ueber rationale Curven dritter und vierter Ordnung. Wien. Ber. 1879.

A. Ameseder. Rationale Curven vierter Ordnung, deren Doppelpunktstangenten zum Theil oder ganz in Inflexionstangenten übergehen. Wien. Ber. 1879.

A. Ameseder. Bemerkungen über das Erzeugnis eines eindeutigen Strahlenbüschels und eines zweideutigen Strahlensystemes zweiter Classe. Grunert Arch. LXIV. 109-113.

Der Durchschnitt eines Strahlbüschels mit einer projectiven Tangenteninvolution auf einem Kegelschnitte T ist eine allgemeine Curve 4^{ter} Ordnung mit drei Doppelpunkten, welche von diesem Kegelschnitte in vier Punkten berührt wird. Der Verfasser erweist in der ersten Arbeit, von dieser Erzeugung ausgehend, die bekannten Eigenschaften dieser Curven. Insbesondere verwendet er eine quadratische Verwandtschaft, welche durch die genannte projective Erzeugung vermittelt wird, zur näheren Untersuchung der Inflexions- und Doppeltangenten, sowie ihrer Realitätsverhältnisse. Ferner ergiebt sich, dass zu jeder gegebenen C_4 eine ein-

fach unendliche (dreifache) Reihe vierfach berührender Kegelschnitte T gehört, vermöge deren dieselbe projectiv erzeugt werden kann. In der zweiten Abhandlung wird dies wieder aufgenommen und gezeigt, dass auch umgekehrt jeder vierfach berührende Kegelschnitt der Curve zur Construction derselben verwendet werden kann. Den Inhalt der dritten Arbeit bildet eine ausführliche Untersuchung der rationalen Curve dritter Ordnung, in welche die C_4 übergeht, wenn das Centrum der Involution auf dem Kegelschnitte T auf diesen selbst gerückt wird.

V.

C. Bobek. Ueber rationale Curven vierter Ordnung.
Wien. Ber. LXXX.

Wie die soeben erwähnten Arbeiten verfolgt auch diese die Absicht, die bekannten Eigenschaften der rationalen Curven 4ter Ordnung (mit 3 Doppelpunkten) synthetisch zu gewinnen. Insbesondere sind hier die Realitätsverhältnisse eingehend berücksichtigt. Der Verfasser definirt die rationale C_4 als Durchschnitt zweier projectivischer Kegelschnittbüschel mit drei gemeinsamen Punkten. Zur weiteren Untersuchung dient jedoch hauptsächlich die reciproke Steiner'sche Verwandtschaft; mit ihrer Hülfe ermittelt er zunächst bei den Curven mit reellen Doppelpunkten die Tangenten in den letzteren, die von denselben ausgehenden Tangenten, sowie die vier Doppeltangenten. Im zweiten Theil der Arbeit werden dann sehr ausführlich die analogen Constructionen für den Fall zweier imaginärer Doppelpunkte durchgeführt und schliesslich die Fälle behandelt, in denen die Doppelpunkte zum Theil oder alle in Spitzen übergehen. Als Anhang ist eine Aufzählung sämmtlicher rationaler, nicht durch reelle Collineationen in einander überführbarer Curven vierter Ordnung hinzugefügt.

V.

E. Dewulf, A. Schoute. Construire une courbe rationelle du quatrième ordre qui ait deux points doubles en a_1 et a_2 et qui passe par les sept points simples 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Darboux Bull. (2) III. 384-400.

Die im Titel angegebene Aufgabe, welche, wie gezeigt wird, eine endliche Zahl von Lösungen hat, erfährt eine Behandlung nach den Principien von Jonquières und Cremona. Zuerst wird gesagt, dass mit der Kenntnis eines Punktes x von der Art, dass die fünf Kegelschnitte des Büschels $(a_1, a_2, x, 6)$, die durch 1, 2, 3, 4, 5 gehen, resp. projectivisch sind den fünf Kegelschnitten des Büschels $(a_1, a_2, x, 7)$, die durch 1, 2, 3, 4, 5 gehen, die Aufgabe gelöst ist. Denn jeder weitere Punkt P, der als vierter Durchschnittspunkt je zweier entsprechender Kegelschnitte:

$$(a_1, a_2, x, 6, P) \quad \text{und} \quad (a_1, a_2, x, 7, P),$$

von denen der eine dem ersten Büschel, der andere dem zweiten angehört, auftritt, gehört der gesuchten Curve vierter Ordnung an. Es wird hier auseinandergesetzt, wie diese geometrische Betrachtung zu zwei Gleichungen für die beiden unbekannten Coordinaten von x führt.

Eine etwas veränderte Anschauung der Sache ergiebt sich so: Die fünf Kegelschnittbüschel:

$$(a_1, a_2, 6, 1), (a_1, a_2, 6, 2), \ldots (a_1, a_2, 6, 5)$$

bestimmen auf einer beliebigen Geraden l fünf Reihen von involutorischen Punktepaaren. Wäre x bekannt, so gehörten die Kegelschnitte:

$$(a_1, a_2, x, 6, 1)\ (a_1, a_2, x, 6, 2) \ldots (a_1, a_2, x, 6, 5)$$

resp. dem ersten, zweiten, u. s. w. fünften Kegelschnittbüschel an, und die von ihnen auf l bestimmten Punktepaare den entsprechenden Involutionen. Diese fünf Punktepaare bilden aber selbst eine Involution, weil sie auf l von fünf Kegelschnitten des Büschels $(a_1, a_2, x, 6)$ ausgeschnitten werden. Dasselbe kann man aussprechen, wenn man 7 für 6 nimmt; und die dann hervorgehende Involution von fünf Punktepaaren mittelst des Kegelschnittbüschels $(a_1, a_2, x, 7)$ ist der vorigen projectivisch. Man hat daher diese Aufgabe: Wenn sich auf einer Geraden l zwei Systeme

von fünf Involutionen finden, so sollen in jedem der beiden Systeme fünf Punktepaare aufgefunden werden, die resp. den fünf Involutionen angehören und die beiden Bedingungen erfüllen, dass 1) die fünf Punktepaare in jedem System eine Involution bilden, und 2) diese beiden neuen Involutionen projectivisch sind. Vermittelst eines Kreises M und eines auf ihm willkürlich angenommenen Punktes O, der mit den Punktepaaren einer dieser Involutionen verbunden wird, erhält man ein involutorisches Büschel; die Paare conjugirter Strahlen dieser Involution bestimmen auf dem Kreise Bogen, deren Sehnen durch denselben Punkt b gehen; so findet man aus den fünf Involutionen des ersten Systems fünf Punkte $b_1, b_2 \dots b_5$ und aus denen des zweiten Systems: $\beta_1, \beta_2 \dots \beta_5$. Nun denke man sich zwei Punkte p und π derartig, dass die Strahlbüschel:

$$p(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) \quad \text{und} \quad \pi(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5)$$

projectivisch sind. Die fünf Strahlen des ersten Büschels bestimmen auf M fünf Bogen, deren Endpunkte, nachdem sie auf l (durch O) projicirt sind, fünf Punktepaare auf l ergeben, die eine Involution i_p bilden, und resp. den fünf Involutionen angehören, die den fünf Punkten b entsprechen; ebenso bestimmen die fünf Strahlen des zweiten Büschels auf l fünf Punktepaare einer Involution i_π, und es gehören diese Punktepaare resp. den fünf Involutionen der Punkte β an; auch sind i_p und i_π projectivisch, weil es die Büschel p und π sind. Wenn nun $s_1\, t_1$ und $s_2\, t_2$ zwei Paare conjugirter Punkte der Involution i_p sind, dann treffen sich die Kegelschnitte

$$(a_1, a_2, 6, s_1, t_1) \quad \text{und} \quad (a_1, a_2, 6, s_2, t_2)$$

in einem Punkte x (ausser $a_1, a_2, 6$) und das Kegelschnittbüschel $(a_1, a_2, 6, x)$ bestimmt auf l die Involution i_p. Auf gleiche Weise kommt man durch die Involution i_π zu einem Punkte ξ. Wenn nun x und ξ zusammenfallen, so würde der Punkt x eine Lösung der Aufgabe liefern. Es folgt nun eine genauere Untersuchung der Relationen, die unter den Punkten x, p, π, ξ bestehen. Diese Andeutung mag genügen zur Darlegung der angewandten Methode. Es zeigt sich schliesslich, dass es zwölf Curven vierter Ordnung giebt, die in a_1 und a_2 je einen Doppelpunkt haben, durch die sieben einfachen Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 gehen, und ausserdem noch einen dritten Doppelpunkt besitzen. Zu diesen zwölf Curven

ist dann noch als dreizehntes Gebilde die Gerade $a_1\,a_2$ und die Curve dritten Grades $(a_1, a_2, 1, 2, \ldots 7)$ zu rechnen. Die nähere Begründung ist in der interessanten Arbeit selbst nachzusehen.

Mz.

BADOUREAU. Enveloppe de la droite de Simpson.
Nouv. Ann. (2) XVIII. 33-35.

Beweis des bekannten Satzes: „Die Fusspunkte der Lothe, die von einem Punkte eines Kreises auf die Seiten des eingeschriebenen Dreiecks gefällt werden, liegen in einer Geraden, welche eine Curve vierten Grades mit drei Rückkehrpunkten einhüllt."

O.

FR. HOZA. Construction der Conchoidentangente.
Casopis VIII. 34-35. (Böhmisch).

Std.

A. RIBAUCOUR. Mémoire sur les courbes enveloppes de courbes et sur les surfaces enveloppes de sphères.
N. C. M. V. 257-263, 305-315, 337-343, 385-393, 417-425.

Erster Theil. I. Von allen Punkten einer gegebenen Curve beschreibe man Kreise, deren Radien eine Function der Lage der Punkte sind. Die Enveloppe dieser Kreise hat zwei Zweige, deren entsprechende Punkte verbunden sind durch eine Berührungslinie, senkrecht zur Tangente an die gegebene Curve im Mittelpunkte des variabeln Kreises und von diesem Mittelpunkte entfernt um eine Grösse a, die durch die Formel $ads = rdr$, wo ds das Differential des Bogens der ursprünglichen Curve ist, gegeben wird. Man schliesst aus dieser Formel u. a. die folgenden Sätze: 1) Die Berührungssehnen von Kreisen, die, concentrisch zu den erstern, so beschaffen sind, dass $r'^2 = r^2 + \text{const.}$, sind dieselben wie für die ersten. 2) Wenn $r = \varrho$, dem Krümmungsradius der ursprünglichen Curve, so geht die Berührungssehne durch den Krümmungsmittelpunkt ihrer Developpirten. 3) Wenn

$r = \delta$, wo δ die Entfernung von der gegebenen Curve bis zu einer zweiten Curve nach einer bestimmten Richtung hin ist, so hat die Berührungssehne für den Kreis mit dem Radius r, der seinen Mittelpunkt in A hat, zum Pol den Punkt S, in dem sich die Tangente in A an die Curve, die Ort der Mittelpunkte ist, mit der Tangente in dem entsprechenden Punkte B der zweiten Curve schneidet. 4) Sind zwei Curven A, B gegeben und nimmt man als r die Entfernung zwischen einem Punkt von B und dem Punkt, in dem die Tangente in B die Curve A schneidet, so ist die Reihe der Kreise r orthogonal zur Curve B; die Berührungssehne eines Punktes geht in diesem Fall durch den Krümmungsmittelpunkt von B. Es gilt der Satz: Die Berührungssehne hat eine Enveloppe, welche durch jede Sehne in einem Punkt berührt wird, der in gerader Linie mit den Krümmungsmittelpunkten der beiden Zweige der Enveloppe der Kreise in den Punkten liegt, in denen sie von dieser Sehne geschnitten werden. Diese Gerade ist parallel der Normalen an den Ort der Mittelpunkte der zu den ursprünglichen Kreisen orthogonalen Kreise, der mit diesen zu gemeinsamen Sehnen die Berührungssehnen hat, von denen oben die Rede war. Anders ausgedrückt: Diese Gerade ist die Berührungssehne der zwei Zweige der Enveloppe dieser orthogonalen Kreise. Anwendung auf die Untersuchung der Krümmungsmittelpunkte der geraden Strophoide, die als Enveloppe von Kreisen betrachtet wird, deren Mittelpunkte auf einer Parabel liegen.

II. Man deformire die Linie der Mittelpunkte (A) der Art, dass man daraus eine Gerade (D) macht, die (A) in A berührt. Es seien (e), (e') die Enveloppen der Kreise für die Gerade (D), (E), (E') die Enveloppen von (e), (e'), wenn man (A) auf (D) rollen lässt, c, c', C, C' die Krümmungsmittelpunkte von (e), (e'), (E), (E'). Dann gilt der Satz: Wenn man die Linie der Mittelpunkte (A) deformirt, indem man sie D im Punkte A berühren lässt, so geht die Gerade, welche die Krümmungsmittelpunkte C, C' verbindet, durch einen festen Punkt von D und schneidet die Normale an die Developpirte von (A) in einem Punkte, dessen Entfernung von der Normale, in A an (A), während der Deformation constant ist.

(Zweiter Artikel.) III. Man betrachte gleichzeitig die Kreisreihen, welche dieselbe Linie der Mittelpunkte haben und deren Radien sich aus einem von ihnen herleiten lassen durch die Relation $R' = kR$. Die Tangenten in den Punkten, wo die Kreise aller Reihen, die ihre Mittelpunkte in A haben, auf (A) ihre Enveloppen berühren, schneiden die Tangente D an (A) in demselben Punkte. Die Berührungssehnen aller entsprechenden Kreise berühren ihre Enveloppen in Punkten, die in gerader Linie mit dem Krümmungsmittelpunkt von (A) liegen. Diese Gerade dreht sich um einen festen Punkt, wenn man die Linie deformirt. Der Ort der Krümmungsmittelpunkte der Enveloppen jeder Reihe ist die Fusspunktcurve einer gewissen Parabel, orthogonal zu (A) in A.

IV. Wenn man die Linie der Mittelpunkte (A) auf irgend eine Art in einem Theil ihrer Länge deformirt, so bleibt die algebraische Summe der beiden Bogen der Enveloppe, die dem deformirten Theil von (A) entspricht, constant.

(Dritter Artikel.) V. Wie auch die Deformation sei, der Inhalt der Fläche zwischen den beiden Zweigen der Enveloppe und den äussersten Berührungssehnen bleibt constant. VI. Eigenschaften hinsichtlich der Schwerpunkte.

(Vierter Artikel.) Zweiter Theil. Des surfaces enveloppes de sphère. I. Von den Normalien. Untersuchung der nicht circularen Krümmungslinien der Enveloppe von Kugeln, deren Mittelpunkte auf einer Raumcurve liegen. Untersuchung der Enveloppen von Kugeln, deren Krümmungslinien sämmtlich eben oder sphärisch sind.

(Fünfter Artikel.) II. Oberfläche, die der Ort der Krümmungsmittelpunkte einer Enveloppe von Kugeln ist.

(Sechster Artikel vom Januar 1880.) III. Man kann, wenn man eine Enveloppe von Kugeln kennt, daraus eine unendliche Zahl anderer durch Deformation einer gewissen Developpablen herleiten. Differentialgleichung der geodätischen Linien auf einer Enveloppe von Kugeln.

IV. Welches auch die Deformation von (A), der Linie der Kugelmittelpunkte, deren Enveloppe man untersucht, ist, so schneidet der Schnitt der Ebene des Kegelschnitts (welcher der Ort der

Krümmungsmittelpunkte der Enveloppe in Bezug auf den Berührungskreis (*B*) mit der eingehüllten Kugel ist) mit der osculirenden Ebene von (*A*) in *A* die Tangente *A* an (*A*) in einem festen Punkte. Sie schneidet die Senkrechte, welche im Krümmungsmittelpunkte auf die Normale in *A* an (*A*) errichtet ist, in einem Punkte, dessen Entfernung von einer Normalen constant ist. Wenn man die Curve (*A*) deformirt, ohne ihre ursprüngliche Krümmung variiren zu lassen, so bleibt die Summe entsprechender Bogen der Rückkehrkante der Enveloppe constant. Der Flächeninhalt einer Kugelenveloppe, begrenzt von zwei Krümmungskreisen, bleibt constant, welches auch die Variation der zweiten Curve von (*A*) in *A*, oder sogar, welches auch die Deformation dieser Mittelpunktslinie ist. Ebenso steht es mit dem entsprechenden Volumen.

Mn. (O.)

B. Räumliche Gebilde.

Th. Reye. Die Geometrie der Lage. Zweite Abtheilung. Zweite Auflage. Hannover, Rümpler.

Bei der Verbreitung, welche die erste Auflage dieses hervorragenden Lehrbuches der reinen Geometrie gefunden hat, kann der allgemeine Inhalt desselben als bekannt vorausgesetzt werden; auch hat die erste Auflage schon eine Besprechung in diesem Jahrbuche gefunden (Bd. I. 1868. 269). Es wird also genügen, auf die wesentlichsten Veränderungen einzugehen; der Verfasser hat sie selbst in seiner Vorrede kurz angedeutet. Sie sind grösstentheils liniengeometrisch, also einem Gebiete angehörig, das grade seit dem Erscheinen der ersten Auflage erst recht ausgebildet ist; einige werthvolle Partieen aus demselben enthielt bekanntlich auch schon die erste Auflage.

Die ersten neun Vorträge sind wenig geändert; bei der Bedeutung, welche im letzten Jahrzehnt die Ausartungen der Collineation und Reciprocität erhalten haben, wäre eine Besprechung derselben erwünscht gewesen. In Folge der Wichtigkeit, welche

das Nullsystem durch seine Verbindung mit dem linearen Complexe erhalten hat, ist derselbe ausführlich behandelt. Zwei neue Vorträge (zehnter und elfter), welche diese beiden Gebilde, sowie das lineare Strahlensystem (in seiner Kugelgeometrie hat Herr Reye das prägnantere Wort „Congruenz“ dem unbestimmten „Systeme“ vorgezogen) behandeln, sind eingeschoben. Letzteres wird erzeugt durch zwei collineare Strahlenbündel S und S_1, die den Sirahl SS_1 entsprechend gemein haben. Auch im nächsten (zwölften, bisher zehnten) Vortrage findet vor dem schon früher behandelten Sehnensystem der cubischen Raumcurve, erzeugt durch zwei beliebige collineare Bündel, noch das Strahlensystem erster Ordnung zweiter Classe Erwähnung.

Die beiden nächsten Vorträge sind im Allgemeinen unverändert. Der fünfzehnte (bisher dreizehnte) bringt ausser der projectiven Verwandtschaft eines linearen Strahlensystems mit einem ebenen Punktsysteme — ich erlaube mir Herrn Reye das auch sonst adoptirte (Punkt-)„Feld“ vorzuschlagen — die Erzeugung der Regelflächen vierten Grades durch projective Ebenenbüschel zweiter „Ordnung“ (die Büschel der Tangentialebenen um zwei Kegel zweiten Grades; sollte nicht „zweiter Classe“ der sonst üblichen Terminologie mehr entsprechen?).

Die Verwandtschaft zweiten Grades ist nun einem besondern Vortrage überwiesen. Sie wird zunächst aus einer doppelten reciproken Beziehung zweier ebenen Systeme (Felder) abgeleitet, wie es Reye schon Schlömilch Z. XI. p. 280 gethan hat; vielleicht nimmt Herr Reye von dort in einer späteren Auflage noch den Beweis auf, dass aus einem ganzen einfach unendlichen Systeme von reciproken Beziehungen beliebige zwei immer zu derselben Verwandtschaft zweiten Grades führen, und zeigt auch die Identität der Hauptpunkte der Verwandtschaft mit den singulären Punkten der ausgearteten reciproken Beziehungen des Systems. Diese doppelte reciproke Beziehung führt zu der Verwandtschaft eines Feldes mit dem Secantensysteme einer cubischen Raumcurve, von welcher in der ersten Auflage direct ausgegangen wurde, und die zu den weiteren Eigenschaften der quadratischen Verwandtschaft führt. Der siebzehnte und acht-

zehnte Vortrag entsprechen dem früheren dreizehnten und vierzehnten; der Abschnitt über das geschaarte involutorische System — das ja durch seinen Zusammenhang mit der linearen Strahlencongruenz noch wichtiger geworden ist — hat eine Umarbeitung erfahren, und dasselbe gilt für den tetraedralen Complex, der ja bekanntlich, weil Reye in der ersten Auflage ihn zuerst behandelt hat, auch mit seinem Namen benannt wird. Die Fundamentaleigenschaft desselben, dass sämmtliche Complexstrahlen von den Ebenen des Tetraeders in untereinander projectiven Punktwürfen geschnitten, und die Ecken durch untereinander (und mit jenen) projective Ebenenwürfe projicirt werden, wird mehr hervorgehoben; durch dieselbe hat bekanntlich — wie nun auch Herr Reye erwähnt — eine Frage Steiner's im Anhang der System. Entwickelungen Nr. 15 eine andere Antwort gefunden, als sie Steiner vermuthet hat.

Einige, doch weniger leicht zu charakterisirende Aenderungen haben die Vorträge 19 bis 26 (früher 17 bis 23) erhalten. Neu oder vielmehr grösstentheils aus dem Anhang übernommen und besonders nach der liniengeometrischen Seite hin weiter ausgeführt sind die letzten vier Vorträge. Zuerst wird — vielleicht etwas zu knapp — der Bündel von Flächen zweiter Ordnung behandelt, dann das Gebüsch Σ (lineare System von dreifacher Mannigfaltigkeit); dasselbe führt durch seine Beziehung zu den Ebenen eines Raumes Σ_1 zu einer schon im Anhang der ersten Auflage behandelten Abbildung, in der einem Punkt im Raume Σ einer von Σ_1, einem Punkte von Σ_1 aber die acht Grundpunkte eines Bündels (associirte Punkte) in Σ correspondiren; vermittelst derselben gelangt man zunächst zu der Steiner'schen Fläche, welche in Σ_1 einer Ebene von Σ entspricht, sodann aber zum Strahlensysteme zweiter Classe. Jeder Geraden nämlich in Σ, welche zwei associirte Punkte verbindet, (Hauptstrahl) correspondirt in Σ_1 wieder eine Gerade: der Inbegriff dieser Geraden ist ein Strahlensystem zwölfter Classe. Haben aber die Flächen des Gebüsches $n \leqq 6$ Punkte gemein, so bilden die Strahlen, welche den durch einen dieser Punkte gehenden Hauptstrahlen entsprechen, ein System zweiter Classe und $(8-n)^{\text{ter}}$ Ordnung und sind die

Doppeltangenten einer Fläche vierter Classe (der Brennfläche des Systems), welche der Kernfläche (Kegelspitzenfläche) vierter Ordnung des Gebüsches entspricht. Alle Fälle hat Reye in seinen Aufsätzen (Borchardt J. LXXXVI. p. 83, 209; F. d. M. X. 1878. 419, 420) behandelt; hier wird nur der interessanteste Fall $n = 6$ wiedergegeben, die übrigen sind zum Theil in den Anhang verwiesen. Dieser Fall $n = 6$ führt zu dem in sich dualen Strahlensysteme zweiter Ordnung zweiter Classe mit der Kummer'schen Fläche mit sechzehn Doppelpunkten und sechzehn singulären Tangentialebenen als Brennfläche. Die Configuration derselben mit ihren Kegeln und Kegelschnitten, die sechs Nullsysteme und die mit ihnen verbundenen involutorischen und analytisch durch F. Klein gefundenen Polarsysteme werden in eleganter Weise synthetisch abgeleitet.

Im Anhang ist neu der Abschnitt: Büschel, Bündel, Gebüsche von linearen Strahlencomplexen, projective Erzeugung quadratischer Complexe.

Zum Schlusse erlaubt sich der Referent noch ein paar Bemerkungen, die er der freundlichen Gesinnung des Verfassers zur Begutachtung übergiebt. Er kann sich mit der Weise, wie Herr Reye das Imaginäre behandelt oder umgeht, nicht recht befreunden. Ganz vermeidet Herr Reye es doch nicht, indem er von einer imaginären Ordnungsfläche eines Polarsystems, von imaginären Involutionsaxen eines geschaart involutorischen Systems spricht. S. 123 wird durch zwei projective Strahlenbüschel zweiter „Ordnung" eine Curve vierter Ordnung erzeugt mit „höchstens 3 und mindestens einem Doppelpunkt". Zwischen einer Curve vierter Ordnung mit wirklich nur einem Doppelpunkte — vom Geschlechte 2 — und einer solchen mit einem reellen und zwei conjugirt imaginären — also vom Geschlechte 0 — besteht doch zweifellos noch ein fundamentaler Unterschied. In den beiden Ausdrucksweisen: „Zwei cubische Raumcurven, beliebig im Raume gelegen, haben höchstens fünf Punkte gemein", und: „Zwei cubische Raumcurven, auf demselben Hyperboloid gelegen, haben höchstens fünf Punkte gemein" hat das „höchstens" zwei wesentlich verschiedene Bedeutungen, und diese beiden Be-

deutungen hält Herr Reye meines Erachtens nicht auseinander; Ref. würde sich zu der zweiten Ausdrucksweise nicht entschliessen. Auch scheint ihm die Darstellung auf S. 150, 151, 229 davon beeinflusst. Man vergleiche ferner auch die „Reduction" der Schnittcurve der Berührungsebene einer Nichtregelfläche zweiten Grades „auf einen Punkt" S. 166 (statt der „Ausartung in ein imaginäres Geradenpaar") mit der davon wesentlich verschiedenen Reduction der Parabel (als Curve zweiter Classe) auf einen Punkt (oder Strahlbüschel) S. 168.

Sodann empfiehlt es sich wohl, eine oft gebrauchte Zusammenstellung von zwei subordinirten Fällen, in der sie sich wie coordinirte ausnehmen, zu vermeiden, z. B. S. 155: „Diejenigen Geraden, . . ., bilden eine Kegelfläche zweiten Grades oder eine Regelschaar".

Sm.

G. Hauck. Ueber Gleichstimmigkeit und Ungleichstimmigkeit der räumlichen Collineation. Schlömilch Z. XXIV. 381-390.

Der Verfasser hatte in einem Aufsatze Schlömilch Z. XXI. p. 402, den ich F. d. M. VIII. 1876. 345 besprochen, auf p. 407 folgenden Satz ausgesprochen: „Liegen bei zwei centrisch-collinearen räumlichen Systemen (er fügt jetzt hinzu: „in collinearer Lage"; was heisst das, wenn schon „centrisch"-collinear gesagt ist?) Collineationsebene ($\mathfrak{S}$) und Collineationscentrum (C) zwischen Fluchtebene (Φ) und Gegenebene (G), so liegt jeder Punkt P der Originalfigur mit seinem Bilde Π auf derselben Seite der Collineationsebene. Wenn hingegen etc.". Doch begnügen wir uns mit dem ersten Falle.

Ref. hat diesen Satz als nicht in allen Fällen richtig bezeichnet. Sobald man unter „auf derselben Seite einer Ebene liegen" das versteht, was man gewöhnlich darunter versteht, so ist er nur richtig, wenn P auf derselben Seite von G liegt wie $\mathfrak{S}$.

Herr Hauck rechtfertigt seinen Satz, indem er jenem Ausdruck einen andern Sinn giebt, der freilich bei Betrachtung projectiver Eigenschaften, aber nur dann eine gewisse Berechtigung

hat, den man jedoch ohne vorhergehende Erläuterung nicht voraussetzen kann. Werden nämlich durch P und Π entsprechende Gerade gelegt und diese in den durch die projective Beziehung bestimmten entsprechenden Sinnen vom gemeinsamen Spurpunkt S in $\mathfrak{S}$ durchlaufen bis P bez. Π, so werden P, Π auf derselben Seite von $\mathfrak{S}$ liegend genannt, wofern man beim Ausgange von S nach derselben Seite von $\mathfrak{S}$ sich bewegen muss.

Diese Definition vorausgeschickt, ist der Satz richtig. Man kann die centrische Collineation als gleichstimmig bezeichnen, weil bei jeden zwei entsprechenden Geraden die perspectiven Sinne vom gemeinsamen Spurpunkt aus nach derselben Seite von $\mathfrak{S}$ gehen.

Der Verfasser nennt, — wie Ref. nur aus einer der Noten auf S. 385 des jetzigen Aufsatzes schliesst —, zwei entsprechende Dreikante (mit bestimmter Reihenfolge der Kanten), deren Halbstrahlen die „perspectiv" entsprechenden Sinne haben, gleichstimmig, wenn die Pyramiden, welche durch auf diese Halbstrahlen gelegte Punkte entstehen, nach Möbius' Vorzeichenbestimmung gleiche Vorzeichen haben. Dass dann zwei entsprechende Dreikante, deren Spitzen P, Π auch im gewöhnlichen Sinne auf derselben Seite von $\mathfrak{S}$ liegen, gleichstimmig sind, ist ersichtlich. Liegt aber P auf der andern Seite von P als $\mathfrak{S}$ und demnach Π auf der andern Seite von $\mathfrak{S}$ als P im gewöhnlichen Sinne, so sind, wenn $S_1 S_2 S_3$ die Spuren der Dreikante in $\mathfrak{S}$ sind, die Dreikante $P, S_1 S_2 S_3$ und $\Pi, S_1 S_2 S_3$ ungleichstimmig; aber nicht letzteres, sondern das Scheiteldreikant entspricht projectiv dem $P, S_1 S_2 S_3$, weil PS_i, von der Gegenebene durchschnitten, in $\Pi \infty S_i$ übergeht; dies Scheiteldreikant ist ungleichstimmig zu $\Pi, S_1 S_2 S_3$ also gleichstimmig zu $P, S_1 S_2 S_3$. Also sind alle entsprechenden Dreikante gleichstimmig und im andern Falle ungleichstimmig, und ist dies demnach ein Kriterium für die Gleich- oder Ungleichstimmigkeit der centrischen Collineation.

Bei der allgemeinen Collineation erledigt Herr Hauck die Frage vorderhand nur analytisch. Sind in Bezug auf zwei gleichstimmige Coordinatensysteme

$$x = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{D}}, \quad y = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{D}}, \quad z = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}},$$

wo

$$\mathfrak{A} = a_1 X + a_2 Y + a_3 Z + a_4, \ldots,$$
$$\mathfrak{D} = d_1 X + d_2 Y + d_3 Z + d_4,$$

die Relationen zwischen den Coordinaten entsprechender Punkte und R die Substitutionsdeterminante $\Sigma \pm a_1 b_2 c_3 d_4$, so findet Herr Hauck jetzt, damit eine Angabe des früheren Aufsatzes verbessernd, als Kriterium der Gleich-, bez. Ungleichstimmigkeit $R > 0$, $R < 0$. Vermittelst der Relation zwischen den Inhalten der von entsprechenden Punkten gebildeten (endlichen) Tetraeder (die nicht nothwendig projectiv entsprechend sind, weil, wenn z. B. das eine endliche Tetraeder von der Gegenebene durchschnitten wird, ihm ein unendlich grosses von der unendlich fernen Ebene durchschnittenes projectiv entspricht,) ergiebt sich, dass entsprechende Dreikante gleich- oder ungleichstimmig sind, je nachdem $R > 0$ oder < 0.

Sm.

G. Kohn. Ueber das räumliche vollständige Fünfeck. Wien. Ber. LXXX. 1-4.

Sind im Raume fünf Punkte 1, 2, 3, 4, 5 und eine Ebene gegeben, so ist immer der Schnittpunkt dieser Ebene mit einer Verbindungslinie zweier der fünf Punkte Pol zu der Schnittgeraden der Ebene mit der Verbindungsebene der drei andern Punkte in Bezug auf einen und denselben Kegelschnitt. Man erhält so in der Ebene zehn Pole und zehn ihnen zugeordnete Polaren. Auf jeder Polaren liegen drei Schnittpunkte von Verbindungslinien zweier Punkte. Bestimmt man dazu noch die drei Schnittpunkte mit den drei durch ihren Pol gehenden Verbindungsebenen, so erhält man auf ihr drei Punktepaare einer Involution, deren Doppelpunkte ihre Schnittpunkte mit dem erwähnten Kegelschnitt sind.

Scht.

J. Neuberg. Sur les tétraèdres homologiques. N. C. M. V. 315-320.

Ausdehnung der Sätze der Arbeit: „Sur les triangles homologiques“ (s. p. 396) auf den Raum. Mn. (O.)

C. STEPHANOS. Sur les systèmes desmiques de trois tétraèdres. Darboux Bull. (2) III. 424-456.

Drei Tetraeder bilden ein desmisches System (δέσμη, faisceau), wenn sie Glieder eines Flächenbüschels vierten Grades sind. In Folge dieser Begriffsbestimmung müssen drei derartige Tetraeder besondere Beziehungen der Lage zu einander haben. Als eine der wichtigsten, aus der manche andere Besonderheiten hergeleitet werden, wird folgende ermittelt. Damit zwei Tetraeder ein Büschel von Flächen vierten Grades bestimmen, welches ein drittes Tetraeder als Glied in sich schliesst, muss jede Kante des einen zwei Gegenkanten des andern durchschneiden, eine Eigenschaft, die man auch so aussprechen darf: Jedes Paar Gegenkanten des einen Tetraeders muss sich auf einem Paar Gegenkanten des andern Tetraeders stützen. Diese Eigenthümlichkeit ist nicht nur eine nothwendige Folge der Begriffsbestimmung eines desmischen Systems, sondern sie ist auch eine hinreichende Bedingung dafür, dass zwei Tetraeder ein solches System bestimmen. Ist ein Tetraeder A und eine Ecke B_0 eines zweiten Tetraeders B gegeben, welches mit ihm desmisch verbunden ist, so sind die drei andern Ecken von B auf folgende Weise aufzufinden: Von B_0 laufen drei Gerade durch die drei Paar Gegenkanten von A; auf ihnen bilden die zu B_0 conjugirten harmonischen Punkte die übrigen Ecken von B. Die Ecken des dritten Tetraeders C gewinnt man, wenn man zu B_0 die vier homologen Punkte in den vier involutorischen Homologien sucht, welche durch je eine Ecke von A und ihre Gegenfläche bestimmt werden. Ist statt einer Ecke eine Fläche von B gegeben, so ist die Auffindung in ähnlicher Form möglich. Auf weitere Relationen kann hier nicht eingegangen werden.

Schn.

F. Buka. Bewegliche Modelle aus Stahlstäbchen für den Unterricht in der höheren Geometrie. I. Serie. Winckelmann u. Söhne. Berlin.

Die vier ersten Modelle dienen zur Darstellung von Curven und geradlinigen Flächen zweiter, dritter und vierter Ordnung mit Hilfe projectivischer Punktreihen erster und zweiter Ordnung. Die Punktreihen sind durch stärkere Stahlstäbe oder Messingreifen vertreten, kleine an denselben befestigte Ringe ersetzen die Punkte, dünnere Stahlstäbchen mit Messingkügelchen an beiden Enden sind die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte. Die leichte Verschiebbarkeit der Stäbchen in den Ringen gestattet die stetige Ueberführung der verschiedenen Gebilde in einander und die Darstellung der verschiedenartigsten Formen jedes einzelnen.

Modell I. zeigt den Uebergang des Parallelstrahlenbüschels in Parabeln und hyperbolische Paraboloide, event. mit den beiden Schaaren Gerader.

Modell II. veranschaulicht die Erzeugung von Ellipsen, Hyperbeln und einschaligen Hyperboloiden.

Modell III. dient zur Darstellung der drei Typen geradliniger Flächen dritter Ordnung.

Modell IV. zur Ueberführung der elliptischen Cylinder in Rotationscylinder, Kegel und Hyperboloide, sowie zur Erzeugung verschiedener Flächen vierter Ordnung.

Modell V. besteht aus einem schraubenförmig gebogenen Stahlstabe mit vier Umgängen. Durch passende Verbindung von Punkten der Schraubenlinie unter einander oder mit Punkten der zugehörigen Axe entstehen verschiedene Formen der Schraubenflächen, von denen die axialen stetig in einander übergeführt werden können.

Zur bequemen Zusammensetzung der einzelnen Gebilde und zu ihrer Fixirung dient ein mit zwei verschiebbaren Kugelgelenken versehenes Statif.

Schl.

N. Salvatore-Dino. Sulla costruzione della superficie di 2° ordine data da nove punti. Berichte von E. Fergola, N. Trudi, G. Battaglini. Rend. di Nap. XVIII. 194-198.

Nach Anführung der einschlägigen Literatur (Hesse, Seydewitz, Chasles, Schröter) giebt der Verfasser eine Auflösung des Problems, die durch neun Punkte bestimmte Fläche zweiter Ordnung zu construiren, welche auf die Construction des Schnittes hinauskommt, den eine durch zwei der neun Punkte gelegte Ebene mit der Fläche macht. Zunächst löst er auf lineare Weise die folgenden beiden Aufgaben: 1) Gegeben zwei Kegelschnitte durch je fünf Punkte und ein Punkt D; gesucht der zweite Schnittpunkt einer beliebig durch D gelegten Geraden mit dem durch D gehenden Kegelschnitt des durch die ersten beiden bestimmten Büschels. 2) Gegeben drei Kegelschnitte durch je fünf Punkte; gesucht der Kegelschnitt, welcher durch zwei gegebene Punkte geht und dem durch die drei Kegelschnitte bestimmten Netze angehört. Es seien nun im Raume neun Punkte

$$A,\ B,\ C,\ D,\ O_1,\ O_2,\ O_3,\ P,\ Q$$

gegeben, durch welche eine Fläche zweiter Ordnung gelegt werden soll. Es seien a_4a_5, b_4b_5, c_4c_5 die Paare von Gegenseiten des windschiefen Vierecks $ABCD$ und $a_1a_2a_3$, $b_1b_2b_3$, $c_1c_2c_3$ die Geradentripel, welche durch O_1, O_2, O_3 gehen und jene Geradenpaare schneiden. Dann ist durch jede der Gruppen a_i, b_i, c_i eine geradlinige Fläche zweiter Ordnung und durch diese drei Flächen ein Netz bestimmt, von dem jede Fläche durch die sieben Punkte

$$A,\ B,\ C,\ D,\ O_1,\ O_2,\ O_3$$

geht. Diejenige Fläche des Netzes, welche durch P und Q geht, ist somit die gesuchte. Eine durch P und Q gelegte Ebene π schneidet nun die drei Gruppen von je fünf Geraden a_i, b_i, c_i in drei Gruppen von je fünf Punkten, durch welche das Kegelschnittnetz bestimmt ist, in der das Flächennetz von der Ebene π geschnitten wird. Derjenige Kegelschnitt also des Netzes, der durch P und Q geht, liegt auf der durch die gegebenen neun Punkte bestimmten Fläche. Es folgen noch lineare Auflösungen der beiden Aufgaben: 1) Von einem Hyperboloid sind eine Erzeugende und sechs Punkte gegeben. Man soll eine Erzeugende

des zweiten Systems construiren. 2) Den Schnitt einer durch neun Punkte gegebenen Fläche zweiter Ordnung mit einer durch drei der Punkte gelegten Ebene zu bestimmen. B. K.

H. THIEME.*) Ueber die Flächen zweiten Grades, für welche zwei Flächen zweiten Grades zu einander polar sind. Schlömilch Z. XXII. 1877.

Die Aufgabe, um welche es sich handelt, ist zuerst von Steiner gelöst, ebenso die entsprechende Aufgabe für zwei Kegelschnitte in der Ebene, doch hat Steiner darüber nur eine kurze Notiz im 31ten Bande des Crelle'schen Journals p. 79 veröffentlicht. Das Problem für die Ebene ist später analytisch und synthetisch von den Herrn Cremona, Rosanes, Schröter u. A. behandelt; das Problem für den Raum von Herrn D'Ovidio (Battaglini G. X. p. 313 s. F. d. M. IV. 1872. 338) auf analytischem Wege. Die vorliegende Arbeit enthält eine synthetische Lösung der Aufgabe.

Der Gang der Untersuchung ist der, dass zunächst die analoge Frage für Punktsysteme einer Geraden behandelt wird, wodurch sich die Grundlage für die ganze Betrachtung ergiebt. Das Resultat ist, dass es acht Flächen giebt, welche die verlangte Eigenschaft haben. Diese Flächen werden nun genauer discutirt und zwar werden drei Hauptfälle unterschieden, je nachdem das den gegebenen Flächen gemeinsame Polartetraeder vier, zwei oder keinen reellen Punkt besitzt. A.

A. VOIGT. Ueber ein besonderes Hyperboloid. Borchardt J. LXXXVI. 297-317.

Die Arbeit beschäftigt sich mit einigen besonderen Gebilden von Flächen zweiten Grades, welche eine Reihe höchst bemerkenswerther Eigenschaften zeigen. Sie geht aus von dem Satze: „Kommen in einem Kegel zweiten Grades drei Strahlen vor, welche unter einander normal sind, so enthält der Kegel unendlich viele

*) Die vorstehende Arbeit ist durch einen von der Redaction nicht verschuldeten Zufall im Jahrgang 1877 nicht berücksichtigt worden. Das Referat wird daher nachgeholt. O.

solcher Tripel, nämlich für jeden Strahl giebt es zwei zu ihm und unter einander normale". Aus der Art, wie dieses Theorem bewiesen wird, ergiebt sich sogleich, dass jede Ebene, welche den Kegel in einer gleichseitigen Hyperbel schneidet, normal zu einer Erzeugenden des Kegels ist, und dass der Punkt, in welchem eine Ebene von einem zu ihr normalen Strahl des Kegels durchbohrt wird, der Höhenpunkt der Durchbohrungspunkte sämmtlicher Tripel ist. Ein solcher Kegel wird als „gleichseitig" bezeichnet. Ein gleichseitiger Kegel ist jeder Kegel zweiten Grades, welcher die vier Höhen desjenigen speciellen Tetraeders enthält, dessen Höhen sich in einem Punkte schneiden, oder was auf dasselbe hinauskommt, drei in einer Ecke zusammenstossende Kanten und den dazu gehörigen Höhenstrahl, d. h. den Strahl, in welchem sich die drei Ebenen schneiden, welche jede Kante auf die Ebene der beiden anderen senkrecht projiciren. Ist in einem Kegel ein derartiges Strahlenquadrupel vorhanden, so enthält der Kegel noch unendlich viele derartige Quadrupel, nämlich der Höhenstrahl von irgend drei Erzeugenden liegt gleichfalls in der Fläche.

Ein Hyperboloid, welches durch drei gegen einander senkrecht gerichtete Gerade im Raum bestimmt ist, heisst „gleichseitig." In einem solchen giebt es unendlich viele Tripel von Normalstrahlen, und zwar sind zu jedem Strahl in derselben Schaar zwei mit ihm und unter einander normale vorhanden, welche elementar construirbar sind. Ist in einem solchen Hyperboloid eine Ebene, welche dasselbe in einer gleichseitigen Hyperbel schneidet, normal zu einer Erzeugenden desselben, so gilt dasselbe von jedem gleichseitigen Hyperbelschnitt. Hierin liegt eine gewisse Analogie mit dem von Herrn Schröter „orthogonal" genannten Hyperboloid (Borchardt J. LXXXV., siehe F. d. M. X. 1878. p. 412), dessen Kreisschnitte normal zu einer Erzeugenden sind; während Kreisschnitte aber nur in zwei Ebenenrichtungen vorkommen, giebt es gleichseitige Hyperbelschnitte in unendlich vielen Richtungen, welche, in den Mittelpunkt des Hyperboloids übertragen, einen Kegel zweiten Grades umhüllen.

Sind a, b, c drei normal gegen einander gerichtete Gerade der einen Schaar, so gehören die durch ihre kürzesten Entfer-

nungen bestimmten Geraden a', b', c' der anderen Schaar an und bestimmen mit jenen ein gerades rechtwinkliges Parallelepipedon $ab'ca'bc'$. Solcher rechtwinkliger Parallelepipeda, die in diesem Sinne auf dem Hyperboloid zu verzeichnen sind, giebt es unendlich viele; ihre Ecken liegen alle auf einer mit dem Hyperboloid concentrischen Kugel. Da die Kugel durch $ab'ca'bc'$ bestimmt ist, so findet man zu einem Strahl z die normalen, indem man die Schnittpunkte mit jener Kugel aufsucht; die Geraden des Hyperboloids, welche derselben Schaar angehören und durch jene Schnittpunkte bestimmt sind, ergeben ein neues Tripel von Normalstrahlen z, y, x, dem sich in obigem Sinne drei Normalstrahlen der anderen Schaar z', y', x' zuordnen. Ein solches durch $xy'zx'yz'$ bestimmtes Parallelepipedon hat mit dem durch $ab'ca'bc'$ bestimmten gleichen Inhalt.

Sind A, B, C die Halbaxen des Hyperboloids, so ist der Charakter der Gleichseitigkeit durch die Relation gegeben

$$\frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2} - \frac{1}{C^2} = 0,$$

so dass die Axengleichung des gleichseitigen Hyperboloids die Form hat

$$\frac{x^2 - z^2}{A^2} + \frac{y^2 - z^2}{B^2} = 1.$$

Haben die Normalstrahlen a, b, c unter einander gleiche Abstände, so wird das gleichseitige Hyperboloid ein Rotationshyperboloid, und aus dem rechtwinkligen geraden Parallelepipedon $ab'ca'bc'$, wird ein Würfel. Es ergiebt sich demnach der Satz: „Lassen sich auf einem Hyperboloid sechs Kanten eines Würfels aufzeichnen, so lassen sich ihm in demselben Sinne unendlich viele ihm congruente Würfel aufzeichnen, und dasselbe ist ein gleichseitiges Rotationshyperboloid. Ein solches kann erzeugt werden durch die sechs Kanten eines Würfels, wenn derselbe um diejenige Gerade als Axe rotirt, welche durch die beiden jenen sechs Kanten nicht angehörigen Gegenecken geht. Die Axengleichung desselben ist $x^2 + y^2 - 2z^2 = A^2$“.

Ein gleichseitiges Hyperboloid hat bemerkenswerthe Beziehungen zum Tetraeder. Vier beliebige Erzeugende aus der-

selben Schaar eines gleichseitigen Hyperboloids sind immer Höhen eines Tetraeders, und umgekehrt bestimmen drei Höhen eines Tetraeders ein gleichseitiges Hyperboloid, dem auch die vierte Höhe angehört. Die Frage, unter welchen Bedingungen bestimmen drei Gerade ein gleichseitiges Hyperboloid, fällt also mit der zusammen, wann sind drei Gerade Höhen eines Tetraeders. Die Frage wird dahin beantwortet: Sind b und c zwei beliebige Gerade, welche unter einem Winkel φ gegen einander geneigt sind, und deren kürzeste Entfernung durch s gemessen ist, so gehören alle Geraden, welche mit b und c gleichseitige Hyperboloide erzeugen, einem Complex ersten Grades an, dessen Constante durch $\frac{s}{\operatorname{tg}\varphi}$ ausgedrückt ist.

Unter den Geraden dieses Complexes befinden sich auch alle diejenigen, welche den kürzesten Abstand von bc rechtwinklig schneiden. Ist a ein solcher Strahl, so geht das gleichseitige Hyperboloid in ein gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid über. Dieses, welches als eine Specialität sowohl des gleichseitigen wie des orthogonalen Hyperboloids betrachtet werden kann, lässt sich als eine Schraubenfläche auffassen, welche entsteht, wenn eine Gerade sich senkrecht gegen eine Leitlinie so entlang schiebt, dass die trigonometrische Tangente des Winkels, den sie mit einer Anfangslage bildet, der Distanz von dieser proportional ist. Schn.

Fr. Ruth. Ueber eine besondere Erzeugungsweise des orthogonalen Hyperboloids und über Büschel orthogonaler Kegel und Hyperboloide. Wien. Ber. LXXX.

Das orthogonale Hyperboloid ist eingehend von Herrn Schröter in Borchardt J. LXXXV. (s. F. d. M. X. 1878. 412) behandelt worden. Herr Ruth lässt es entstehen als Erzeugnis zweier congruenter Ebenenbüschel und gründet auf diese Erzeugungsart seine synthetischen Studien dieser Fläche. Er gewinnt von hier aus die Erzeugungsart, von der Herr Schröter ausgeht, als Ort der Kante eines rechtwinkligen Dieders, dessen Ebenen stets durch zwei

windschiefe Gerade gehen, entwickelt die wesentlichsten Eigenschaften der Fläche und zeigt, dass die Begriffsbestimmung, die Chasles vom orthogonalen Hyperboloid gegeben hat, als Ort der Punkte, deren Abstände von zwei windschiefen Geraden ein constantes Verhältnis haben, sich mit seiner genetischen Bestimmung deckt. Wird das Verhältnis variabel gedacht, so entstehen die Büschel orthogonaler Hyperboloide, mit denen Herr Ruth sich des Weiteren beschäftigt. Schliesslich mag noch bemerkt werden, dass jedes orthogonale Hyperboloid auf unendlich viele Arten als Erzeugnis gleichwinkliger Ebenenbüschel aufgefasst werden kann.

Schn.

W. Fiedler. Geometrische Mittheilungen. III. Das Problem der Kegelquerschnitte in allgemeiner Form nebst Bemerkungen zum Problem des Apollonius. Wolf Z. XXIV. 190-204.

Das Kegelquerschnittproblem ist folgendes: Wenn eine Kegelfläche durch den Mittelpunkt oder die Spitze M und eine ebene Leitcurve (L) in der Ebene L und eine Ebene E gegeben ist, die Querschnittcurve (E) der Ebene E mit dem Kegel zu construiren.

O.

V. Jeřábek. Ueber den geometrischen Ort von Kegelschnittsmittelpunkten, in welchen ein Ebenenbüschel eine Kegelfläche zweiten Grades durchschneidet. Casopis VIII. 180-182. (Böhmisch).

Std.

C. Taylor. The scalene cone. Messenger (2) IX. 33-34.

Geometrischer Beweis des bekannten Satzes: Die Schnittlinie eines Paares subconträrer Ebenen des gemeinsamen Schnittes einer Kugel mit einem Kegel ist eine Directrix des Schnittes einer Tangentialebene der Kugel durch die Linie, und ihr Berührungspunkt ist der entsprechende Brennpunkt.

Glr. (O.)

F. Röllner. Flächen zweiter Ordnung als Erzeugnisse projectiver Büschel von Kugeln. Schlömilch Z. XXIV. 116-119.

Die Mittelpunkte von zwei Kugelschaaren, deren jede durch einen festen Kreis geht, mögen projective gerade Punktreihen sein. Dann bildet die Gesammtheit der ∞^1 Schnitt-Kreise von je zwei sich entsprechenden Kugeln eine Fläche vierter Ordnung, welche in eine Fläche zweiter Ordnung und eine unendlich ferne Doppelebene zerfällt, sobald die Träger der Mittelpunktsreihen parallel und die Reihen selbst einstimmig congruent sind. Diese Erzeugung einer Fläche zweiter Ordnung liefert dem Verfasser auf leichte Weise einige Eigenschaften und Constructionen, welche namentlich auf die Kreisschnittebenen einer Fläche zweiter Ordnung Bezug haben. Scht.

Th. Reye. Synthetische Geometrie der Kugeln und linearen Kugelsysteme. Mit einer Einleitung in die analytische Geometrie der Kugelsysteme. Leipzig. Teubner.

In der Vorrede giebt Herr Reye einen historischen Ueberblick über die Entwickelung der Geometrie der Kugeln und Kreise, insbesondere seit Monge; doch ist die Transformation durch reciproke Radien schon vor W. Thomson und Liouville von Bellavitis (1836) und J. W. Stubbes (1843) behandelt worden. (Siehe Hirst: „Ueber die quadratische Inversion“ Proc. of London 1865 und Ann. di Mat. (1) VII.). Das Schriftchen selbst giebt eine zu einem harmonischen Ganzen verarbeitete Darstellung dieser Geometrie. Den Ausgangspunkt bildet die Potenz einer Kugel (eines Kreises, eines Punktepaars) in einem Punkte. Potenzpunkt zweier oder mehrerer Kugeln ist ein Punkt, in dem sie gleiche Potenz haben; es ergiebt sich sofort als Ort dieser Punkte für 2, 3, 4 Kugeln eine Ebene, eine Gerade (Potenzebene, Potenzaxe), ein einziger Punkt. Grenzfälle der Kugel sind die Punktkugel und die Ebene.

Alle Kugeln, die in einem Punkte C (dem Centrum) dieselbe Potenz p haben, bilden ein Kugelgebüsch. Ist $p > 0$, so ergiebt

sich eine gemeinsame Orthogonalkugel. Zum Gebüsche gehören auch die Schnittkreise zweier, die Schnittpunktenpaare dreier Kugeln des Gebüsches; solche Punktepaare, die auf einem Kreise liegen, sind involutorisch gepaart mit C als Involutionscentrum. Diese Involution führt dann zu harmonischen Punkten und harmonischen Kreisvierecken.

Es folgt die Besprechung der Transformation durch reciproke Radien, der stereographischen Projection und ihrer Anwendung auf das Kugelgebüsche.

Zwei Kugelgebüsche haben einen Kugelbündel gemein. Jeder Punkt der Verbindungslinie der Centra — der Potenzaxe des Bündels — ist Potenzpunkt aller Kugeln des Bündels und Centrum eines durch denselben gehenden Kugelgebüsches. Die Orthogonalkugeln derselben haben eine gemeinsame Potenzebene, die Ebene der Mittelpunkte der Kugeln (der Centralebene) des Bündels.

Drei Gebüsche haben einen Kugelbüschel gemein; die Ebene ihrer drei Centra ist die gemeinsame Potenzebene aller Kugeln desselben; jeder Punkt in ihr ist Centrum eines Gebüsches, jede Gerade in ihr Axe eines Bündels, in dem der Büschel enthalten ist. Gebüsche, Bündel, Büschel von Kugeln werden durch reciproke Radien in ebensolche Gebilde transformirt.

Orthogonale Kreise sind solche, bei denen je zwei durch sie gelegte Kugeln sich rechtwinklig schneiden.

Ein Kreisbündel besteht aus allen Kreisen auf derselben Kugel (oder Ebene), die in einem gegebenen Punkte C dieselbe Potenz haben; zwei Kreisbündel haben einen Kreisbüschel gemein.

Sind A, A' durch reciproke Radien — mit dem Centrum C, der Potenz p — entsprechend, so entsteht, indem die in A' zu AA' senkrechte Ebene als zu A entsprechend bezeichnet wird, das sphärische Polarsystem, welches eine Ordnungskugel hat, wenn $p > 0$. Ordnet man in einer Ebene jedem Punkte die Spur seiner Polarebene im sphärischen Polarsysteme zu, so erhält man das cyklische.

Nun stellt sich die Nothwendigkeit ein, Kugeln mit reellem Centrum und imaginärem Halbmesser einzuführen, woran sich dann eine Reihe von Begriffs-Erweiterungen knüpft. Es werden

dann die sämmtlichen Kugeln, die Gebüsche, Bündel, Büschel von Kugeln als lineare Systeme besprochen; schon in der Vorrede hat Reye auf den Vorzug, den die Kugelgeometrie wegen ihrer Linearität vor der Liniengeometrie hat, welche quadratisch ist, und auf die grössere Anschaulichkeit aufmerksam gemacht; er betrachtet deshalb seine Kugelgeometrie, ebenfalls eine Geometrie einer vierfachen Mannigfaltigkeit, als eine Art Propädeutik für die Liniengeometrie.

Nach Erläuterung der allgemeinen Begriffe der reciproken und collinearen Beziehung werden solche Beziehungen am Kugelgebüsche nachgewiesen, z. B. der Mittelpunkt einer Kugel eines Gebüsches und ihre Potenzebene mit einer festen Kugel sind homologe Elemente zweier reciproker, die Potenzebenen einer Kugel des Gebüsches mit zwei festen Kugeln homologe Elemente zweier collinearer Räume. Vier Kugeln eines Büschels, die mit einer beliebigen Kugel vier harmonische Potenzebenen geben, thun es mit jeder.

Nun wendet sich die Betrachtung zu Kugeln, die sich berühren, zu den Aehnlichkeits-Punkten, -Axen etc., zur Berührung und zum Schnitt von Kreisen auf einer Kugel und zu den durch zwei Kugelkreise gehenden Kegeln.

Weiter wird die Dupin'sche Cyklide behandelt als die Enveloppe einer veränderlichen Kugel, welche drei feste berührt; die Haupteigenschaft der Krümmungslinien wird in einer Note citirt. Ein lineares Kugelsystem ist zu einem andern „normal", wenn es durch sämmtliche Kugeln hindurchgeht, die zu allen Kugeln des zweiten Systems orthogonal sind.

Zum Schluss des synthetischen Haupttheils werden Kugeln und Kreise auf einer Kugel betrachtet, die sich unter gegebenen Winkeln schneiden.

Im analytischen Anhang wird von der auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogenen Gleichung der Kugel ausgegangen

$$x^2+y^2+z^2-2\xi x-2\eta y-2\zeta z+p=0,$$

wo ξ, η, ζ die Coordinaten der Mittelpunkte und p die Potenz der Kugel im Anfangspunkt sind, oder in homogener Form:

$$\alpha_0(x^2+y^2+z^2)-2\alpha_1 x-2\alpha_2 y-2\alpha_3 z+\alpha_4 = 0;$$

ξ, η, ζ, p sind die nicht homogenen, $\alpha_0, \ldots, \alpha_4$ die homogenen Coordinaten der Kugel. Werden die Punkt-Coordinaten transformirt, so bestehen auch zwischen den alten und neuen Coordinaten einer Kugel lineare Beziehungen. 1, 2, 3 Bedingungen zwischen diesen Coordinaten führen zu Kugelsystemen 3[ter], 2[ter], 1[ter] Stufe: Kugelcomplex, Kugelcongruenz, Kugelschaar; sind die Bedingungen linear, so erhält man die Gebüsche, Bündel, Büschel. Durch reciproke Radien geht ein Kugelcomplex n^{ten} Grades in einen ebensolchen über.

Die Coordinaten α_i einer Kugel eines Raumes R seien mit denen α'_i einer Kugel eines andern R' durch die bilineare Relation (mit fünfundzwanzig Coefficienten)

$$\Sigma a_{ik}\alpha_i\alpha'_k = 0, \quad (i, k = 0, 1, 2, 3, 4)$$

verbunden, dann sind jeder Kugel des einen Raumes die sämmtlichen Kugeln eines Gebüsches des andern „verknüpft“; die Orthogonalkugel dieses Gebüsches entspricht der ersteren Kugel; dadurch sind beide Räume in Hinsicht ihrer Kugeln projectiv bezogen. Zwischen den Coordinaten entsprechender Kugeln bestehen lineare Relationen. Verknüpft man vierundzwanzig Kugeln in R mit ebenso vielen in R', oder lässt man sechs Kugeln in R sechs in R' entsprechen, so ist die Beziehung festgelegt. Liegt beiden Räumen dasselbe Coordinatensystem zu Grunde, so findet man weiter, dass es fünf sich selbst entsprechende Kugeln giebt, und dass alle Kugeln, die mit sich selbst verknüpft sind [im Falle $a_{ik} = -a_{ki}$ (Nullsystem) ist das bei jeder der Fall], einen quadratischen Kugelcomplex bilden, dessen Gleichung

$$\Sigma(a_{ik}+a_{ki})\alpha_i\alpha_k = 0, \quad (\alpha_i = \alpha'_i).$$

Ein beliebiger quadratischer Kugelcomplex ist definirt durch

$$\Sigma a_{ik}\alpha_i\alpha_k = 0,$$

wo $a_{ik} = a_{ki}$, also mit fünfzehn Coefficienten. Er führt sofort zu einer symmetrischen bilinearen Verknüpfungsrelation und zu der zugehörigen projectiven Beziehung, für die er der Complex mit sich selbst verknüpfter Kugeln ist und bei der jede zwei Kugeln sich involutorisch entsprechen. Die Polarentheorie derselben wird kurz entwickelt; als Ort der Punktkugeln eine Fläche vierter

Ordnung, als Enveloppe der Ebenen eine solche vom zweiten Grade ermittelt. Die Möglichkeit, die Gleichung des quadratischen Kugelcomplexes auf die Form

$$\sum_1^5 k_i P_i^2 = 0$$

zu bringen, wo die Zahl der Vorzeichen der k_i constant ist, und die P_i linear sind, führt zur Eintheilung der quadratischen Kugelcomplexe.

Eine quadratische Gleichung, verbunden mit einer bez. zwei linearen führt zur quadratischen Kugelcongruenz und zur Kugelschaar.

Diese letzteren Betrachtungen sind eine Specialisirung der Untersuchungen für allgemeine Flächen F_1^2, welche Reye in Borchardt J. LXXXII. p. 173 (F. d. M. IX. 1877. 543) veröffentlicht hat. Kürzlich ist auch eine italienische Uebersetzung des Buches von Misani erschienen (Mailand, Höpli. 1881).

Sm.

R. Krause. Ueber ein besonderes Gebüsch von Flächen zweiter Ordnung. Diss. Strassburg.

An die von Herrn Reye betrachtete Beziehung eines Flächengebüsches Σ und eines räumlichen Systems Σ_1 (siehe das Referat über Reye's Geometrie der Lage auf p. 424) schliesst diese Arbeit sich an, betrachtet aber den speciellen Fall, dass die Flächen des Gebüsches eine Gerade, die Basis b, gemeinsam haben. Jede drei Flächen des Gebüsches haben ausser b vier associirte Punkte gemein, die also einem Punkte von Σ_1 correspondiren. Es werden im Gebüsche selber die Kegel, Ebenenpaare, Kernfläche besprochen, sowie das Gebilde, welches, wenn ein Punkt ein Gebilde durchläuft, durch dessen drei associirte Punkte beschrieben wird. Einer Geraden in Σ_1, bez. in Σ entspricht eine cubische Raumcurve, bez. ein Kegelschnitt, einer Ebene in Σ_1, Σ eine Fläche des Gebüsches, eine Regelfläche dritten Grades. Am ausführlichsten werden behandelt die Flächen sechster, bez. vierter Ordnung, welche beliebigen Flächen zweiten Grades im Raume

des Gebüsches, bez. solchen, die durch die Basis b gehen, correspondiren. Sm.

E. d'Ovidio. Teoremi sui sistemi di superficie di secondo grado. Atti di Torino XIV. 452-456.

Synthetischer Beweis des folgenden Satzes: Sind $a\,b\,c\,d$ die Ecken des einem Büschel von Flächen zweiten Grades conjugirten Tetraeders und $e\,f\,g$ die Punkte, in denen eine beliebige Ebene von den Flächen des Büschels berührt wird, so bilden $e\,f\,g\,a$ ebenfalls Ecken eines conjugirten Tetraeders für ein Büschel von Flächen zweiten Grades, welches die dem ersten Büschel angehörige Kegelfläche mit dem Scheitel a ebenfalls enthält, und von welchem drei Individuen die Ebene $b\,c\,d$ in den Punkten $b\,c\,d$ berühren. V.

F. Folie et C. Le Paige. Sur quelques théorèmes relatifs aux surfaces d'ordre supérieur. Bull. de Belg. (2) XLVIII. 41-44.

Anwendung des verallgemeinerten anharmonischen Verhältnisses auf Flächen zweiten und dritten Grades.

Mn. (O.)

H. Thieme. Die Definition der geometrischen Gebilde durch Construction ihrer Polarsysteme. Schlömilch Z. XXIV. 221-229, 276-284.

Dass ein Netz von Curven, bez. ein Gebüsche von Flächen n^{ter} Ordnung im allgemeinen nicht das Netz, bez. Gebüsche der ersten Polaren für eine Curve, Fläche $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung ist, ist bekannt. Es handelt sich also darum, solche Polar-Systeme zu construiren. Der Verfasser thut es für den Fall der Flächen, unter der Voraussetzung, dass, was für n zu beweisen ist, für $n-1$ richtig ist. Es hätte sich vielleicht empfohlen, den zunächst inter-

essantesten Fall $n = 2$, also den des Polarsystems der Flächen dritter Ordnung, der ja überdies bisweilen eine besondere Behandlung erfordert, voranzuschicken, um das Verständnis des allgemeinen Falles zu erleichtern. Einem Punkte a wird eine beliebige Fläche A^n_a als Polarfläche zugeordnet; die einem zweiten b zugeordnete A^n_b ist nicht mehr ganz willkürlich, denn wegen der Eigenschaft der gemischten Polaren muss die erste Polare A^{n-1}_{ab} von b nach A^n_a die erste Polare von a für A^n_b sein. Man kann, in Folge der obigen Voraussetzung, dieser Bedingung genügen; dann zeigt sich, dass jedem Punkte x von ab eine Fläche A^n_x des Büschels (A^n_a, A^n_b) zugeordnet ist, derartig, dass, wenn x, y beide auf ab liegen, sie und ihre Polarflächen der Eigenschaft gemischter Polaren genügen. Wenn nun c ausserhalb ab liegt, so muss A^n_c so beschaffen sein, dass die Polaren A^{n-1}_{ac}, A^{n-1}_{bc} von c nach A^n_a und A^n_b für sie die Polaren von a, b sind. Es sei A^n_c eine dieser Bedingung genügende Fläche. Dann ist auch A^{n-1}_{xc} für dieselbe Fläche Polare von x; ($n = 2$ erfordert, weil es von Ebenen keine Polare mehr giebt, einen besonderen Beweis). Jedem Punkte der Ebene abc wird nun eine Fläche zugeordnet, alle bilden einen Bündel, die einer Geraden in abc zugehörigen darin einen Büschel, und jede zwei derselben mit ihren Polen genügen der Eigenschaft der gemischten Polaren.

Endlich wird noch ein vierter Punkt d ausserhalb abc genommen; für die ihm zugeordnete Fläche A^n_d müssen zunächst die Polaren A^{n-1}_{ad}, A^{n-1}_{bd}, A^{n-1}_{cd} von d nach A^n_a, A^n_b, A^n_c die Polaren von a, b, c sein. Hier wäre der Fall $n = 2$ doch etwas ausführlicher zu behandeln gewesen und zu zeigen, dass dies nicht neun, sondern acht Bedingungen für A^n_d sind; eine Andeutung ist freilich gemacht in den ersten Zeilen von S. 225; aber wegen des vielfachen Interesses, das grade dieser Fall erregt hat, schien grössere Ausführlichkeit geboten. Sind für eine Fläche zweiter Ordnung zwei Mal Pol und Polarebene a, A_a; b, A_b gegeben, dann berühren sich alle ∞^3 Flächen in zwei Punkten, nämlich den Doppelpunkten der Involution aa', bb', wenn a', b' die Spuren von A_a, A_b auf ab sind. Ist c_1 der Schnitt der

ab mit der Ebene, welche einen beliebigen dritten Pol c mit (A_a, A_b) verbindet, so muss die Polarebene A_c von c durch den c_1 in der Involution zugeordneten Punkt c' gehen. Thut sie es nicht, so genügt keine allgemeine Fläche, sondern die doppelte Ebene abc oder dual der doppelte Punkt (A_a, A_b, A_c). Geht aber A_c durch c', so ist die Bedingung, dass c und A_c Pol und Polarebene sein sollen, nun blos noch eine zweifache, also giebt es dann einfach unendlich viele Flächen zweiten Grades, für welche a und A_a, b und A_b, c und A_c Pole und Polarebenen sind; sie berühren sich längs eines in der Ebene abc befindlichen Kegelschnitts.

Dass nun in unserm Falle die a, b, c und A_a, A_b, A_c, so wie sie oben construirt, eine solche Lage haben, dass A_c durch c' geht, dafür scheint es, wie gesagt, etwas grösserer Ausführlichkeit des Beweises zu bedürfen.

Die einfachste Unendlichkeit der A_d^2 ergiebt sich nachher in dem Summanden $-f(n-3)$, der für $n > 2$ null oder negativ, für $n = 2$ aber $-(-1) = +1$ wird, was doch noch geometrisch aufzuklären ist.

Ist nun A_d^n der obigen Bedingung gemäss construirt, so zeigt sich dann wieder, dass sich für jeden Punkt z des Raumes eindeutig eine Fläche A_z^n ergiebt; den Punkten einer Geraden, Ebene entsprechen Flächen eines Büschels, Bündels, und jede zwei genügen mit ihren Polen der Eigenschaft der gemischten Polaren. Das Polarsystem ist construirt. Man nehme nun an, dass ein Polarsystem (oder eine Fläche) A^n durch $f(n)$ Bedingungen bestimmt sei, so folgt aus dem Vorhergehenden, dass A_a^n, A_b^n, A_c^n, A_d^n noch resp. $f(n)$, $f(n) - f(n-1)$, $f(n) - 2f(n-1) + f(n-2)$, $f(n) - 3f(n-1) + 3f(n-2) - f(n-3)$ Bedingungen auferlegt werden können, $(n > 3)$. Daraus ergiebt sich, dass für A^{n+1}

$$f(n+1) = 4f(n) - 6f(n-1) + 4f(n-2) - f(n-3).$$

Für $p = 1, 2, 3, 4$ ist nun

$$f(p) = \tfrac{1}{6}(p+1)(p+2)(p+3) - 1;$$

demnach liefert die Functionalgleichung, dass dies durchweg der Fall ist. Also bilden die Polarsysteme $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung min-

destens eine $f(n+1)$-fache Mannigfaltigkeit. In den folgenden Paragraphen werden die verschiedenen linearen Mannigfaltigkeiten erster, zweiter, dritter Stufe behandelt; jedoch mangelt es, wie dem Ref. scheint, dieser Darstellung noch etwas an Klarheit. Z. B. gleich der erste Abschnitt des vom Büschel handelnden § 2 enthält eine dem Ref. nicht verständliche Stelle. Der Verfasser vergleicht, wenn Ref. ihn recht versteht, die doppelte Mannigfaltigkeit, die sich durch die Büschel (A_a^n, B_a^n), (A_b^n, B_b^n), ..., der Polarflächen der Punkte einer Geraden ab in den beiden constituirenden Polarsystemen A^{n+1}, B^{n+1} ergiebt, mit den Punkten einer Regelfläche zweiten Grades; aber eine zweifache lineare Mannigfaltigkeit von Punkten ist letztere doch nicht, und es ist nicht der Fall, dass eine einfache lineare Mannigfaltigkeit (Punktreihe) mit ihr ein oder alle Elemente gemein hat; so ist es auch bei der Mannigfaltigkeit der Flächen: die Ableitung des zweiten Systems von Büscheln bedürfte also doch einer gründlicheren Erörterung.

Bei einer $\{f(n)+1\}$-fachen Mannigfaltigkeit von Polarsystemen $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung findet sich, dass es einen Büschel giebt, für dessen sämmtliche Elemente ein gegebener Punkt und eine gegebene Fläche n^{ter} Ordnung Pol und Polare sind; weil eben die Flächen n^{ter} Ordnung nur $f(n)$-fach unendlich sind. Aus diesem Grunde ist es nicht selbstverständlich, dass die Mannigfaltigkeit der Polarsysteme $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung nicht über $f(n+1)$ herausgeht; der § 5 beweist dies deshalb. Der nächste Paragraph behandelt die niedrigeren Polaren, die Ordnungsfläche, den Specialfall, dass die sämmtlichen Flächen des Polarsystems einen Punkt gemein haben, der dann ein Knotenpunkt der Ordnungsfläche ist. Sm.

R. Sturm. Zur Theorie der Flächen dritter Ordnung.

Borchardt J. LXXXVIII. 213-241.

Die Arbeit enthält eine Reihe von Nachträgen zu dem bekannten Werke des Verfassers: Synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung. Leipzig 1867.

Die Notizen betreffen zunächst (I. u. II.) einen vereinfachten

Nachweis der siebenundzwanzig Geraden und ihrer gegenseitigen Durchschnitte und einige weitere Vereinfachungen.

Ein grösserer Abschnitt (III.) behandelt genauer die Kegelschnitte auf den Flächen dritter Ordnung. Es sei g eine der siebenundzwanzig Geraden der Fläche F^3, K ein beliebiger der Kegelschnitte, in welchem irgend eine durch g gelegte Gerade die F^3 ausserdem schneidet, O ein Punkt von g. Der Punkt O hat für jeden K eine Polare. Ihr geometrischer Ort ist eine Fläche zweiter Ordnung, nämlich die erste Polare von F^3 in Bezug auf O. Eine beliebige Gerade l wird von zweien dieser Geraden getroffen. Nimmt man also auf l einen Punkt, legt durch diesen Punkt und die Gerade g die Ebene E, welche einen Kegelschnitt K enthält, bestimmt man für K die Polare des auf l genommenen Punktes, so erhält man eine Schaar von Geraden, zu der g doppelt gehört, während ausserdem in jeder Ebene E eine Gerade der Schaar liegt.

Der Ort dieser Geraden ist demnach eine Regelfläche dritten Grades mit dem Selbstschnitt l. Diese Fläche geht durch die fünf Doppelpunkte der in Geradenpaare aufgelösten K hindurch. Ist l die Verbindungslinie zweier solcher Doppelpunkte, so ist die entsprechende Regelfläche aufgelöst in die Ebenen der beiden Paare und die Ebene durch die drei übrigen Doppelpunkte. Mithin bilden die Doppelpunkte der fünf Geradenpaare ein derartiges räumliches Fünfeck, dass in Bezug auf jeden K die Spuren der Verbindungslinie zweier Ecken und der Verbindungsebene der drei anderen in der Ebene von K Pol und Polare sind.

Es wird dann das vierfach unendliche System von Flächen zweiten Grades betrachtet, welches durch die fünf oben erwähnten Doppelpunkte hindurchgeht. Dies System schneidet jede der Ebenen E in einem System von Kegelschnitten, von denen jeder einer einfach unendlichen Schaar von Polardreiecken von K umschrieben ist — welche also nach Herrn Smith's Ausdrucksweise dem K harmonisch umschrieben sind, oder welche nach Herrn Reye's Bezeichnung „den Kegelschnitt K stützen". Hieran werden noch einige weitere Folgerungen geknüpft.

Die Untersuchung wendet sich dann der Frage zu, wie viel Flächen dritter Ordnung durch drei Kegelschnitte gelegt werden

können, deren jeder eine Gerade g in zwei Punkten schneidet. Damit die Fläche nicht aufgelöst sei, müssen jene drei Punktpaare auf g eine Involution bilden. Ist diese Bedingung erfüllt, so giebt es einen Büschel von Flächen F^3, welche sich längs g osculiren, und für alle Flächen des Büschels ist der Ort der Pole von G in Bezug auf jeden der Kegelschnitte K eine und dieselbe Curve.

Die genauere Untersuchung der letzteren Curve ist auch für die Betrachtung einer einzelnen Fläche von Wichtigkeit. Man erkennt mit Hülfe derselben, dass der Ort der Mittelpunkte aller K eine Raumcurve vierter Ordnung und zweiter Art ist, welche die Gerade G dreimal schneidet und durch die Doppelpunkte der fünf Geradenpaare geht. Ausser diesen acht Punkten hat sie mit F^3 noch vier unendlich entfernte Punkte gemein, die Mittelpunkte der vier Parabeln, welche sich unter den K befinden. Beiläufig wird auch nachgewiesen, dass unter den Kegelschnitten K sich drei gleichseitige Hyperbeln befinden. Den Schluss dieses Abschnittes bildet die Betrachtung zweier ebener Kegelschnittsysteme, welche aus dem System der Kegelschnitte K abgeleitet werden, das eine durch perspectivische Projection von einem festen Punkt auf eine feste Ebene, das andere durch Drehen um g in eine feste durch g gelegte Ebene, wobei ein symmetrisches System entsteht, da jeder Kegelschnitt zwei Lagen annimmt, je nachdem man vorwärts um einen Winkel oder rückwärts um den Supplementwinkel dreht. Bezeichnen μ und ν die Charakteristiken dieser Systeme, d. h. die Zahlen der Individuen, welche durch einen Punkt gehen (μ) und derjenigen, welche eine Gerade berühren (ν), so ergiebt sich für das erste System $\mu = 3$, $\nu = 4$, bei dem andern $\mu = 6$, $\nu = 8$. Weitere Folgerungen, welche sich ergeben, müssen hier übergangen werden.

Einen sehr ausgedehnten Abschnitt (IV.) widmet der Verfasser der rein geometrischen Theorie der Polaren, indem er sich in den Hauptgedanken an die entsprechende Arbeit des Herrn Milinowski für ebene Curven dritter und vierter Ordnung (Schlömilch Z. XXI. 436, s. F. d. M. VIII. 1876. p. 313 und XXIII. 239, s. F. d. M. X. 1878. p. 403) anschliesst, doch aber in vieler Hinsicht eigene Wege einschlägt.

Den Ausgangspunkt bildet eine Erzeugungsweise der Fläche F^3 durch ein Netz von Flächen zweiten Grades, welche alle eine Raumcurve dritten Grades gemein haben und einen zu ihm reciproken Strahlenbündel. Es wird nachgewiesen, dass jede R^3 auf F^3 als Grundcurve des Netzes und jeder Punkt P der Fläche F^3, der nicht auf R^3 liegt, als Scheitel des Büschels genommen werden kann. Die Polarebenen des Punktes P in Bezug auf alle Flächen des Netzes bilden einen dem Netze collinearen, dem Strahlenbündel reciproken Ebenenbündel, und durch beide Bündel wird eine Fläche zweiter Ordnung P^2 erzeugt, welche nichts anderes ist, als die erste Polare des Punktes P für F^3. Um nun die erste Polare für einen beliebigen Punkt P, der nicht auf F^3 liegt, zu erhalten, lege man durch P eine beliebige Gerade l, welche F^3 in drei Punkten A, B, C trifft, deren erste Polaren $A^2 B^2 C^2$, wie sich beweisen lässt, einem Flächenbüschel angehören. Bezieht man die Punktreihe A, B, C projectivisch auf die Glieder des Büschels A^2, B^2, C^2, so entspricht dem Punkte P eine Fläche P^2. Von dieser Fläche wird nachgewiesen, dass sie unabhängig von der Richtung der durch P gelegten Geraden, also nur abhängig von der Lage des Punktes P ist. Diese Fläche wird die erste Polare des Punktes P für F^3 genannt. Es lässt sich nun zeigen, dass aus dieser Definition die bekannten Eigenschaften der Polare folgen, was hier übergangen werden mag. Nur folgende Punkte mögen hervorgehoben werden. Die zweite Polare von P ist eine Ebene P^1, welche F^3 in einer Curve C^3 schneidet. Der Kegel, welcher C^3 zur Basis und P zum Scheitel hat, schneidet F^3 noch in einer Curve sechster Ordnung $\mathfrak{P}^6$, durch welche wieder eine Fläche zweiter Ordnung $\mathfrak{P}^2$ hindurchgeht, wie der Verfasser bereits in seinem oben citirten Werke bewiesen hat; diese Fläche bezeichnet er jetzt als die Nebenpolarfläche von P für F^3. Der Tangentialkegel von P auf F^3_1, welcher durch die Berührungscurve P^6 hindurchgeht, die der Durchschnitt der ersten Polare P^2 mit F^3 ist, hat ausserdem mit F^3 eine Raumcurve P^6_1 gemein, von der der Verfasser nachweist, dass sie ebenfalls auf einer Fläche zweiter Ordnung P^2_1 liegt. Dies nennt der Verfasser die Satellitfläche von P. Für die drei Flächen P^2, $\mathfrak{P}^2$

und P_1^2 sind der Punkt P und die Ebene P^1 Pol und Polare, und zwar berühren sich diese drei Flächen längs eines in P^1 gelegenen Kegelschnittes.

Am Schluss dieses Abschnittes werden die Betrachtungen, welche zum Begriff der Kernfläche (Hesse'schen Determinante) der Fläche führen, wesentlich gegen die frühere Darstellung vereinfacht, indem der bekannte Begriff der gemischten Polare zu Hülfe genommen wird, und es werden einige untergeordnete Unrichtigkeiten, welche in dem Werke über Flächen dritter Ordnung enthalten waren, richtig gestellt.

Der letzte grössere Abschnitt behandelt die Schnitte zweier Flächen dritter Ordnung oder einer Fläche dritter und einer solchen zweiter Ordnung. Es ergeben sich hierbei, wie in dem grösseren Werke ausführlich besprochen war, siebzehn verschiedene Curvenarten. Hier wird nun ein allgemeines Gesetz über die Zahl der Bedingungen, denen derartige Curven genügen müssen, aufgestellt. Ist nämlich R eine auf einer Fläche F^p p^{ter} Ordnung liegende Curve, t_p der Grad ihrer Mächtigkeit auf F^p, N_p die Zahl der Bedingungen, die man überhaupt F^p auferlegen kann, u der Grad der Mächtigkeit der Curve R im Raume, so ist

$$u = N_p + t_p - (N_p - f_p) = t_p + f_p.$$

Ist g_p die Zahl der Bedingungen, die man R auferlegt, damit sie auf F^p liegen, so ist

$$g_p = u - t_p = f_p.$$

Die Zahl der Bedingungen, welche man F^p auferlegt, damit sie durch R gehe (wenn dies möglich ist), ist gleich der der Bedingungen, welche man einer R auferlegen muss, damit sie auf einer gegebenen F^p liege. Bilden zwei Curven R' und R'' zusammen einen vollen Schnitt $(F^p F^q)$, so ergeben sich bei entsprechender Bezeichnung der Zahlen die Formeln

$$f_q' - t_p'' = f_q - t_p' \quad \text{und} \quad f_p'' - t_q'' = f_p' - t_q'.$$

Hierdurch wird nun ein Mittel gewonnen, die siebzehn Arten von Curven, von den einfachsten anfangend, ihrem Character nach zu bestimmen.

Der Schluss der Arbeit ist durch einen kurzen Nachtrag

gebildet, welcher an einige von Herrn Chasles u. a. angestellte Untersuchungen anknüpft, und in dem von gewissen Curven der Fläche gehandelt wird, dann von ihrer eindeutigen Abbildung in die Ebene durch ein Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe, dessen Strahlen sämmtlich zwei windschiefe Gerade der Fläche schneiden, und wo im Allgemeinen jedem Punkt ein Strahl und umgekehrt entspricht, endlich von einem einfachen Gesetz über die Mannigfaltigkeiten (d. h. Constantenzahlen) gewisser Raumcurven, welches von Herrn Schubert herrührt.

Dies ist in kurzen Zügen der Inhalt der Arbeit, durch welche die Theorie der Flächen dritter Ordnung sowohl hinsichtlich der Resultate, als hinsichtlich der synthetischen Methode der Behandlung mannigfaltige Erweiterungen und Bereicherungen erfahren hat. A.

P. Cassani. La quadrica dei dodici punti e ricerche che le si collegano. Battaglini G. XVII. 202-218.

Der Feuerbach'sche Kreis, welcher durch die drei Fusspunkte der Höhen, die drei Seitenmitten und die drei Mitten der Verbindungslinien des Höhenschnittes mit den Eckpunkten geht und die sechzehn Kreise berührt, welche den vier Dreiecken eingeschrieben sind, die sich aus den drei Eckpunkten und dem Höhenschnitt als Eckpunkten bilden lassen, kann angesehen werden als ein specieller Fall des Kegelschnittes der neun Punkte, der definirt wird als der Ort der Pole einer Geraden in Bezug auf eine Kegelschnittschaar durch vier Punkte. Diese Curve wurde von Steiner als die Panpolare der Geraden in Bezug auf das Kegelschnittbüschel bezeichnet. Der Feuerbach'sche Kreis geht daraus hervor, wenn die Kegelschnittschaar eine Schaar gleichseitiger Hyperbeln und die Gerade die unendlich entfernte wird.

Mit diesem Kegelschnitt der neun Punkte und dem polar entsprechenden Kegelschnitt der neun Geraden, hat sich u. A. der Verfasser beschäftigt (Studio intorno alla conica dei 9 punti e

delle 9 rette. Battaglini G. VII. 369—374. 1869. und Nota sulla conica etc. ibid. VIII. 374—377. 1870. s. F. d. M. II. p. 482).

Durch eine analoge Betrachtung für den Raum findet der Verfasser eine Fläche zweiter Ordnung, welche er als die der zwölf Punkte bezeichnet. Eine andere Fassung des räumlichen Problems hat Herrn Beltrami zu einer Fläche dritter Ordnung geführt.

Der Verfasser sucht den geometrischen Ort der zu einer gegebenen Geraden polaren Geraden in Bezug auf ein Büschel von Flächen zweiten Grades, die eine Raumcurve R_4 gemein haben. Diese Fläche geht, wie sich leicht nachweisen lässt, durch die vier Punkte des dem Flächenbüschel conjugirten Tetraeders hindurch, ausserdem schneidet sie die Raumcurve in denjenigen acht Punkten, deren Tangenten die gegebene Gerade schneiden. Deswegen wird sie vom Verfasser die Fläche der zwölf Punkte genannt. Endlich schneidet sie die gegebene Gerade in den Doppelpunkten der Involution, welche das Flächenbüschel auf ihr hervorruft, also in den Berührungspunkten der beiden Glieder des Büschels mit der Geraden. Der synthetischen Betrachtung dieser und damit zusammenhängender Beziehungen ist eine kurze und einfache analytische Entwickelung beigefügt, und es werden die singulären Fälle genauer discutirt.

In einem zweiten Abschnitte untersucht der Verfasser dasjenige Gebilde, welches einer Curve vierter Ordnung und dritter Classe entspricht, auf die Herr Beltrami bei der Betrachtung des Kegelschnittes der neun Punkte geführt ist, und welche die Enveloppe der Geraden ist, welche einen veränderlichen Punkt der festen Geraden mit denjenigen Punkten des zugehörigen Kegelschnittes der neun Punkte (der Panpolare) verbindet, in welchem sich die sämmtlichen Polaren des ersten Punktes schneiden; diese Curve wird im Falle des Feuerbach'schen Kreises eine Hypocycloide mit drei Spitzen, wie dies schon von Steiner gezeigt ist. In dem räumlichen Problem entspricht dieser Curve eine abwickelbare Fläche, nämlich die Enveloppe derjenigen Ebene, welche durch einen veränderlichen Punkt der festen Geraden und durch die ihr entsprechende Generatrix der Fläche der

zwölf Punkte oder Panpolare hindurchgeht. Der Verfasser bemerkt, dass er bei der analytischen Entwickelung der Gleichung dieser Fläche, welche von der dritten Classe ist, Herrn Beltrami eine wesentliche Vereinfachung verdankt.

In einem dritten Abschnitte endlich sucht der Verfasser eine andere räumliche Analogie zu dem ebenen Probleme auf. Er bestimmt nämlich im Steiner'schen Sinne die Panpolare einer festen Ebene in Bezug auf ein Flächenbündel zweiten Grades, d. h. in Bezug auf alle Flächen, welche acht Punkte gemeinsam haben, und wird so auf eine der bekannten Steiner'schen Erzeugungsarten einer Fläche dritter Ordnung geführt. Die Fläche schneidet jede der achtundzwanzig Geraden, welche je zwei der acht Punkte verbinden, in demjenigen Punkte, welcher dem Durchschnitt derselben Geraden mit der festen Ebene harmonisch zugeordnet ist.

Wählt man specieller das Flächenbündel so, dass alle Flächen ein gemeinsames conjugirtes Tetraeder haben, so specialisirt sich die Sache und man erhält die von Herrn Beltrami und auch von Herrn Cayley untersuchte Fläche. A.

Elliot. Note sur la cyclide. Darboux Bull. (2) III. 238-241.

Jede Fläche S, deren eine Schaar von Krümmungslinien aus Kreisen besteht, kann als Enveloppe einer Kugel betrachtet werden, deren Mittelpunkt eine Curve A beschreibt. Der Kegel, welcher den jedesmaligen Mittelpunkt zum Scheitel hat und durch den Kreis hindurchgeht, hat zur Axe die Tangente in A und schneidet die Fläche S rechtwinklig.

Alle Normalen von S gehen durch die Curve A. Umgekehrt, wenn eine Fläche die rechtwinklige Trajectorie derartiger Kegel ist, so besteht eine Schaar ihrer Krümmungslinien aus Kreisen.

Sollen nun die Normalen einer Fläche die Geraden sein, welche zwei gegebene Curven A und B schneiden, oder sollen, was dasselbe sagt, die Mittelpunktsflächen einer Fläche sich auf zwei Curven reduciren, so müssen alle Normalen, welche von einem Punkte der einen Curve ausgehen, Rotationskegel sein,

deren Axe mit der Tangente des Curvenpunktes zusammenfällt. Hieraus lässt sich schliessen, dass die beiden Curven *A* und *B* reelle confocale Kegelschnitte sind, deren Ebenen auf einander rechtwinklig stehen, und dass die Fläche eine sogenannte Cyklide ist, d. h. die Enveloppe aller Kugeln, die drei gegebene Kugeln berühren, und zwar tritt sie in zweifacher Weise als solche auf, und ihre sämmtlichen Krümmungslinien sind Kreise.

Allgemeiner ist die Bedingung dafür, dass die eine der beiden Mittelpunktsflächen sich auf eine Curve reducirt, dieselbe wie die, dass ein System von Krümmungslinien aus Kreisen besteht, dass sie also die Enveloppe einer einfachen Kugelschaar ist. A.

A. Mannheim. Sur la surface de l'onde. Ass. Fr. 1878.

Es sei *G* die Generatrix einer Regelfläche (*G*) und *o* ein fester Punkt im Raum. Die Ebene (*o*, *G*) berühre die Regelfläche in einem Punkte *a*. Die Ebene, welche in einem beliebigen Punkt *b* die Generatrix berührt, schliesst mit jener einen Winkel ein, welcher mit der Lage von *b* sich verändert. Trägt man diesen Winkel an den Strahl *ax* an, welcher die Verlängerung des Strahls *oa* bildet, so wird der freie Schenkel desselben den Strahl *ob* in einem Punkte *b'* schneiden. Die Strahlen *ob* und *ab'* bilden bei der Variation von *b* zwei projectivische Strahlbüschel in perspectivischer Lage; ihr Durchschnitt ist deswegen eine Gerade, welche als Hülfsgerade bei den Entwickelungen des Verfassers eine fruchtbare Anwendung findet. Schneiden zwei beliebige Strahlen *ob* und *oe* auf dieser Hülfsgeraden eine Strecke *b'e'* ab, so erscheint diese von *a* aus unter dem Winkel, welchen die Berührungsebenen der Regelfläche in *b* und *e* einschliessen. Das Gesetz der Lagenänderung der Berührungsebenen in den verschiedenen Punkten einer Generatrix wird auf solche Weise in einfacher geometrischer Form veranschaulicht, und diese Darstellungsform dient dem Verfasser dazu, einige den Gegenstand betreffende Relationen und Constructionen anzugeben. Mit ihrer Hülfe wird der Zusammenhang zwischen einem Ellipsoid und der von ihm abgeleiteten Wellenfläche unter-

sucht. Wenn o das Centrum eines Ellipsoides E ist, m ein Punkt seiner Fläche und mn Normale in ihm, so kann man in der Ebene omn senkrecht auf om in o eine Strecke $om_1 = om$ abtragen und erhält einen Punkt der Wellenfläche S_0, welcher dem Punkte m entspricht. Ein Loth von m_1 auf jene Normale ist alsdann Normale in m_1 an S_0. Dreht man daher die Ebene omn um den Punkt o in sich selbst um einen rechten Winkel, so geht die Normale des Ellipsoides E in die Normale an S_0 über. Irgend eine Normalenfläche von E (normalie, Ort der Normalen längs einer Curve auf E) lässt sich auf diese Weise in eine Normalenfläche von S_0 überführen, und man kann im Besonderen diejenige Normalenfläche in E untersuchen, aus welcher sich eine abwickelbare Normalenfläche für S_0 ableitet. Indem der Verfasser diesem Gedanken folgt, entwickelt er eine Reihe geometrischer Beziehungen zwischen den Krümmungscentren auf einer Normale eines Ellipsoides E und auf der entsprechenden Normale der Wellenfläche.

Schn.

A. Mannheim. Transformation par polaires réciproques d'un pinceau de normales. Ass. Fr. 1878.

Mit Hülfe einer Kugel wird ein Normalenbündel in sein reciprokes Gebilde transformirt, und aus den gegenseitigen Beziehungen dieser beiden Strahlenbündel werden einige geometrische Relationen hergeleitet. So gewinnt Herr Mannheim u. A. den Satz: „Zieht man an zwei beliebige Flächen (A) und (B) zwei parallele Ebenen, welche bezüglich in a und b die Flächen berühren, so erzeugt die Gerade ab ein Strahlenbündel, wenn die Lage der Tangentialebenen um den Punkt a variirt wird. Die Fokalebenen dieses Bündels schneiden die Berührungsebenen in a und b längs conjugirter Tangenten.“ Ein anderes Theorem ist folgendes: „Zieht man von einem festen Punkte o aus einen Strahl, welcher die Fläche (A) in a, die Fläche (B) in b trifft, so schneiden sich die Tangentialebenen in a und b längs einer Geraden D. Diese Gerade D erzeugt, wenn der Strahl, der von o auslief, in die möglichen Nachbarlagen übergeht, ein Strahlbündel. Die Brennpunkte f_1 und f_2 dieses Strahlenbündels liegen so, dass die

Richtungen af_1, af_2 und bf_1, bf_2 conjugirte Tangenten der Flächen (A) und (B) bilden." Diese Sätze mögen zur Kennzeichnung der Ergebnisse der Untersuchung ausreichen.

Schn.

A. Mannheim. Construction de la normale à la surface trajectoire d'un point d'une figure de forme invariable dont le déplacement est assujetti à quatre conditions. Ass. Fr. 1878.

Wenn ein starrer Körper sich so bewegt, dass vier seiner Punkte a, b, c, e auf vier festen Flächen (a), (b), (c), (e) gleiten, so beschreibt ein Punkt n desselben eine Flächentrajectorie. Die Normale derselben lässt sich durch Construction aus den Normalen A, B, C, E herleiten. Es sind, wie Herr Mannheim früher gezeigt hat, die beiden Geraden D und $\varDelta$ zu construiren, welche jene vier Normalen schneiden; die Gerade M, welche von m aus diese Geraden durchschneidet, ist die gesuchte Normale der Flächentrajectorie (m). Herr Mannheim stellt sich nunmehr die Aufgabe, die Construction auch für den Fall auszuführen, dass D und $\varDelta$ imaginär sind, und giebt davon folgende Lösung: Die Gerade am trifft das Hyperboloid (A, B, C) in einem Punkt g, durch ihn geht eine Gerade G, welche auf dem Hyperboloid liegt und derselben Schaar von Erzeugenden angehört, wie A, B, C. In derselben Art lässt sich zu den drei Normalen A, B, E eine zugehörige Gerade H construiren. Die drei Geraden A, G, H bestimmen wieder ein Hyperboloid, auf ihm liegt die Normale M; sie ist die Gerade, welche der Schaar jener Erzeugenden angehört und durch m bestimmt ist. In der That treffen die Geraden D und $\varDelta$, welche Erzeugende der Hyperboloide (A, B, C) und (A, B, E) sind, die Geraden G und H, sind also Erzeugende des Hyperboloids (A, G, H); es trifft demnach die oben construirte Gerade M die Geraden D und $\varDelta$. Hiermit ist die Richtigkeit der Construction bewiesen. Schn.

A. Mannheim. Construction des centres de courbure principaux de la surface de vis à filet triangulaire. Ass. Fr. 1878.

Herr Mannheim löst die Aufgabe nach den ihm eigenen synthetischen Methoden und fügt einige die Schraubenfläche betreffende geometrische Relationen hinzu. Schn.

G. Bruno. Dimostrazione geometrica di alcune proprietà della superficie generale dalla curva logaritmica moventesi elicoidalmente intorno al suo assintoto. Atti di Torino XIV. 735-748.

Unter einer logarithmischen Curve ist eine ebene Curve verstanden, welche in Bezug auf eine feste Axe eine constante Subtangente hat, deren Gleichung also, wenn man jene Linie zur x-Axe wählt, die Form annimmt $y = ae^{\frac{x}{h}}$. Diese Axe ist zugleich Asymptote der Curve. Es wird nun diejenige Fläche Σ betrachtet, welche entsteht, wenn sich eine logarithmische Curve so bewegt, dass alle ihre Punkte Schraubenlinien beschreiben, welche die Asymptote zur Axe haben, und für welche die Höhe eines Schraubenganges gleich h ist. Diese Fläche wird geometrisch mit Hülfe der bekannten Methoden der darstellenden Geometrie untersucht, indem die Figuren auf zwei Ebenen projicirt werden, deren eine normal zur Axe steht, während die Andere durch die Axe hindurchgeht. Von den Eigenschaften der Fläche, welche sich natürlich auch analytisch sehr bequem entwickeln lassen, mögen folgende hervorgehoben werden: Die Fläche schneidet die Ebenen normal zur Axe in logarithmischen Spiralen, welche sämmtlich congruent sind, und aus denen die Fläche auch durch schraubenförmige Bewegung erzeugt werden kann. Ist die Axe vertical, so sind diese Linien das System der Horizontalen oder Niveaulinien. Die zugehörigen Falllinien, welche die Niveaulinien senkrecht durchschneiden, projiciren sich auf eine Normalebene zur Axe ebenfalls in ein System congruenter logarithmischer Spiralen, welche leicht zu construiren sind. Alle Tangential-

ebenen, deren Berührungspunkte auf einer Niveaulinie liegen, treffen die Axe in demselben Punkte. Ist dieser Punkt der Axe ein leuchtender Punkt, so ist die betreffende Niveaulinie die Schattengrenze auf der Fläche.

Ein gerader Kreiscylinder, dessen eine Erzeugende mit der Axe zusammenfällt, schneidet die Fläche in einer Curve, welche die Eigenschaft hat, dass die Tangentialebenen der Fläche Σ in allen Punkten derselben einer bestimmten Geraden parallel sind.

Sucht man umgekehrt diejenige Curve auf der Fläche, in deren Punkten die Tangentialebenen einer gegebenen Geraden parallel sind, so findet man, dass die Projection dieser Curve auf eine Ebene normal zur Axe ein Kreis ist, der durch die Axe hindurchgeht. Mit andern Worten, wenn Lichtstrahlen parallel irgend einer Richtung die Fläche treffen, so ist die Projection der Schattengrenze auf eine Ebene senkrecht zur Axe ein Kreis, der die Axe schneidet.

Die Untersuchung der speciellen Fälle giebt noch einige interessante Folgerungen.

Andererseits können die Gebilde durch homologe Verwandtschaft transformirt und dadurch allgemeinere Sätze gewonnen werden. A.

P. H. Schoute. Enkele algemeene beschouwingen omtrent krommen lijnen. Versl. en Mededeel XIV. 251-319.

Fortsetzung früherer Aufsätze des Verfassers über denselben Gegenstand (siehe F. d. M. X. 1878. p. 382), nämlich die synthetische Theorie der Curven im Raume. Ausgehend von der Anwendung der bekannten Plücker'schen Formeln auf zusammengesetzte ebene Curven wird untersucht, unter welchen beschränkenden Bedingungen diese als allgemein gültig betrachtet werden dürfen, um nachher dieselbe Frage für die Raumcurven zu beantworten. Weiter beschäftigt der Verfasser sich mit der Fläche niedrigsten Grades, welche man durch eine Curve n^{ten} Grades legen kann, und untersucht, welcher Einfluss der Anzahl scheinbarer Doppelpunkte, h genannt, zugeschrieben werden muss. Die

Untersuchung, welche den Hauptinhalt des Aufsatzes bildet, zerfällt in drei Abtheilungen. In der ersten wird gezeigt, auf welche Weise die Zahl h die Natur der Curve bestimmt, und welcher Werth h als Grundlage für die Eintheilung von Raumcurven desselben Grades in Curven von verschiedener Gattung gegeben werden muss. Hierbei ergiebt sich, dass nicht nur die Grösse h bei der Eintheilung der Raumcurven desselben Grades in Betracht kommen muss, sondern auch der Grad der Fläche niedrigster Ordnung, welche durch die Curve gelegt wird. In der zweiten Abtheilung werden die Kegelflächen betrachtet, welche auf einfache Weise mit drei, zwei oder einer Raumcurve in Verbindung stehen. Hauptsächlich werden die von Cayley auf analytischem Wege gefundenen Resultate synthetisch abgeleitet und auf zusammengesetztere Figuren erweitert. In der dritten Abtheilung wird in drei bestimmten Gruppen von Flächen die Zahl einfacher Bedingungen, durch welche eine Raumcurve gegeben ist, aufgesucht, hierbei aber das negative Resultat gewonnen, dass diese Zahl nicht als eine Function der Grössen n und h allein zu betrachten ist.

In einem Anhang kommt der Verfasser auf einige ungenaue Betrachtungen seines früheren Aufsatzes über die grösste Zahl vielfacher Punkte einer algebraischen Curve zurück und giebt einige Verbesserungen derselben. Zum Schluss giebt er die Lösung des Problems: Eine Curve so zu bestimmen, dass sie zwei gegebene Punkte zu Doppelpunkten und sieben gegebene Punkte zu einfachen Punkten hat. G.

C. Abzählende Geometrie.

H. Schubert. Calcül der abzählenden Geometrie. Leipzig. Teubner.

Ueber dieses Buch hat der Referent eine ausführliche Besprechung in Schlömilch's Z. XXVI. Heft 2 veröffentlicht und muss im Allgemeinen auf dieselbe verweisen, sowie auch auf seine Besprechungen von Schubert'schen Arbeiten in F. d. M.

VI. bis X. 1874-1878. Die ersten drei Abschnitte, die Symbolik der Bedingungen, die Incidenzformeln, die Coincidenzformeln, geben in neuer Bearbeitung und mit mancherlei Zusätzen die Arbeit aus Clebsch Ann. X. p. 1. (F. d. M. VIII. 1876. 399) wieder. Dem dritten Capitel ist auch, etwas abgekürzt, der Aufsatz über die Flächen zweiten Grades aus Clebsch Ann. X. p. 318 (F. d. M. VIII. 1876. 407) einverleibt.

Der vierte und umfangreichste Abschnitt: „Die Berechnung von Anzahlen durch Ausartungen" bringt zuerst die Berechnung der Elementarzahlen der Kegelschnitte im Raume und der Fläche zweiten Grades nach Chasles, Zeuthen, Schubert (Borchardt J. LXXI. p. 366. F. d. M. II. 1869-1870. p. 446); dann diejenige der Anzahlen ebener Curven dritter Ordnung mit Spitze, bez. mit Doppelpunkt im Raume (Gött. Nachr. 1874. p. 267, 1875. p. 359, Clebsch Ann. XIII. p. 429, F. d. M. VI. 402; VII. 394; X. 431), endlich die der Anzahlen der cubischen Raumcurven selbst, die bis jetzt noch nicht veröffentlicht sind. Eine kurze Mittheilung über die Ausartungen dieser Curven bringen gleichzeitig mit dem Buche Clebsch Ann. XV. 529. — Es schliessen sich noch einige Anzahlen der Curve vierter Ordnung in fester Ebene an. Darauf werden die Anzahlen der linearen Congruenz aus dem ersten Aufsatze von Clebsch Ann. X. wiedergegeben; den Schluss bilden die Probleme der Projectivität, Collineation, Correlation, mit denen sich Hirst und der Unterzeichnete beschäftigt haben. Herr Schubert vereinfacht dieselben und erweitert sie.

Das fünfte Capitel, die mehrfachen Coincidenzen, giebt, stark umgearbeitet, die Aufsätze aus Clebsch Ann. XII. p. 180, 202. XI. p. 347 (F. d. M. IX. 1877. S. 460, 457) wieder.

Der letzte Abschnitt: Die Charakteristiken-Theorie, für welche bis jetzt nur kürzere Publicationen vorlagen (Gött. Nachr. 1876. p. 503; 1877. p. 401; F. d. M. VIII. 388; IX. 464), der also im Allgemeinen als neu anzusehen ist, behandelt die Aufgabe, die Anzahl der gemeinsamen Elemente zweier Systeme α^{ter} und $(c-\alpha)^{\text{ter}}$ Stufe von Gebilden derselben Art, wenn c die Constantenzahl des Gebildes ist, auszudrücken durch gewisse Zahlen der einzelnen Systeme, ihre Charakteristiken, und löst sie

— abgesehen von gewissen, im allgemeinen nicht auftretenden Degenerationen — für den Kegelschnitt, sodann für einige aus incidenten Punkten, Geraden, Ebenen zusammengesetzte Gebilde; die Resultate finden vielfache Anwendungen bei den Curven, Flächen, Complexen etc. Das Buch schliesst mit einem Literatur-Verzeichnis, Sach- und Autoren-Register. Sm.

R. Sturm. Vereinfachung des Problems der räumlichen Projectivität. Clebsch Ann. XV. 407-424.

Das Gebilde Γ, welches aus zwei Strahlen a und b so besteht, dass sowohl die auf ihnen liegenden Punkte, wie auch die durch sie gehenden Ebenen einander projectiv sind, hat die Constantenzahl 4+4+3+3. Diesem Gebilde kann man ausser Grundbedingungen, welche sich auf die Lage der Träger a und b beziehen, noch zwei einfache Bedingungen auferlegen, welche sich auf die Projectivität beziehen, nämlich erstens die Bedingung μ, dass zwei Ebenen von a und b, welche durch zwei gegebene zugeordnete Punkte gehen, sich projectiv entsprechen, zweitens die Bedingung ν, dass zwei Punkte von a und b, welche auf zwei gegebenen zugeordneten Ebenen liegen, sich projectiv entsprechen. Bedeuten nun a, a_p, a_e, a_s, a_f die Bedingungen, dass der Träger a eine gegebene Gerade treffe, durch einen gegebenen Punkt gehe, in einer gegebenen Ebene liege, in einem gegebenen Strahlbüschel liege, eine gegebene Lage habe, und bedeuten dann b, b_p, b_e, b_s, b_f dasselbe für den Strahl b, so kann man nach den Zahlen fragen, welche angeben, wieviel Gebilde Γ die vierzehnfachen Bedingungen erfüllen, welche sich aus

$$a,\ a_e,\ a_p,\ a_s,\ a_f,\ b,\ b_e,\ b_p,\ b_s,\ b_f$$

und den Bedingungen μ^m, ν^n zusammensetzen, wo μ^m, resp. ν^n bedeutet, dass die Bedingung μ m mal, resp. die Bedingung ν n mal erfüllt werden soll. Alle diese Anzahlen berechnet Herr Sturm hier aus den Anzahlen, welche sich auf die Ausartungen des Gebildes Γ beziehen. Früher hatte er schon in Clebsch Ann. VI. p. 513 die Anzahlen für projective Ebenenbüschel, d. h. die für $n = 3$ resultirenden Anzahlen des oben definirten Ge-

bildes auf mühsamerem Wege bestimmt. Artet die Projectivität der beiden Ebenenbüschel aus, d. h. entsprechen sämmtliche Ebenen durch a einer und derselben Ebene durch b und sämmtliche Ebenen durch b einer und derselben Ebene durch a, so erhält man eine Ausartung von der Constantenzahl 13, die ω heissen möge. Die durch Ausartung der Projectivität der geraden Punktreihen entstehende Ausartung heisse Θ. Dann ist natürlich, genau wie bei jedem aus zwei projectiven Grundgebilden zusammengesetzten Gebilde:

$$2\mu = a + \omega,$$

und ebenso

$$2\nu = a + \Theta.$$

Diese Formeln liefern die gesuchten Zahlen, da ja die auf ω und auf Θ bezüglichen Zahlen sich aus den gewöhnlichen Projectivitäts-Zahlen zusammensetzen.

Der Verfasser hatte wohl bei der Abfassung dieser Arbeit einen doppelten Zweck. Erstens wollte er die durch die Betrachtung der Ausartungen der Projectivität ermöglichte Vereinfachung der Lösung der Projectivitätsprobleme zeigen. Zweitens wollte er der Bestimmung der Anzahlen für correlative Räume eine wichtige Vorarbeit liefern. Scht.

G. Halphén. Théorie des caractéristiques pour les coniques. Clebsch Ann. XV. 16-39.

Abdruck der in den Proc. L. M. S. IX. 149—170 erschienenen Abhandlung Halphén's „Sur la théorie des caractéristiques pour les coniques", über welche im zehnten Bande (1878) der F. d. M. p. 427 bis 430 referirt ist. Scht.

G. Halphén. Sur les caractéristiques des systèmes de coniques et de surfaces du second ordre. J. de l'Éc. Pol. XLV. 27-89.

Man lese zunächst das im vorigen Bande des Jahrbuchs enthaltene Referat (F. d. M. X. 1878. p. 427) über die Vorläufer

dieser Abhandlung. Hier dehnt Herr Halphén seine Untersuchungen auf den Fall aus, wo das gegebene, vierstufige Kegelschnittsystem ein allgemeines algebraisches ist. Die Entdeckung der in dem citirten Referate ausführlich beschriebenen dritten Kegelschnitt-Ausartung führte den Verfasser zur Erfindung von Systemen und Bedingungen, bei welchen die Anwendung der Chasles'schen Formel $\alpha\mu+\beta\nu$ eine zu kleine Zahl ergiebt. Die Zahl Γ, um welche $\alpha\mu+\beta\nu$ in jenen Fällen vermindert werden muss, findet Herr Halphén gleich der Zahl der Punkte, welche eine gewisse dem gegebenen einstufigen Kegelschnitt-System zugeordnete Curve mit einer andern der gegebenen einfachen Bedingung zugeordneten Curve im Coordinaten-Anfangspunkte möglicher Weise gemein hat. Zu einer dem Systeme zugeordneten Curve gelangt man auf folgende Weise: Man nehme auf einer festen Geraden drei feste Punkte q, r, s an, suche für jeden der ∞^1 Kegelschnitte des Systems die beiden Schnittpunkte m und m' auf der Geraden und bestimme die ∞^1 Werthe

$$y=[(qrsm)-(qrsm')]^2,$$

wo die runden Klammern, wie üblich, Doppelverhältnisse bezeichnen. Analog nehme man einen festen Punkt und drei von ihm ausgehende Strahlen Q, R, S an, ziehe an jeden der ∞^1 Kegelschnitte des Systems von dem festen Punkt aus die beiden Tangenten M und M' und bestimme auch die ∞^1 Werthe:

$$x=[(QRSM)-(QRSM')]^2.$$

Nimmt man dann je zwei von demselben Kegelschnitt herrührende Werthe von x und y als rechtwinklige Coordinaten eines Punktes, so bilden die so erhaltenen Punkte eine Curve, welche rücksichtlich des Halphén'schen Ergänzungs-Gliedes als dem Systeme zugeordnet gelten kann. Zu einer der gegebenen einfachen Bedingung zugeordneten Curve gelangt man auf folgendem Wege: Es giebt ∞^1 Kegelschnitte, welche jene einfache Bedingung erfüllen und ein gegebenes Dreieck mit den Ecken q, r, s als Polar-Dreieck haben. Für jeden dieser Kegelschnitte bezeichne man den einen der beiden Schnittpunkte auf rs mit m, den einen der beiden Schnittpunkte auf qr mit n und nehme immer zwei demselben Kegelschnitt angehörige Werthe von

$$\left(\frac{mr}{ms}\right)^2 \quad \text{und} \quad \left(\frac{nq}{nr}\right)^2$$

als rechtwinklige Coordinaten eines Punktes. Dann bilden die ∞^1 so erzeugten Punkte eine Curve, welche der Bedingung im Sinne von Halphén zugeordnet ist. Bei der oben definirten, dem Systeme zugeordneten Curve können x und y nur dann gleichzeitig Null sein, wenn sich dieses Werthepaar auf einen Kegelschnitt bezieht, der sowohl unendlich nahe Ordnungsgeraden, wie auch unendlich nahe Tangentenbüschel besitzt. Deshalb ist die Chasles'sche Formel für jede Bedingung richtig, wenn nur das System von der Halphén'schen Ausartung frei ist. Enthält aber das System eine solche Ausartung, so ist jene Formel nur dann richtig, wenn die der Bedingung zugeordnete Curve nicht durch den Coordinaten-Anfangspunkt hindurchgeht. Die Kennzeichen der Gültigkeit der Formel $\alpha\mu+\beta\nu$ können auch noch auf mannigfache Weise anders ausgesprochen werden, z. B. wie folgt: Damit die Formel für jedes System gültig sei, ist es nothwendig und hinreichend, dass die Zahl der Kegelschnitte, welche die gestellte Bedingung erfüllen und dabei eine gegebene Curve in einem gegebenen Punkte vierpunktig berühren, gleich $\alpha+\beta$ sei. Damit zweitens die Formel für jede Bedingung gültig sei, ist es nothwendig und hinreichend, dass sich $2\mu+2\nu$ ergiebt, wenn man die Zahl derjenigen Kegelschnitte des Systems (μ, ν) bestimmt, an welche von einem gegebenen Punkte aus immer zwei Tangenten so gezogen werden können, dass der Sinus des von ihnen gebildeten Winkels ein gegebenes Verhältnis zu der Strecke habe, die ebenderselbe Kegelschnitt auf einem gegebenen Strahle ausschneidet.

Im letzten Abschnitt stellt der Verfasser die analogen Betrachtungen für die Fläche zweiten Grades an. Auch hier ergiebt sich die Zahl derjenigen Elemente eines einstufigen Systems, welche eine gegebene, einfache Bedingung erfüllen, kleiner als die Chasles'sche Zahl $\alpha\mu+\beta\nu+\gamma\varrho$ und zwar wieder um so viel kleiner, wie die Zahl der Punkte beträgt, welche eine gewisse dem Systeme zugeordnete Curve mit einer gewissen der Bedingung zugeordneten Fläche gemeinsam hat.

Wenngleich Herr Halphén hier noch gar nicht auf die Frage

eingegangen ist, ob es unmöglich ist, beim Kegelschnitte mehr als zwei Bedingungen zu definiren, durch welche bei jedem Systeme jede andere Bedingung in linearer Form ausgedrückt werden kann, oder mit andern Worten, ob beim Kegelschnitt das Problem, welches Referent schon 1877 in den Gött. Nachr. S. 401 und dann in dem „Kalkül der abzählenden Geometrie" S. 274 als Charakteristikenproblem definirt hat, gradezu unlösbar sei, so geht doch aus den scharfsinnigen Halphén'schen Untersuchungen hervor, dass für alle Gebilde die Ausschliessung von Systemen mit Halphén'schen Ausartungen die Aufstellung und die Gestalt der Productenformeln wesentlich vereinfachen wird. (Man vergleiche des Referenten Productenformeln für das Dreieck in Clebsch Ann. XVII. S. 153 bis 212). Man darf dabei nur nicht in den Fehler zurückfallen, den de Jonquières, Chasles, Clebsch, Lindemann und der Referent begangen haben, indem sie beim Kegelschnitt den Gültigkeitsbereich ihrer Beweise und ihrer Formeln zu ausgedehnt angenommen haben. Scht.

G. Halphén. Application de la théorie des caractéristiques pour les coniques à une question relative aux polygones de Poncelet. Soc. Phil. Paris (7) III. 17-19.

Wenn zwei Kegelschnitte in beliebiger Lage zu einander gegeben sind, so giebt es bekanntlich kein m-Eck, welches dem einen einbeschrieben, dem andern umbeschrieben sein könnte. Wenn aber ausser einem festen Kegelschnitte ein einstufiges System von Kegelschnitten gegeben ist, so muss es in diesem System eine endliche Anzahl von Kegelschnitten geben, denen ein m-Eck einbeschrieben werden könnte, welches dem festen Kegelschnitte umbeschrieben ist. Diese Zahl theilt Herr Halphén in der vorliegenden Note mit. Sie ist gleich $M.\mu$, wo μ angiebt, wieviel Kegelschnitte des Systems durch einen festen Punkt gehen, und wo

$$M = \tfrac{1}{4}m^2\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\left(1-\frac{1}{q^2}\right)\left(1-\frac{1}{r^2}\right)\cdots,$$

ist, wenn $p, q, r\ldots$ die Primfactoren von m bedeuten. Scht.

G. Halphén. Nombre des coniques qui, dans un plan, satisfont à cinq conditions projectives et indépendantes entre elles. Proc. L. M. S. X. 76-87.

Die in den früheren Arbeiten Halphén's über Kegelschnitt-Charakteristiken entwickelte Methode wird dazu angewandt, um das im Titel genannte Problem zu lösen. Der allgemeine Fall wird auf den speciellen zurückgeführt, in dem die gegebenen fünf einfachen Bedingungen nach der Terminologie des Verfassers elementar sind. Unter einer elementaren Bedingung (p, q) versteht Herr Halphén eine solche, welche durch eine Relation von der Form

$$r^{2q} = k.R^{2p}$$

definirt wird, wo k, p, q gegebene Zahlen sind, wo ausserdem p und q ganz, positiv und relativ prim zu einander sind, und wo endlich r und R die Doppelverhältnis-Differenzen bedeuten, deren Quadrate in dem obigen Referate über die Abhandlung Halphén's aus dem J. de l'Ec. Pol. (s. p. 463) mit x und y bezeichnet wurden. Wenn nun fünf elementare Bedingungen

$$(p, q), (p', q'), (p'', q''), (p''', q'''), (p^{\text{IV}}, q^{\text{IV}})$$

gegeben sind und zwar so angeordnet, dass

$$\frac{p}{q} \leqq \frac{p'}{q'} \leqq \frac{p''}{q''} \leqq \frac{p'''}{q'''} \leqq \frac{p^{\text{IV}}}{q^{\text{IV}}},$$

so ist die Zahl der diese Bedingungen erfüllenden Kegelschnitte gleich

$$8.(2q+p)(2q'+p')(q''+p'')(q'''+2p''')(q^{\text{IV}}+2p^{\text{IV}}).$$

Dabei ist für die Bedingung, dass der Kegelschnitt durch einen gegebenen Punkt gehe, $p = 0$, $q = \frac{1}{2}$ zu setzen und für die dual entsprechende Bedingung $p = \frac{1}{2}$, $q = 0$. Scht.

L. Saltel. Détermination du nombre des points doubles d'un lieu défini par des conditions algébriques. C. R. LXXXVIII. 329-331.

Bekanntlich hat die Schnittcurve einer Fläche m_1^{ten} Grades und einer Fläche m_2^{ten} Grades $\frac{1}{2}m_1 m_2(m_1-1)(m_2-1)$ scheinbare

Doppelpunkte. Dieses schon mehrfach abgeleitete Resultat erhält der Verfasser auch durch seine Methode, indem er nach der Zahl der Doppelpunkte derjenigen ebenen Curve fragt, deren Gleichung man erhält, wenn man aus den beiden Flächengleichungen

$$\begin{cases} f_1(x,\ y,\ a) = 0 \\ f_2(x,\ y,\ a) = 0 \end{cases}$$

die Variable a eliminirt. Scht.

H. Krey. Ueber singuläre Tangenten algebraischer Flächen. Clebsch Ann. XV. 211-238.

Der Referent hatte in Clebsch Ann. XI. 347 (s. F. d. M. IX. 1877. 457) seine Abzählungsmethode dazu verwerthet, um für die punktallgemeine Fläche n^{ter} Ordnung alle die Anzahlen zu bestimmen, welche sich auf die an einer oder mehreren Stellen zwei- oder mehrpunktig berührenden Tangenten beziehen. Diese Resultate dehnt Herr Krey hier mit grosser Geschicklichkeit auf Flächen aus, welche die üblichen Singularitäten besitzen, wobei er auch die sogenannten points-pinces der Doppelcurve und die points-clos der Cuspidalcurve nicht ausschliesst. Dabei leisten ihm einerseits die Untersuchungen Zeuthen's über die Singularitäten der Flächen (Clebsch Ann. X. 446, s. F. d. M. VIII. 1876. 365) andererseits die Coincidenzformeln des Referenten gute Dienste. Die erhaltenen Resultate, denen der Verfasser eine sich selbst duale Gestalt zu geben versteht, können hier leider nicht mitgetheilt werden, da die Auseinandersetzung der Bezeichnung, welche übrigens mit der Zeuthen'schen übereinstimmt, sehr viel Raum kosten würde. Scht.

H. G. Zeuthen. Détermination de courbes et de surfaces satisfaisant à des conditions de contact double. C. R. LXXXIX. 899-902, 946-948.

Um die Zahl derjenigen Curven eines einstufigen Systems zu finden, welche eine gegebene Curve n^{ter} Ordnung n'^{ten} Ranges

berühren, setzte Referent in seinem Calcül der abzählenden Geometrie (Leipzig 1879) S. 14 an die Stelle der allgemeinen Curve n^{ter} Ordnung n'^{ten} Ranges diejenige speciellere ihr homologe Curve, welche aus einer n-fachen Ordnungsgeraden und n' Tangenten-Strahlbüscheln besteht, deren Scheitel auf jener Ordnungsgeraden liegen. Diese Methode wendet nun Herr Zeuthen auch auf den Fall an, wo ein zweistufiges Curvensystem gegeben ist, und wo gefragt wird, wie viel Curven dieses Systems eine gegebene Curve dreipunktig oder zweimal zweipunktig berühren. Es bezeichne nämlich für die gegebene Curve n die Ordnung, n' den Rang, e die Zahl ihrer Spitzen, und ferner für das zweistufige System (μ^2), wieviel Curven durch zwei gegebene Punkte gehen, $(\mu\mu')$, wieviel durch einen gegebenen Punkt gehen und eine gegebene Gerade berühren, (μ'^2), wieviel zwei gegebene Gerade berühren, $[\mu\mu']$, wieviel eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berühren, D, wieviel Curven einen ihrer Doppelpunkte in einem gegebenen Punkte besitzen, E, wieviel Curven eine ihrer Spitzen in einem gegebenen Punkte besitzen, endlich bezeichne D' die D, E' die E dual entsprechende Zahl. Dann ist die Zahl derjenigen Curven des Systems, welche die gegebene Curve dreipunktig berühren, wie zuerst Halphén im Bull. S. M. F. V. p. 14 fand,

$$(3.n'+e).[\mu\mu']+n.E'+n'.E,$$

und die Zahl derjenigen Curven, welche die gegebene Curve an zwei Stellen zweipunktig berühren, wie zuerst Zeuthen fand, gleich

$$\frac{n'(n'-1)}{2}\cdot(\mu^2)+nn'.(\mu\mu')+\frac{n(n-1)}{2}\cdot(\mu'^2)$$
$$+n.D'+n'.D-\tfrac{3}{2}.(3n'+e).[\mu\mu'].$$

Durch ein analoges Verfahren findet Herr Zeuthen auch die Zahl derjenigen Flächen eines zweistufigen Systems, welche zwei einfache Berührungen oder eine stationäre Berührung mit einer festen Fläche eingehen.

In der zweiten Abhandlung berechnet Herr Zeuthen auf ähnliche Weise für zwei einstufige Plancurven-Systeme Σ_1 und Σ_2, wie oft es vorkommt, dass eine Curve des einen Systems eine

Curve des andern Systems dreipunktig resp. zweimal zweipunktig berührt. Die Zahl der dreipunktigen Berührungen beträgt:

$$3.\mu_1\mu_2 + 3.\mu'_1\mu'_2 + c_1\mu'_2 + c_2\mu_1 + c'_1\mu_2 + c'_2\mu_1,$$

und die Zahl der zweimal eine einpunktige Berührung eingehenden Paare von Curven beträgt:

$$(n'_1n'_2-4)\mu_1\mu_2 + (n_1-1)(n'_2-1)\mu_1\mu'_2 + (n'_1-1)(n_2-1)\mu'_1\mu_2 + (n_1n_2-4)\mu'_1\mu'_2 + b_1\mu'_2 + b_2\mu'_1 + b'_1\mu_2 + b'_2\mu_1,$$

wo für das System Σ_1 n_1 die Ordnung der Curven, μ_1 die Zahl der durch einen gegebenen Punkt gehenden Curven, b_1 die Ordnung der Curve der Doppelpunkte, c_1 die Ordnung der Curve der Spitzen, ferner n'_1, μ'_1, b'_1, c'_1 die zu n_1, μ_1, b_1, c_1 dualen Zahlen bezeichnen, und wo die entsprechenden Zeichen mit dem Index 2 dieselben Zahlen für das zweite System Σ_2 bedeuten. Zum Schluss giebt Herr Zeuthen die analogen Zahlen für zwei einstufige Flächensysteme.

Zu den obigen Anzahlen für die stationäre Berührung von Plancurven und einigen damit verwandten Anzahlen gelangte dann auch der Referent vermittelst seiner Formeln für die Zahl der gemeinsamen Dreiecke zweier Dreieckssysteme in den Gött. Nachr. (Juni 1880) und in Clebsch Ann. XVII. 189 u. f.

Scht.

S. Kantor. Ueber zwei besondere Flächen sechster Klasse. Wien. Ber. 1879. 768-786.

Aus einem auf einer F_2 beweglichen Punkte P werden drei ausserhalb derselben gelegene feste Punkte A_1, A_2, A_3 auf die F_2 projicirt; die Verbindungsebene E der drei Projectionen umhüllt die erste betrachtete Fläche Φ^6; sie hat die Ebene Π der drei festen Punkte zur vierfachen Berührungsebene und erhält aus dem Pole π von Π nach F_2 einen doppelt umgeschriebenen Tangentialkegel dritter Classe. Die beiden weiteren Tangentialebenen aus einer Geraden e auf Π sind harmonisch zu Π und $e\pi$ und ergeben sich bei zwei Punkten P, welche auf einer Geraden χ durch π liegen; deren Schnitt K mit Π steht zur Gera-

den e in einer quadratischen Verwandtschaft. Die Beziehung zwischen P und E ergiebt sich als einer eindeutigen Transformation zwischen zwei Räumen S_1, S_2 (F_2 in S_1, Φ^6 in S_2) angehörig, bei der den Punkten von S_1 Ebenen in S_2, den Ebenen in S_1 Flächen dritter Classe, welche eine doppelte Berührungsebene, drei Gerade und einen Tangentialkegel dritter Classe gemein haben, den Punkten in S_2 aber dual sich verhaltende Flächen dritter Ordnung entsprechen. Ebenfalls aus einem eine F_2 durchlaufenden Punkte P werden vier feste Punkte $A_1, \ldots, A_4$ auf die F_2 projicirt. Die beiden Tetraeder der A_i und der Projectionen sind perspectiv und die Perspectiv-Ebene Θ umhüllt die zweite Fläche $\varLambda^6$. Der Ort der Punkte P auf F_2, bei denen die vier Projectionen in einer Ebene liegen, ist der volle Schnitt mit einer Fläche vierter Ordnung, die leicht als Erzeugnis der Schnitte homologer Ebenen von vier collinearen Räumen erkannt wird. Legt man durch die A_i und die beiden in P sich kreuzenden Geraden von F_2 die Fläche zweiter Ordnung, so geht diese noch durch den Schnitt (ΘF_2). Man erhält demnach zu jedem Punkte m eine entsprechende Ebene p als die des zweiten Schnittes von F_2 mit der Fläche zweiter Ordnung, welche durch die A_i und den Schnitt von F_2 mit der Polarebene von p nach F_2 gelegt ist, und dies führt zu der eindeutigen Transformation, welcher die Beziehung zwischen den Punkten und Ebenen von F_2, $\varLambda^6$ angehört; einem Punkte des Raumes S_1, dem F_2 angehört, entspricht eine Ebene im Raume S_2 von $\varLambda^6$; einer Ebene in S_1 eine Fläche dritter Classe in S_2, welche die Ebenen des Tetraeders der A_i zu doppelten Berührungsebenen hat, einem Punkte in S_2 eine Fläche dritter Ordnung in S_1 mit den A_i als Doppelpunkten. Am Schlusse findet sich die Entwickelung der Gleichung von $\varLambda^6$ für die A_i als Fundamentalpunkte. Sm.

O. Stolz. Die Multiplicität der Schnittpunkte zweier algebraischer Curven. Clebsch Ann. XV. 122-160, Innsbr. Ber. 1879.

Der Verfasser definirt zunächst die Multiplicität sowohl der endlichen, wie der unendlichen Schnittpunkte zweier algebraischer

Curven m^{ter} und n^{ter} Ordnung $F(x,y)=0$ und $G(x,y)=0$, worin x, y beliebige, projective Punktcoordinaten bedeuten. Dabei benutzt er mit Vortheil die Kronecker'sche Resolvente und zeigt, dass bei dieser Definition die als Multiplicität eines Punktes bezeichnete Zahl von dem gewählten Coordinatensysteme unabhängig, also eine geometrische Grösse ist. Der Verfasser stellt sich dann die Aufgabe, die Multiplicität eines endlichen Schnittpunktes x_0, y_0 unmittelbar, d. h. ohne $F=0$ und $G=0$ zu bestimmen und findet mit Hülfe der von Halphén (Liouville J. (3) II. 89) und Smith (Proc. L. M. S. VI. p. 160) entdeckten charakteristischen Zahlen, dass jene Multiplicität auf folgende Weise bestimmt werden kann. Man stelle alle Wurzeln y_s der Gleichung $F=0$ auf, welche für $\lim x = x_0$ sich der Grenze y_r nähern, desgleichen alle Wurzeln y'_s der Gleichung $G=0$ von derselben Eigenschaft und entwickele das Product

$$\Pi_{r,s}(y_r - y'_s)$$

nach steigenden ganzen Potenzen von $x-x_0$. Dann giebt der Exponent des ersten Gliedes dieser Reihe die Multiplicität des ersten Punktes $x_0 y_0$ an. Aus diesem Resultate, welches der Verfasser sehr eingehend beweist, erklärt sich, wieso der Grad der Resultanten von $F=0$, $G=0$ nach x oder nach y grösser sein kann als die Gesammtmultiplicität der endlichen Schnittpunkte, und wieso die Grade dieser beiden Resultanten von einander abweichen können. Schliesslich beschäftigt sich der Verfasser auch mit der Multiplicität der unvollständigen Gleichungen gemeinsamer Werthsysteme, nachdem er den Begriff der k^{ten} Ordnung der Unvollständigkeit einer Gleichung in Bezug auf eine der Veränderlichen definirt hat.

Scht.

N. Salvatore-Dino. Sul genere delle curve gobbe. N. Trudi, E. Fergola, F. Padula. Berichte. Rend. di Nap. XVIII. 132-136.

Der Verfasser beweist den folgenden ihm von Herrn Cremona mitgetheilten Satz: Wenn zwei Oberflächen einen Punkt P gemeinsam haben, der für die eine r_1-fach, für die andere r_2-fach ist,

so hat ihre Schnittcurve in P einen $(r_1 r_2)$-fachen Punkt, durch welchen das Geschlecht der Curve um $\frac{1}{2}r_1 . r_2(r_1+r_2-2)$ erniedrigt wird. Dies kommt damit überein, dass die Zahl der scheinbaren Doppelpunkte der Curve sich um

$$\tfrac{1}{2}r_1 . r_2(r_1-1)(r_2-1)$$

vermindert. Entsteht ein r-facher Punkt P der Schnittcurve zweier Flächen aus einer $(r-1)$-fachen Berührung der Flächen im Punkte P, so verliert die Curve keinen scheinbaren Doppelpunkt.

B. K.

C. F. E. Björling. Om eqvivalenter till högre singulariteter i plana algebraiska kurvor. Stockholm Handl. 1878. 33-44.

Es handelt sich um ebene Curven mit Singularitäten im Anfangspunkt und Zweige von der Form

$$y = a((x))^{\frac{n}{m}} + b((x))^{\frac{p}{m}} + c((x))^{\frac{q}{m}} + \cdots$$

Hier wird gefragt nach den Zahlen δ, τ der Doppel- und $\varkappa$, ι der stationären Punkte und Tangenten und der Satz bewiesen: Eine binomische Singularität $[n, m]$ $(b, c, \ldots = 0)$, wo $n > m$ und beide relativ prim sind, ist äquivalent mit $\frac{1}{2}(m-1)(n-3)$ Doppelpunkten $+(m-1)$ stationären Punkten $+\frac{1}{2}(n-m-1)(n-3)$ Doppeltangenten $+(n-m-1)$ stationären Tangenten. Für polynomische Singularitäten lautet der Satz: Sind $y_1, y_2, \ldots y_m$ die m verschiedenen y-Werthe, so ist die Anzahl der Punkte, welche dieser Zweig mit seiner Polare gemein hat, d. h. $2\delta+3\varkappa$ gleich der Summe der Exponenten der niedrigsten Potenzen von x in den $m(m-1)$ Differenzen $y_\alpha - y_\beta$, wo α und $\beta = 1, 2, \ldots m$. Ferner wird bewiesen, dass $\varkappa = m-1$, sodann der Fall mehrerer Zweige untersucht, dann die Resultate durch Beispiele erläutert.

H.

H. Schubert. Beschreibung der Ausartungen der Raumcurve dritter Ordnung. Clebsch Ann. XV. 529-533.

Der Verfasser theilt mit, dass er die Veröffentlichung der dritten Abhandlung seiner Beiträge zur abzählenden Geometrie

(Clebsch Ann. X. S. 1 bis 116, XIII. S. 429 bis 539) wegen seines inzwischen erschienenen „Kalküls der abzählenden Geometrie“ (Teubner 1879) unterlassen wird. Er stellt jedoch hier die schon 1874 bei Abfassung seiner Preisschrift aufgefundenen Definitionen der elf Ausartungen der cubischen Raumcurve zusammen und zwar für diejenigen Geometer, welche, der modernen Abzählungsmethode fern stehend, sich für die Gestalt jener Ausartungen vielleicht aus analytisch-geometrischen Gründen interessiren sollten. Bemerkenswerth ist, dass der Verfasser die cubische Raumcurve immer gleichzeitig als Ort ihrer Punkte, als Ort ihrer Tangenten und als Ort ihrer Schmiegungsebenen auffasst. Von den Ausartungen erwähnen wir hier beispielsweise diejenige, bei welcher die Tangenten vier Strahlbüschel bilden. Dann sind sowohl deren Scheitel wie auch deren Ebenen einer Geraden incident, welche, dreifach gerechnet, zugleich Träger der Punkte und der Tangentialebenen ist. Die vier Scheitel und die vier Ebenen der Tangentenbüschel sind aber in ihrer Lage von einander abhängig und zwar so, dass, wenn die vier Punkte und drei Ebenen oder die vier Ebenen und drei Punkte festgelegt sind, sich die vierte Ebene oder der vierte Punkt vierdeutig bestimmt. Hiermit hängt zusammen, dass es im Allgemeinen keine Raumcurve giebt, welche vier willkürlich gegebene Gerade zu Tangenten hat, dass vielmehr diejenigen Strahlen des Raumes, welche mit drei gegebenen Geraden zusammen ein Tangenten-Quadrupel einer cubischen Raumcurve bilden können, einen Liniencomplex vierten Grades ausfüllen. (Cfr. Voss in Clebsch Ann. XIII. S. 169, s. F. d. M. X. 1878. 529).

Scht.

L. Saltel. Historique et développement d'une méthode pour déterminer toutes les singularités ordinaires d'un lieu défini par k équations algébriques contenant $k-1$ paramètres arbitraires. Bull. de Belg. (2) XLVIII. 632, 681.

Der Titel der Arbeit giebt den Inhalt zur Genüge an. Sie vervollständigt und präcisirt frühere Arbeiten des Verfassers. Auf

S. 681 findet sich eine Notiz über die Geschichte der Arguesischen Transformation. Mn. (O.)

S. Roberts. Solution of a question (5338). Educ. Times XXXII. 43.

Wenn zwei Flächen vom Grade m und n eine isolirte gerade Linie gemeinsam haben und sonst allgemein sind, so berühren sie sich in $m+n-2$ Punkten auf der Linie. O.

Neunter Abschnitt.

Analytische Geometrie.

Capitel 1.

Coordinaten.

J. Carnoy. Cours de géométrie analytique. Géométrie de l'espace. 2[me] éd. Paris. Gauthier-Villars. 1877.

Nach dem dem Referenten vorliegenden Bericht in den Nouv. Ann. (2) XVIII. 45-46 hat das Buch hauptsächlich den Zweck, den Leser mit den in den letzten Zeiten eingeführten neuen Coordinatensystemen bekannt zu machen. O.

W. Fiedler. Geometrische Mittheilungen. I. Die allgemeine Transformation der Coordinaten. Wolf Z. XXIV. 145-179.

Der Verfasser hatte im 16[ten] Bande derselben Zeitschrift bemerkt, dass aus der geometrischen Deutung der Coefficienten einer linearen Substitution die Transformation der Coordinaten sich ergebe. Der Ausführung dieses Gedankens ist die vorliegende Arbeit gewidmet. Wenn nämlich ein Punkt, resp. eine Ebene in Bezug auf eine fundamentale Gruppe A_1, A_2, A_3, A_4, E oder $\mathfrak{E}$ die projectivischen Coordinaten x_i resp. ξ_i, und in Bezug auf eine andere fundamentale Gruppe A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 E' oder $\mathfrak{E}'$ die projectivischen Coordinaten x' resp. ξ' hat, so ist der Uebergang von der einen zu der anderen durch eine lineare Substitution

ausdrückbar, weil es der besondere Fall projectivischer Räume in Congruenz unter Deckung ist. Dies wird nun von dem Verfasser des Näheren auseinandergesetzt, namentlich auch gezeigt, wie die Coefficienten der Substitution zu berechnen sind, und die Resultate an Anwendungen erläutert. O.

A. Cayley. On the transformation of coordinates. Proc. of Cambr. III. 178-184.

Der Verfasser drückt die Formeln für die Transformation zwischen zwei Systemen schiefwinkliger Coordinaten in der Form von Matricen aus, wodurch sie eine äusserst elegante Form annehmen. Glr. (O.)

P. G. Foglini. Coordinate trilineari e loro applicazione alla linea retta e alle curve di secondo ordine in generale. Acc. P. N. L. XXX. 159-210.

Es werden die Principien der Lehre von den trilinearen Coordinaten nebst Anwendung auf Gerade und Kegelschnitte vorgetragen ohne Neuheit zu beanspruchen. H.

W. Veltmann. Die dreiaxigen Coordinaten in den Gleichungen ersten und zweiten Grades. Grunert Arch. LXIV. 113-143.

Der Verfasser bestimmt, ohne die Cartesischen Coordinaten zu benutzen, einen Punkt durch seine senkrechten Abstände von den Seiten und eine Gerade durch ihre senkrechten Abstände von den Ecken eines Fundamentaldreiecks, löst dann die einfachsten Aufgaben aus der analytischen Geometrie des Punktes und der Geraden und discutirt schliesslich die Gleichung zweiten Grades. Die Wahl der Bestimmungsstücke bringt es mit sich, dass in den Gleichungen die Seiten des Axendreiecks vorkommen, und dass es z. B. von der Gestalt dieses Dreiecks abhängt, ob eine und dieselbe Gleichung zweiten Grades eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel darstellt. (Die Gleichung der Geraden z. B. lautet

$$s_1x_1a_1+s_2x_2a_2+s_3x_3a_3=0,$$

worin die Grössen s die Seiten des Fundamentaldreiecks, a die Verhältnisabstände der Geraden von den Ecken dieses Dreiecks sind.) Da diese Eigenthümlichkeiten im Verein mit der durch Einführung der Grössen s bewirkten Complicirtheit der Formeln im Allgemeinen als nachtheilige Eigenschaften eines Coordinatensystems angesehen werden, so dürfte es zweifelhaft sein, ob es sich verlohnt, einem Lehrbuch der ganzen analytischen Geometrie (wie der Verfasser beabsichtigt) diese Coordinaten zu Grunde zu legen.

Schg.

Ch. Forestier. Note sur le nombre des équations d'une même courbe en coordonnées polaires par rapport au même axe. Mém. de Toul. (8) I. 250-254.

Für einen und denselben Kegelschnitt kann man in Bezug auf ein und dasselbe Axensystem zwei verschiedene Gleichungen aufstellen, etwa

$$\varrho=\frac{p}{1-e\cos\omega}\quad\text{und}\quad\varrho=\frac{-p}{1+e\cos\omega}.$$

Der Verfasser macht darauf aufmerksam, dass dies keine vereinzelte Erscheinung ist, dass es vielmehr als eine Ausnahme zu betrachten ist, wenn eine Curve nur eine Polargleichung in Bezug auf ein gegebenes Coordinatensystem hat, während sie im Allgemeinen eine grössere Anzahl haben muss.

Sind nämlich ϱ und ω die Polarcoordinaten eines Punktes, so sind auch $\varrho_1=\varrho$ und $\omega_1=2k\pi+\omega$ und ebenso $\varrho_1=-\varrho$, $\omega_1=(2k+1)\pi+\omega$ die Polarcoordinaten dieses Punktes (oder um beide Fälle zusammenzufassen $\varrho_1=(-1)^n\varrho$, $\omega_1=n\pi+\omega$). Es hat keine Schwierigkeit, die Consequenzen hieraus zu ziehen.

A.

R. Mehmke. Geometrie der Kreise in einer Ebene. Schlömilch Z. XXIV. 257-269.

In diesem Aufsatze werden eine Reihe von Sätzen, als Umriss einer Geometrie der Kreise in der Ebene zusammengestellt,

für die der Verfasser die Beweise vermittelst der Grassmann'schen Ausdehnungslehre — namentlich insbesondere des Abschnitts der Ausdehnungslehre von 1862, der es mit dem „innern Producte" zu thun hat — gefunden hat, aber hier nicht mittheilt. Die Begriffe: Netz von Kreisen (Bündel bei Reye), Polar- oder Orthogonalkreis eines Netzes, Büschel von Kreisen, Polarbüschel eines Büschels werden definirt, dann die Dualität erörtert. Wir erhalten weiter den Begriff der normalen Projection eines Kreises auf ein Netz oder einen Büschel; es ist dies derjenige Kreis des Netzes, bez. Büschels, der ihm mit dem Büschel, bez. Netze gemein ist, das durch den gegebenen Kreis und den Polarkreis, bez. Polarbüschel des gegebenen Netzes, bez. Büschels constituirt wird. Daran wird die Definition des Winkels zwischen Kreisen, Büscheln, Netzen geknüpft; so ist der Winkel zwischen einem Kreise und einem Netze derjenige zwischen jenem und seiner Normalprojection auf das Netz. Ein System von mit Gewichten behafteten Kreisen liefert im Allgemeinen einen Mittelkreis oder ist im speciellen Falle im Gleichgewicht.

Drei Kreise mit ihren Verbindungsbüscheln bilden einen Dreipass; dual dazu drei Netze und ihre Schnittbüschel ein Dreinetz. Vier Kreise, ihre Verbindungs-Büschel und -Netze liefern eine in sich duale Figur, den Vierpass. Beim Drei- und Vierpass ergeben sich zwei als Sinus und Polarsinus des Passes bezeichnete Winkelfunctionen, für welche verschiedene Ausdrücke in den Winkeln der Constituenten gegeben werden. Der Vierpass eignet sich als Coordinatensystem, insbesondere dann, wenn je zwei seiner Kreise „normal" (orthogonal) sind. Coordinaten eines beliebigen Kreises oder Netzes sind dann die Sinus, bez. Cosinus seiner Winkel mit den Fundamentalkreisen. Es folgen nun die Ausdrücke für die Winkel zweier Gebilde in den Coordinaten derselben, die sechs Coordinaten eines Büschels, die Gleichungen der drei Gebilde, ihrer Verbindungs- und Schnittgebilde, die Incidenzbedingungen. Den Schluss bildet ein Hinweis auf die Analogie der ebenen Kreisgeometrie hinsichtlich ihrer metrischen Eigenschaften mit der hyperbolischen Raumgeometrie,

während sie in Bezug auf die projectiven der Euklidischen analog ist.

Sm.

A. Enneper. Isometrische Coordinaten auf der Kugelfläche. Schlömilch Z. XXIV. 256.

Die Gleichung der Kugel $x^2+y^2+z^2=g^2$ wird durch die Werthe

$$x = g.\sin\operatorname{am}u\ \Delta\operatorname{am}v;$$
$$y = g.\Delta\operatorname{am}u\ \sin\operatorname{am}v,$$
$$z = g.\cos\operatorname{am}u\ \cos\operatorname{am}v$$

befriedigt. Sieht man u und v als Functionen von p und q an, so genügen sie beide der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{d^2w}{dp^2}+\frac{d^2w}{dq^2}=0.$$

Schg.

J. W. Warren. Exercises in curvilinear and normal coordinates. Trans. of Cambr. XII. 531-545.

Fortsetzung einer früheren Arbeit Trans. of Cambr. XII. 455-522 (siehe F. d. M. IX. 1877. 469-471). Der letzte Theil dieser Arbeit beschäftigt sich mit dem Uebergang von normalen Coordinaten zu orthogonalen krummlinigen Coordinaten.

Glr. (O.)

W. J. Stringham. The quaternion formulae for quantification of curves, surfaces and solids, and for barycentres. Am. J. II. 205-211.

Für eine Raumcurve mit der Gleichung $\varrho=\psi(t)$ ist der Bogen

$$s=\int T\varrho'\,dt,$$

wo ϱ' die Tangente an die Curve im Punkte ϱ bedeutet. Für eine Fläche $\varrho=\chi(t, u)$, ist das Flächenstück

$$S = \int TV\varrho_1'\varrho_2' dt du,$$

wo ϱ_1' und ϱ_2' zwei in ihrem gemeinsamen Berührungspunkte sich schneidende Tangenten an die Fläche sind. Aehnliche Ausdrücke ergeben sich bei der Cubatur der Körper und für die Schwerpunkte der vorher betrachteten Gebilde. Auch die speciellen Fälle der Ebene und des Umdrehungskörpers sind berücksichtigt. Den Schluss bilden Anwendungen auf das Ellipsoid. Schg.

J. Odstrčil. Kurze Anleitung zum Rechnen mit den (Hamilton'schen) Quaternionen. Halle. Nebert.

Ein elementar gehaltenes und in Folge der zahlreichen Anwendungen auf Geometrie, Trigonometrie, Stereometrie und Mechanik für den Anfänger besonders instructives Buch. Ausführliche Recension siehe in Hoffmann Z. XI., Schlömilch Z. XXIV. Hl. A. 197. Schg.

Capitel 2.

Analytische Geometrie der Ebene.

A. Allgemeine Theorie der ebenen Curven.

E. Beltrami. Ricerche di geometria analitica. Bologna. Gamberini e Parmeggiani. 4°. Mem. di Bol. (3) X. 233-312.

A. Clebsch. Leçons sur la géométrie recueillies et complétées par Ferdinand Lindemann. Traduites par Adolphe Bensiat. Tome I. Traité des sections coniques et introduction à la théorie des formes algébriques. Paris. Gauthier-Villars.

Uebersetzung des Werkes, über das F. d. M. VIII. 1876. S. 421 bis 426 referirt worden ist. O.

W. J. C. Sharp. Note on some cases of the intersection of curves and surfaces by straight lines. Messenger (2) IX. 49-50.

Discussion specieller Fälle der Gleichung, welche die Verhältnisse giebt, in denen die Linie, die zwei gegebene Punkte verbindet, durch eine ebene Curve oder eine Fläche $U = 0$ geschnitten wird.

Glr. (O.)

G. Bečka. Beitrag zur Theorie der Tangenten und Asymptoten ebener Curven. Časopis VIII. 59-74. (Böhmisch).

Std.

Mack. Untersuchung einer beliebigen Curve und eines ihr zugehörigen Krümmungskreises in Betreff des gegenseitigen Verhaltens an der Stelle der Osculation. Grunert Arch. LXIV. 182-189.

Eine ebene Curve wird von ihrem Krümmungskreise im Osculationspunkte geschnitten, wenn der Krümmungsradius kein Maximum oder Minimum ist; in diesem speciellen Falle nicht. Der Aufsatz führt die entscheidenden Bedingungen hierfür auf die Coordinaten, bezüglich auf Tangente und Normale im Osculationspunkte zurück.

H.

W. J. C. Sharp. On the successive evolutes of a curve. Messenger (2) IX. 95-99.

Ist ϱ der Krümmungsradius einer Curve und $\varrho_1, \varrho_2, \dots$ die ihrer successiven Evoluten, so ist:

$$\varrho = \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}, \quad \varrho_1 = \frac{\varrho}{q^2}\{3pq^2-(1+p^2)r\}, \ \varrho_2 \cdots$$

So kann eine Differentialgleichung ausgedrückt werden als Relation zwischen $\varrho, \varrho_1, \varrho_2 \dots$ Die Differentialgleichung der Parabel ist z. B.: $3\varrho\varrho_2 = 9\varrho^2+4\varrho_1^2$ und die der Kegelschnitte:

$$45\varrho\varrho_1\varrho_2 = 9\varrho^2\varrho_3+36\varrho^2\varrho_1+40\varrho_1^3.$$

Glr. (O.)

G. Fouret. Sur les faisceaux ponctuels plans de caractéristique ν, ayant un point principal multiple d'ordre ν. Bull. S. M. F. VII. 177-205.

Herrn Fouret haben seine Untersuchungen über Curvensysteme, die durch Differentialgleichungen erster Ordnung höheren Grades definirt sind, mit der von Clebsch inaugurirten Theorie der Connexe in enge Beziehung gebracht. Im Vorliegenden handelt es sich um den Connex (ν, 1), oder, in der Ausdrucksweise des Verfassers, um Curvenbüschel von der Charakteristik ν, welche durch die Differentialgleichung:

$$L\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)-M\frac{dy}{dx}+N=0$$

definirt sind, wobei L, M, N Polynome ν^{ten} Grades von x und y sind. Durch jeden Punkt der Ebene geht im Allgemeinen eine Curve des Büschels, jede Gerade wird von ν Curven berührt. Der Schnitt der beiden Curven:

$$Lx-M=0;\quad Ly-N=0$$

liefert $\nu^2+\nu+1$ im Endlichen gelegene Punkte, für welche die Tangentialrichtung der durchgehenden Curve unbestimmt ist. Diese Punkte sind im Allgemeinen Asymptotenpunkte (zu welchen übrigens zwei bestimmte ausgezeichnete Richtungen gehören), sie können aber auch Kreuzungspunkte unendlich vieler Curven des Systems sein. Durch Zusammenfallen mehrerer solcher „Hauptpunkte" entsteht ein vielfacher Hauptpunkt. Jede Gerade durch einen ν^2-fachen Hauptpunkt hat die Eigenschaft, dass die Tangenten der Curven des Systems, welche in ihren Schnittpunkten mit der Geraden construirt werden, in einem Punkt zusammentreffen. Die Polynome L, M, N werden in dem Falle, dass ein solcher ν^2-facher Hauptpunkt auftritt, homogene Functionen von x und y, und die Integration jener Differentialgleichung führt auf eine Quadratur.

Ein Problem der darstellenden Geometrie führt auf diesen Fall. Wenn man die Raumcurve, welche als Grenze des Eigenschattens auf der gewöhnlichen windschiefen Schraubenfläche bei centraler Beleuchtung auftritt, auf eine Ebene senkrecht zur Axe

projicirt, so erhält man eine Curve, die in Polarcoordinaten r, Θ die Gleichung hat:

$$r = \frac{a \sin\Theta}{\Theta - \omega},$$

wo die Constanten a, ω die Lage des leuchtenden Punktes bestimmen (während die Höhe des Schraubengangs nicht eingeht). Sieht man ω als den Parameter eines Curvenbüschels an, so besitzt dieses die Characteristik $\nu = 2$ und einen vierfachen Hauptpunkt in dem Fusspunkt der Axe. Bl.

J. P. Šebesta. Ueber fundamentale Eigenschaften ähnlicher Curven. Casopis VIII. 19-24. (Böhmisch).

Enthält eine kurzgefasste Ableitung der wichtigsten Eigenschaften nebst Ableitung einiger planimetrischer Sätze.

Std.

B. Theorie der algebraischen Curven.

J. Rosanes. Ueber linear-abhängige Punktsysteme. Borchardt J. LXXXVIII. 241-273.

Nennt man einen Punkt, der eine binäre, ternäre, quaternäre Form zu Null macht, einen Nullpunkt derselben, so ist ein linear abhängiges System von p Punkten ein solches, bei dem jede Form eines gewissen Grades, für die $p-1$ von den Punkten Nullpunkte sind, auch den letzten zum Nullpunkte hat. So induciren bei einer ternären Form n^{ten} Grades, wenn $N = \frac{1}{2}n(n+3)$ ist, $N-1$ Nullpunkte stets n^2-N+1 andere und veranlassen abhängige Systeme von N Nullpunkten.

Herr Rosanes dehnt dies auf zwei Variablensysteme aus. Zwei Punkte x, y, zwei Punktreihen angehörig, deren Coordinaten $x_1 x_2$, $y_1 y_2$ die bilineare Form

$$f(x, y) = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2$$

zu Null machen, heissen ein Nullpaar derselben. Vier Nullpaare x^1y^1, x^2y^2, x^3y^3, x^4y^4 derselben Form sind in Abhängigkeit; es lassen sich vier Grössen $k_1, \ldots, k_4$ finden, so dass

$$a)\qquad k_1 f(x^1, y^1) + k_2 f(x^2, y^2) + k_3 f(x^3, y^3) + k_4 f(x^4, y^4) = 0$$

ist für alle Werthe des a_{ik}, so dass jede Form, die durch drei von ihnen zu Null wird, es auch durch das vierte wird. Also kann man auch a_{ik} durch $u_i v_i$ ersetzen, so dass a) übergeht in:

$$b)\qquad k_1 u(x^1) v(y^1) + \cdots + k_4 u(x^4)\ v(y^4) = 0$$

für alle Werthe der u_i, v_k, wofern

$$u(x) = u_1 x_1 + u_2 x_2,\quad v(y) = v_1 y_1 + v_2 y_2.$$

Die vier Nullpaare bilden offenbar zwei projective Würfe.

Es seien bei ternären Formen x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3 zwei gleichartige Variablensysteme, Coordinaten der Punkte zweier Ebenen; u_1, u_2, u_3; v_1, v_2, v_3, die contragredienten Variablen, die Coordinaten der Geraden der Ebenen; so werden die bilinearen Formen

$$\left.\begin{aligned} f(xy) &= \Sigma a_{\varkappa\lambda}\, x_\varkappa y_\lambda, \\ \varphi(u, v) &= \Sigma \alpha_{\varkappa\lambda}\, u_\varkappa v_\lambda \end{aligned}\right\} (\varkappa, \lambda = 1,\ 2,\ 3)$$

betrachtet. Im Allgemeinen ist $a_{\varkappa\lambda}$ oder $\alpha_{\varkappa\lambda}$ nicht gleich $a_{\lambda k}$, bez. $\alpha_{\lambda\varkappa}$; ist dies der Fall, so heissen die Formen symmetrisch. Denkt man sich dann die Ebenen und Coordinatensysteme identisch, so sind die Nullpaare von f oder φ conjugirte Punkte, bez. Gerade in Bezug auf $f(x, x) = 0$, bez. $\varphi(u, u) = 0$. Zerfällt $f(x, y)$ in zwei lineare Formen:

$$f(x, y) = p(x) q(y) = (p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3)(q_1 y_1 + q_2 y_2 + q_3 y_3),$$

so haben wir eine specielle Form, deren Nullpaare sich auf zwei Gerade p, q vertheilen; ebenso bei $\varphi(u, v)$. Besteht zwischen den Coefficienten $a_{i\varkappa}$, $\alpha_{i\varkappa}$ die Beziehung $\Sigma a_{\varkappa\lambda}\, \alpha_{\varkappa\lambda} = 0$, so heissen f und φ conjugirt: Die speciellen Formen, welche einer Form conjugirt sind, sind deren Nullpaare.

Den sämmtlichen Formen, welche aus p Formen linear abgeleitet sind und eine p-gliedrige Gruppe bilden, sind die Formen einer $(9-p)$-gliedrigen Gruppe conjugirt. Der Verfasser hebt den Fall $p = 4$ hervor: Eine viergliedrige Gruppe hat sechs gemeinsame Nullpaare (die conjugirte fünfgliedrige hat also sechs specielle Formen), diese bilden ein linear abhängiges System

von sechs Punktepaaren, und zu fünf Paaren giebt es nur ein sechstes. Sie erfüllen die Identität:

$$c)\qquad \varkappa_1 u(x^1)v(y^1) + \cdots + \varkappa_6 u(x^6)v(y^6) = 0$$

für alle Werthe der u_i, v_i.

Betrachtet man nun nur solche u_i, v_i, für die

$$d)\qquad \begin{cases} u(x^5) = u_1 x_1^5 + u_2 x_2^5 + u_3 x_3^5 = 0, \\ v(y^6) = v_1 y_1^6 + v_2 y_2^6 + v_3 y_3^6 = 0, \end{cases}$$

d. h. nur Gerade u, v durch x^5, y^6, und bezeichnet die aus $u(x^i)$, $v(y^i)$ durch Elimination von u_3, v_3 vermöge $d)$ sich ergebenden Grössen mit $\overline{u(x^i)}$, $\overline{v(y^i)}$, so hat man aus $c)$:

$$e)\qquad k_1 \overline{u(x^1)}\,\overline{v(y^1)} + \cdots + k_4 \overline{u(x^4)}\,\overline{v(y^4)} = 0,$$

d. h. die Strahlen, welche x^1, x^2, x^3, x^4 aus x^5 und y^1, y^2, y^3, y^4 aus y^6 projiciren, bilden ein linear abhängiges System von vier Strahlenpaaren oder zwei projective Würfe. Ebenso ergiebt sich

$$x^4(x^1x^2x^3x^5)\,\overline{\wedge}\,y^6(y^1y^2y^3y^5).$$

Also ist das sechste Paar x^6y^6 grade dasjenige, das der Referent Clebsch Ann. I. p. 533. No. 6, (F. d. M. II. p. 428) als das Paar der Punkte $b_0\beta_0$ gefunden hat, die mit zwei Gruppen von Punkten

$$b_1, \ldots, b_5, \beta_1, \ldots, \beta_5$$

so verbunden sind, dass, wenn p, π irgend welche Punkte der Kegelschnitte $(b_1 \ldots b_5)$, bez. $(\beta_1 \ldots \beta_5)$ sind,

$$b_0(b_1b_2b_3b_4b_5)\,\overline{\wedge}\,\pi(\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4\beta_5)$$

und

$$\beta_0(\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4\beta_5)\,\overline{\wedge}\,p(b_1b_2b_3b_4b_5).$$

Jede bilineare Form, welche durch fünf der sechs Paare annullirt wird, wird es auch durch das sechste; also (wenn die Ebenen identisch sind) giebt dies auf eine symmetrische Form angewandt, dass die sechs Punktepaare in Bezug auf denselben Kegelschnitt conjugirt sind. Bei Beschränkung auf symmetrische Formen findet sich, dass ein abhängiges System von drei Punktepaaren stets aus den Gegenecken eines vollständigen Vierseits besteht (Hesse'scher Satz), ein abhängiges System von neun Punktepaaren — also beschaffen, dass für jeden Kegelschnitt, für den drei Paare conjugirt sind, es auch das vierte ist — hat

die Eigenschaft, dass drei Paare aus jedem der beiden Punkte des vierten durch eine Involution projicirt werden, und die Punkte des vierten Paares also durch die conjugirten Punkte der Hesse'schen Curve des Netzes von Kegelschnitten gebildet werden, für welche die drei ersten Paare conjugirt sind.

Im quaternären Gebiete wird für allgemeine bilineare Formen nur ein bemerkenswerthes abhängiges System hervorgehoben. Sind sechs Punktepaare $x^1y^1, \ldots, x^6y^6$ gegeben, und kennt man zwei Punkte x^7, y^8, aus denen jene durch ein abhängiges System projicirt werden, so giebt es stets zwei Punkte $x^8\ y^7$, so dass $x^1y^1, \ldots, x^8y^8$ ein abhängiges System bilden, d. h. es ist

$$k_1u(x^1).v(y^1)+\cdots+k_8u(x^8).v(y^8)=0.$$

Jede sechs Paare desselben werden aus dem x des siebenten und dem y des achten durch ein abhängiges System projicirt. Jede Fläche zweiter Ordnung, für welche sieben Paare conjugirt sind, hat auch die Punkte des achten zu conjugirten. Dass die zu sechs Paaren gehörigen x^7, y^8 (und x^8, y^7) Flächen zweiten Grades erzeugen, beweist Reye in einer Fortsetzung des Aufsatzes Borchardt J. XC. p. 303. Der Fall der acht Schnittpunkte von drei F^2 ist hiervon ein Specialfall.

Beschränkt man sich wiederum auf symmetrische Formen und demnach auf Paare von conjugirten Punkten einer F^2, so hat man folgende Sätze:

Drei abhängige Paare bilden stets die Ecken eines vollständigen ebenen Vierseits. Zu drei Paaren giebt es im Allgemeinen nicht ein viertes, so dass ein abhängiges System entsteht; wenn aber jene aus einem Punkte x^4 in die Ecken eines vollständigen Vierseits projicirt werden, dann giebt es noch einen y^4, für den dasselbe gilt, und man hat ein abhängiges System. In den Ecken zweier derselben F^2 aufgeschriebenen geradlinigen Vierecke hat man ein solches System.

Vier beliebige Paare kann man auf sechs Weisen durch ein fünftes zu einem abhängigen Systeme vervollständigen. Die zwanzig Punkte, die man so erhält, sind so beschaffen, dass neun Paare aus einem Punkte des zehnten in neun Paare conjugirter Punkte einer Curve dritter Ordnung projicirt werden.

Im letzten Paragraphen werden noch kurz trilineare (ternäre) Systeme mit ihren Nulltripeln behandelt und ein abhängiges System von sechs Tripeln betrachtet, wobei sich auch die neunte gemeinsame Tangente zweier Curven dritter Classe ergiebt.

Sm.

Ed. Weyr. Ueber rationale Curven in der Ebene. Casopis VIII. 193-236. (Böhmisch).

Enthält Grundzüge der von Chasles, Cayley und Clebsch geschaffenen Theorie der unicursalen ebenen Curven. Die nach Lüroth (Clebsch Ann. IX. 163, s. F. d. M. VII. 1875. p. 417) gegebene Einführung eines eindeutigen Parameters wird durch Beispiele erläutert und der lineare Zusammenhang je zweier solcher Parameter hervorgehoben. Hierauf wird der Grad und die Classe der unicursalen Curve bestimmt, die Entstehung und Anzahl der vielfachen Punkte einer solchen Linie betrachtet und aus der zugehörigen Zahl der Doppelpunkte auf den Charakter der Curve durch wirkliche Einführung des eindeutigen Parameters geschlossen. Nachdem der Einfluss der vielfachen Punkte im Allgemeinen erörtert worden, leitet der Verfasser Relationen ab, welchen die Parameter jener Punkte genügen, in denen die unicursale Curve, mag sie eigentliche Doppelpunkte oder auch Rückkehrpunkte aufweisen, von einer algebraischen Curve geschnitten wird. Als Beispiel wird ein von Clebsch (Borchardt J. LXIV. 61) gelöstes Berührungsproblem angeführt und zum Schluss die von Clebsch gegebene Verwerthung der Theorie der unicursalen Curven zur Reduction gewisser algebraischer Differentiale hervorgehoben. Mit einem Hinweis auf Hermite's „Cours d'Analyse" I. pag. 240 schliesst die inhaltreiche Abhandlung.

Std.

M. Nöther. Ueber die Schnittpunktsysteme einer algebraischen Curve mit nicht-adjungirten Curven. Clebsch Ann. XV. 507-528.

Diese Abhandlung steht in enger Beziehung zu einem früheren

(Clebsch Ann. VI.) von dem Verfasser in Gemeinschaft mit dem Referenten publicirten Aufsatz, aus dem Einiges hier vorausgeschickt werden möge. Es handelt sich um Sätze über Schnittpunktgruppen auf einer algebraischen Curve. Diese Gruppen werden von „linearen“ Curvenschaaren ausgeschnitten, d. h. von solchen, deren Gleichung die Form hat:

$$\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \cdots + \lambda_{r+1}\varphi_{r+1} = 0,$$

wo $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, ... Gleichungen von festen Curven sind, die Grössen λ variable Parameter, mit welchen die Schnittpunktgruppe ihre Lage ändert. Jede Gruppe G_R^r hat zum unteren Index die Anzahl R ihrer Punkte, zum oberen die Mannigfaltigkeit (∞^r) des Systems, dem sie angehört, also der Curvenschaar, die sie ausschneidet. So werden auf einer C_4 von einem Büschel von C_3, welches acht Punkte der C_4 zu Basispunkten hat, Gruppen G_4^1 ausgeschnitten.

Die Grundlage für die Betrachtung von Punktgruppen ist nun der „Restsatz“, wonach auf einer gegebenen Curve irgend eine Schaar von Gruppen G_R^r auf mannigfache Art durch Curvenschaaren ausgeschnitten werden kann. Man erhält alle Curvenschaaren, welche dies leisten, wenn man alle möglichen Curven durch irgend eine der Gruppen G_R^r hindurch legt, und deren übrige Schnittpunkte mit der gegebenen Curve zu Basispunkten je einer Curvenschaar von derselben Ordnung macht. So lässt sich in dem obigen Beispiel durch irgend eine Gruppe G_4^1 etwa ein Kegelschnitt K legen, dessen vier übrige Schnittpunkte mit der C_4 zu Basispunkten eines Kegelschnittbüschels genommen werden können. Dieses letztere schneidet alsdann genau dieselben G_4^1 aus, wie jenes Büschel von C_3, wie man auch den Kegelschnitt K gewählt haben mag. Die Gruppen Γ_4^1, welche alle möglichen Kegelschnitte K ausschneiden, die durch G_4^1 gehen, bilden eine Schaar, von der jede einzelne Gruppe mit jeder G_4^1 ein vollständiges Schnittpunktsystem bilden; die Gruppen G_4^1 werden zu einander „corresidual“ genannt, ebenso die Γ_4^1 unter sich, jede G_4^1 mit jeder Γ_4^1 „residual“.

Der Restsatz gilt auch noch, wenn die Grundcurve vielfache Punkte hat; nur müssen die zum Ausschneiden der Gruppen be-

nutzten Curven φ alle die Eigenschaft haben, sich in jedem solchen Punkt „adjungirt“ zu verhalten, d. h. in jedem k-fachen Punkt einen $(k-1)$-fachen Punkt zu besitzen. Dies vorausgesetzt, so nennt man allgemein eine Schaar von Gruppen G_R^r zu einer anderen G_Q^q „residual“, wenn sich durch jede G_R^r und jede G_Q^q eine adjungirte Curve legen lässt, welche ausser in jenen beiden Gruppen und den vielfachen Punkten die gegebene Curve nicht schneidet.

Der Verfasser stellt sich nun die Aufgabe, die Modification zu bestimmen, die der Restsatz erfährt, wenn eine Curvenschaar, welche die G_R^r ausschneidet, sich nicht adjungirt verhält. Er findet, dass dann jede andere Curvenschaar, welche dieselben Gruppen ausschneidet, je mit den entsprechenden Curven der ersten Schaar Berührungen höherer Ordnung längs ihrer in den vielfachen Punkten von f noch etwa vorhandenen Zweige eingehen (sich „gleichsingulär“ verhalten) muss, was übrigens immer dadurch erreicht werden kann, dass man nur der einen zur Herstellung der neuen Basispunkte benutzten Curve der Schaar diese Bedingung auferlegt. Die Umkehrung dieses Satzes nennt der Verfasser den zweiten Restsatz.

Wenn eine Curve φ in den vielfachen Punkten der Grundcurve f, die vom Grad n und vom Geschlecht p sein mag, sich adjungirt verhält, so sind bekanntlich im Allgemeinen (und zwar höchstens) $p-1$, resp. p Punkte durch die übrigen bestimmt, je nachdem φ von der $(n-3)^{\text{ten}}$ oder höheren Ordnung ist. Wenn nun φ sich nicht adjungirt verhält, sondern in einem k-fachen Punkt von f etwa bloss einen σ-fachen $(\sigma < k-1)$ Punkt besitzt, so treten an Stelle von p, resp. $p-1$ je zwei andere Zahlen π, resp. $\pi-1$ und π', resp. $\pi'-1$:

$$\pi = p + \tfrac{1}{2}\Sigma(k-\sigma)(k-\sigma-1),$$
$$\pi' = p + \tfrac{1}{2}\Sigma k(k-1) - \tfrac{1}{2}\Sigma\sigma(\sigma-1)$$

(Σ ein Summenzeichen), je nachdem die Curven sonst völlig willkürlich sind, oder in dem vielfachen Punkt von f noch jenes Verhalten zeigen, das der Verfasser „gleichsingulär“ nennt, wo dann in jedem k-fachen Punkt von f alle Curven der Schaar nicht nur einen σ-fachen Punkt haben, sondern auch längs jedes der

σ Zweige sich so berühren, dass sie noch $k-\sigma-1$ Punkte gemeinsam haben.

In jenem Aufsatz im sechsten Band der Annalen ist auf die hervorragende Rolle hingewiesen worden, welche die Schaar der adjungirten Curven der $(n-3)^{\text{ten}}$ Ordnung spielen. Gewisse Punktgruppen G_Q^q auf f zeichnen sich dadurch aus, dass sie sich durch solche Curven φ ausschneiden lassen. Es sind dies diejenigen Gruppen G_Q^q, für welche die Zahl q (Mannigfaltigkeit der Schaar) gegenüber der Zahl Q ihrer Punkte möglichst gross, oder doch $q \geqq Q-p+1$ ist. Eine Schaar von solchen „Specialgruppen" ist z. B. die ∞^1 Schaar von je drei Punkten, welche von den Geraden durch einen Doppelpunkt einer C_5 mit zwei Doppelpunkten $(p=4)$ ausgeschnitten werden; ferner eine gewisse ∞^1 Schaar von Gruppen von je vier Punkten auf einer C_7 mit neun Doppelpunkten $(p=6)$ u. s. w. Auf solche Gruppen bezieht sich der merkwürdige „Riemann-Roch'sche Satz", wonach zu jedem System von Specialgruppen ein anderes gehört, das ihm (im Sinne des Restsatzes) residual ist. So sind auf der oben erwähnten C_5 mit zwei Doppelpunkten die den beiden Doppelpunkten entsprechenden Gruppen je zu einander residual; auf jener C_7 mit neun Doppelpunkten gehören zu den Specialgruppen G_4^1 ebensolche G_6^2, welche mit ihnen je auf einer adjungirten C_{n-3} liegen. Allgemein ist die Abhängigkeit der Zahlen Q, R, q, r der beiden nach jenem Satz residualen Punktgruppen G_R^r, G_Q^q durch die Gleichungen gegeben:

$$Q+R=2p-2,$$
$$Q-R=2(q-r).$$

Auch diesen Satz dehnt Herr Nöther aus auf den Fall, dass die ausschneidenden Curven nicht adjungirt sind, und findet, dass an Stelle obiger Gleichungen die folgenden treten:

$$Q+R=\pi+\pi'-2$$
$$Q-R=2(q-r)+\pi-\pi',$$

wo π und π' die früher definirten Zahlen sind.

Schliesslich bestimmt der Verfasser noch die Modificationen, welche in der algebraischen Formulirung des Problems der Specialgruppen auftreten, wenn die ausschneidenden Curven nicht adjungirt sind. Bl.

H. Krey.*) Ueber einen Satz aus der Theorie der algebraischen Curven. Schlömilch Z. XXII. 1877. 395-400.

Durch die $m.n$ Schnittpunkte einer Curve m^{ter} Ordnung $\varphi = 0$ und einer Curve n^{ter} Ordnung $\psi = 0$ $(n \leqq m)$ gehen stets Curven höherer Ordnung $\mu (\mu \geqq m)$; denn alle in der Form $A\varphi + B\psi = 0$ darstellbaren Curven erfüllen die Forderung, welchen Werth auch die Constanten in den Ausdrücken A von der $(\mu - m)^{ten}$ und B von der $(\mu - n)^{ten}$ Ordnung haben mögen. Es erhebt sich aber die Frage, ob alle Curven μ^{ter} Ordnung, welche durch jene $m.n$ Schnittpunkte gehen, in jener Form enthalten sind, oder ob es auch Curven μ^{ter} Ordnung giebt, welche die gestellte Bedingung erfüllen, aber nicht durch obige Gleichungsform dargestellt werden können. Herr Nöther hat diese Frage unter Angabe der Gültigkeitsbedingungen zuerst erledigt (Clebsch Ann. VI., siehe F. d. M. V. 1873. p. 348). Herr Krey gelangt zu ihrer Lösung in der vorliegenden Mittheilung auf einem anderen Wege.

Sehn.

J. Bacharach. Ueber Schnittpunktsysteme algebraischer Curven. Erl. Ber. 1879.

Auszug aus einer grösseren Arbeit, welche von den Ausnahmen handeln wird, die der Satz von Cayley über Schnittpunktsysteme erleidet, und von einer Ausdehnung desselben auf den Fall von Curven, deren Schnittpunkte vielfache Punkte einer von ihnen sind. U. a. findet der Verfasser, dass der Satz, wonach eine Curve C_m, die durch $pq - \delta$ Schnittpunkte

$$[\delta = \tfrac{1}{2}(p+q-n-1)(p+q-n-2)]$$

einer C_p und einer C_q geht $(p + q > n \geqq p \geqq q)$, auch die δ übrigen Schnittpunkte derselben enthalten müsse, nur im All-

*) Die vorstehende Arbeit ist durch einen von der Redaction nicht verschuldeten Zufall im Jahrgang 1877 nicht berücksichtigt worden. Das Referat wird daher nachgeholt. O

gemeinen richtig ist und seine Giltigkeit verliert, wenn diese δ Punkte auf einer Curve von der Ordnung $p+q-n-3$ liegen.

Bl.

C. F. E. Björling. Ueber entsprechende Singularitäten in algebraischen ebenen Curven. Ups. Afh. 1879.

Unter einem (n, m) Punkt einer Curve $(n>m)$ versteht der Verfasser einen singulären Punkt, für welchen die Potenzentwickelung der Coordinaten die Form hat:

$$y = Nx^{\frac{n}{m}} + N_1 x^{\frac{n+1}{m}} + \cdots$$

Man kann diese Gleichung durch die zwei anderen ersetzen:

$$x = \alpha^m; \quad y = N\alpha^n + N_1\alpha^{n+1} + \cdots,$$

und somit die Curve in der Nähe des singulären Punktes mit einer unicursalen vertauschen, für welche die Parameterdarstellung der Coordinaten in den ersten Gliedern mit dieser übereinstimmt.

Im Anschluss an diese Auffassung behandelt der Verfasser die Fragen: Welche Singularität entspricht einem (n, m) Punkt der Originalcurve 1) in der Evolute der Curve, 2) in einer Parallelcurve zu derselben, 3) in einer Curve, die aus ihr durch quadratische Transformation hervorgegangen ist. Der Einfachheit wegen werden die Coefficienten $N, N_1, \ldots$ von Null verschieden angenommen. Das Verhalten der Evolute ergiebt sich aus den Ausdrücken für die (homogenen) Liniencoordinaten:

$$u:v:w = \frac{dx}{d\alpha} : \frac{dy}{d\alpha} : -\left(x\frac{dx}{d\alpha} + y\frac{dy}{d\alpha}\right),$$

indem man bemerkt, dass ein (n, m) Punkt zu einem $(n, n-m)$ Punkt dualistisch reciprok ist. Dabei sind jedoch vier Fälle zu unterscheiden, je nachdem der gegebene singuläre Punkt im Endlichen oder unendlich weit gelegen ist, und eine Tangente durch einen der Kreispunkte im Unendlichen geht oder nicht. Zu weiteren Unterscheidungen geben die Zahlen n, m Veranlassung, je nachdem $n \gtreqless 2m$ ist, u. s. w. Für alle diese Fälle wird das

Verhalten des Evolutenpunktes untersucht und seine Gestalt und Lage gegen den singulären Punkt der ersten Curve durch Zeichnungen veranschaulicht. Der Einfluss des letzteren auf Grad und Classe der Evolute lässt sich durch allgemeine Formeln nicht darstellen; für Curven von der 3^{ten}, 4^{ten}, 5^{ten}, 6^{ten} Ordnung kann die Ordnung der Evolute bis 4 sinken. Für die Liniencoordinaten der Parallelcurve im Abstande k hat man:

$$u':v':w' = u:v:w \pm k\sqrt{u^2+v^2},$$

wo u, v, w die Liniencoordinaten der gegebenen Curve sind. Vermöge dieser Formeln bestimmen sich die Charactere des einem (n, m) Punkt entsprechenden singulären Punktes ähnlich wie oben, wobei die nämlichen Fälle zu unterscheiden sind. Die im Falle der quadratischen Transformation vorzunehmenden Unterscheidungen beziehen sich auf die Lage des Punktes gegen die Seiten und Ecken des Transformationsdreiecks.

Manche Bemerkungen des Verfassers findet man in den theilweise gleichzeitig erschienenen Arbeiten über Singularitäten von Nöther, Halphén und dem Referenten weiter ausgeführt.

Bl.

K. Zahradnik. Ueber die Krümmungscurve des Basispunktes eines Curvenbüschels n^{ter} Ordnung. Prag. Ber. 1878. 250-253.

Der Ort der Krümmungsmittelpunkte eines Basispunktes O in Bezug auf die Curven eines Büschels n^{ter} Ordnung ist eine unicursale Curve C_3 3^{ter} Ordnung mit O als Doppelpunkt. Wählt man O zum Coordinatenanfangspunkt, so lässt sich hier das Büschel n^{ter} Ordnung durch dasjenige Kegelschnittbüschel B_2 ersetzen, das man erhält, wenn man nur die Glieder erster und zweiter Dimension beibehält. Die Asymptotenrichtungen der C_3 sind dann die Senkrechten auf der Verbindungslinie von O mit den drei übrigen Basispunkten von B_2 und werden durch eine cubische Gleichung bestimmt, deren Wurzeln lineare Functionen der Wurzeln der Discriminante von B_2 sind. T.

F. Casorati. Nuova e migliore forma delle equazioni degli asintoti di una linea piana algebrica. Rend. Ist. Lomb. (2) XII. 117-122.

Um die Gleichungen der Asymptoten einer algebraischen Curve in einer bezüglich der Coordinaten symmetrischen Form zu erhalten, geht der Verfasser von der Parameterdarstellung $x = x_0 + \lambda t$, $y = y_0 + \mu t$ einer Geraden aus (cfr. die Darstellung bei Salmon-Fiedler, „Höhere ebene Curven“ S. 45 ff.). Dann ergeben sich aus der Gleichung n^{ten} Grades in t für die Schnittpunkte dieser Geraden mit der Curve n^{ter} Ordnung $u(x, y) = 0$ ohne Weiteres die Gleichungen der Asymptoten in der Form

$$(1) \qquad x \frac{\partial u_n}{\partial \lambda} + y \frac{\partial u_n}{\partial \mu} + u_{n-1} = 0,$$

wo λ, μ die Wurzeln der Gleichung

$$(2) \qquad u_n(\lambda, \mu) = 0$$

sind, und u_n und u_{n-1} die Glieder n^{ter}, resp. $(n-1)^{\text{ter}}$ Dimension von $u(\lambda, \mu)$ bedeuten. Gleichzeitig stellt die Gleichung (1), ohne Rücksicht auf (2) denjenigen Durchmesser (cfr. Salmon-Fiedler l. c. p. 133) dar, der zu den Sehnen mit der Richtungstangente $\mu : \lambda$ conjugirt ist; auf diese Coincidenz hat nach der Angabe des Verfassers schon Mainardi (1839) in seinen „Lezioni di introd. al calc. sublime“ (II. p. 121) aufmerksam gemacht, während Salmon die Gleichung (1) nur für den Durchmesser giebt, aber nicht bemerkt, dass dieselbe auch für die Asymptoten gilt. In Rücksicht hierauf können die Asymptoten als gewisse Grenzfälle von Durchmessern betrachtet werden.

Zum Schlusse werden noch gewisse singuläre Fälle discutirt. T.

J. Hahn. Untersuchung der Kegelschnittnetze, deren Jacobi'sche Form oder Hermite'sche Form identisch verschwindet. Clebsch Ann. XV. 111-122.

In Clebsch-Lindemann's Geometrie (S. 304) wird ein Beweis dafür gegeben, dass das Verschwinden der Jacobi'schen Form eines Kegelschnittnetzes, dessen Ausartung in ein Büschel nach sich

zieht; dass derselbe nicht ausreichend ist, ward in dem Anhang zu dem genannten Werke selbst schon bemerkt. Für diese Ausartung ist vielmehr, wie Herr Hahn findet, nothwendig und hinreichend, dass gleichzeitig mit der Jacobi'schen auch die Hermite'sche Form des Netzes verschwinde. Verschwindet nur die Jacobi'sche Form, so zerfallen sämmtliche Kegelschnitte des Netzes und haben den Doppelpunkt gemeinsam; gleichzeitig wird die Hermite'sche Form ein voller Cubus, dessen Verschwinden jenen Doppelpunkt liefert. Verschwindet dagegen die Hermite'sche Form allein, so zerfallen ebenfalls sämmtliche Kegelschnitte des Netzes, haben aber dieselbe Gerade gemein, welche durch die in diesem Falle in einen vollen Cubus degenerirende Jacobi'sche Form repräsentirt wird.

Den Ausgangspunkt der Untersuchung bildet eine Darstellung einer gewissen homogenen quadratischen Function der das Netz bildenden drei Formen durch die Coefficienten der Jacobi'schen und Hermite'schen Form, die gleichzeitig als eine Verallgemeinerung der bekannten quadratischen Relation zwischen drei binären quadratischen Formen (Clebsch, Binäre Formen p. 205) zu betrachten ist; diese Function verschwindet, sobald die Jacobi'sche Form verschwindet. Ferner wird die von Herrn Rosanes (Clebsch Ann. VI. p. 264, siehe F. d. M. V. 1873. p. 358) gegebene Darstellung eines Netzes durch die Coefficienten der Hermite'schen und Jacobi'schen Form benutzt.

Schliesslich erörtert der Verfasser die Frage nach denjenigen Curven 3^ter Ordnung, deren Polarnetz mit den betrachteten Netzen identisch ist; denn die letzteren bilden insofern Ausnahmefälle, als hier nicht, wie im Allgemeinen, die ersten Polaren einer einzigen Curve 3^ter Ordnung alle Kegelschnitte des Netzes liefern.

T.

G. H. Halphen. Recherches sur les courbes planes du troisième degré. Clebsch Ann. XV. 359-379.

Es handelt sich um die Interpretation der Dreitheilung der elliptischen Functionen auf einer Curve dritter Ordnung, deren Punkte man bekanntlich einzeln den Werthen eines elliptischen

Integrals zuordnen kann. Versteht man unter x_m einen Punkt der Curve, in welchem dieselbe $3m$ consecutive Punkte mit einer Curve m^{ter} Ordnung gemeinsam hat, so besitzen vermöge der Deutung, welche Clebsch dem Abel'schen Theorem auf einer Curve gegeben hat, die Punkte x_1, also die Wendepunkte, die Punkte x_2, die „points sextactiques" eines Kegelschnitts, die Punkte x_3, für welche die gegebene Curve neun consecutive Punkte mit einer anderen Curve 3^{ter} Ordnung gemeinsam hat, u. s. w. zu Argumenten Drittel, Sechstel, Neuntel, u. s. w. von Periodensummen. Der Verfasser betrachtet nun die geometrischen Oerter der Punkte x_1, x_2, $x_3 \dots x_m$ für das Büschel derjenigen Curven 3^{ter} Ordnung, welche dieselben neun Punkte zu Wendepunkten haben, und stellt sich die Aufgabe, eine Recursionsformel zur Berechnung derjenigen Covarianten („Combinanten" des Büschels) zu bilden, welche in diesen Punkten verschwinden.

Die „points sextactiques" liegen bekanntlich auf neun Geraden; die „Coincidenzpunkte", wie der Verfasser die Punkte x_3 nennt, auf acht äquianharmonischen Curven 3^{ter} Ordnung, deren jede ein Wendepunktsdreieck des gegebenen Büschels zum Wendepunktsdreieck hat und den drei anderen umschrieben ist; der Ort der Punkte x_4 zerfällt in neun Curven 4^{ter} Ordnung, u. s. w., und allgemein richtet sich die Art des Zerfallens des Orts von x_m nach dem Verhalten der Zahl m gegenüber der Zahl 3.

Wendet man auf einen Punkt der Curve:

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3+6ax_1x_2x_3=0,$$

wo a der Parameter des Büschels ist, successive die beiden Transformationen an (Θ sei eine dritte Wurzel der Einheit):

$$\begin{aligned}
\lambda x_1^3 &= t_3^{\frac{1}{3}}+\Theta^2 t_2^{\frac{1}{3}}+\Theta\, t_1^{\frac{1}{3}},\\
\lambda x_2^3 &= t_3^{\frac{1}{3}}+\Theta\, t_2^{\frac{1}{3}}+\Theta^2 t_1^{\frac{1}{3}};\\
\lambda x_3^3 &= t_3^{\frac{1}{3}}+\quad t_2^{\frac{1}{3}}+\quad t_1^{\frac{1}{3}};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
8\mu a^3\, t_1 &= 2ay_3-\Theta\, y_2-\Theta^2 y_1,\\
8\mu a^3\, t_2 &= 2ay_3-\Theta^2 y_2-\Theta\, y_1,\\
\mu(1+8a^3)t_3 &= 2ay_3-\quad y_2-\quad y_1,
\end{aligned}$$

so geht der Punkt x in einen Punkt y derselben Curve über. Umgekehrt entsprechen jedem y neun Punkte x der Curve. Der

Verfasser zeigt nun, dass dieses Entsprechen den Uebergang von einem Punkt mit dem Argumente u zu einem mit dem Argument $3u$ vermittelt, und führt die Bildung der erwähnten Covarianten auf die Anwendung von Recursionsformeln zurück, die sich auf jene Transformationsausdrücke gründen, und in welche drei Combinanten des Curvenbüschels eingehen. Bl.

W. C. Sharp. On cubic curves. Quart. J. XVI. 186-192, 298-306.

Die Arbeit enthält eine Untersuchung über die Curven 3ter Ordnung mit den Hülfsmitteln der höheren Algebra und eine Classification derselben. Unter einer grossen Zahl bekannter Resultate finden sich auch einige neue. A.

C. Gerade Linie und Kegelschnitte.

W. F. Schüler. Lehrbuch der analytischen Geometrie des Punktes, der Geraden und der Kegelschnitte, dann der Strahlbüschel und Punktreihen (projectivische Geometrie) mit Uebungsaufgaben. München. Ackermann.

Nach dem Inhalte zu urtheilen behandelt das Lehrbuch die Analysis der neueren synthetischen Geometrie; es entwickelt die analytisch-geometrische Theorie nach den Seiten hin, wo sie zur Begründung der synthetischen Principien dient. Die Coordinaten sind die rechtwinkligen mit Berücksichtigung der Erweiterung auf schiefwinklige. Es werden nach einander behandelt der Punkt, die Kegelschnitte, Ellipse, Hyperbel, Parabel, die allgemeine Gleichung zweiten Grades, das Strahlenbüschel, zwei Strahlbüschel; und zwar werden die Kegelschnitte anfänglich geometrisch (wiewohl ohne Beziehung zum Kegel) definirt, ihre Eigenschaften aber durch Rechnung hergeleitet. Auf jeden Abschnitt folgen Uebungsaufgaben. H.

R. RÖNTGEN. Die Anfangsgründe der analytischen Geometrie. Jena. Costenoble.

Das Buch ist für Schulen bestimmt. Eine die Mängel desselben hervorhebende Besprechung von Cantor findet sich in Schlömilch Z. XXIV. Hl. A. 145-146. O.

DORNHEIM. Leitfaden der analytischen Geometrie für die erste Klasse der Realschulen. Pr. Minden.

Die kleine Schrift lehrt auf zweiunddreissig Seiten die elementare Anwendung rechtwinkliger ebener Coordinaten an dem Punkte, der Geraden, dem Kreise und den Kegelschnitten, mit kurzer Andeutung der Tangentenbestimmung für Curven höheren Grades. H.

A. WRETSCHKO. Bemerkungen zur Behandlung der analytischen Geometrie der Ebene an Obergymnasien. Pr. Brünn.

Der Verfasser entscheidet sich in der Frage, ob die analytische Geometrie der Ebene, worunter hier nur die Coordinatenlehre in synthetischer Entwickelung verstanden wird, sich als Unterrichtsgegenstand in den obern Classen der Gymnasien empfehle, dafür, dass an Misserfolgen, die man dagegen angeführt habe, nur Mängel der Lehrbücher schuld seien, und zeigt seinen eigenen Lehrgang, umfassend die Bestimmung des Punktes, der Geraden, des Kreises und der Kegelschnitte. Gerügt wird namentlich, dass man die Bedeutung einer Gleichung nicht erkläre. Dass dagegen der Verfasser zur Begriffserläuterung allgemeine Functionen vorübergehend anwendet, lässt sich nicht rechtfertigen; hier würde viel unerklärt bleiben. Vielleicht soll es bloss den Leser verständigen und ist nicht für den Schüler bestimmt. H.

V. de Rossi-Re. Intorno alla costruzione per punti delle sezioni coniche a mezzo della planaltimetria. Acc. P. N. L. XXIX. 1876. 240-245.

M. Azzarelli. Metodo generale per costruire per punti le linee del second' ordine. Acc. P. N. L. XXX. 1877. 64-68.

In der ersten Abhandlung ist eine einfache Construction der Kegelschnittlinien durch Punkte mitgetheilt. Eine Schaar von concentrischen und äquidistanten Kreisen wird durch eine Schaar von parallelen und äquidistanten Geraden geschnitten. Ein Kreis wird von einer der Geraden berührt; dann liegen die Schnittpunkte jedes darauffolgenden Kreises mit der entsprechenden folgenden Geraden auf einer Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem die Distanz zwischen je zwei Geraden grösser, gleich oder kleiner ist, als die Distanz zwischen zwei auf einanderfolgenden Kreisen. In der zweiten Abhandlung wird die Richtigkeit dieser Construction auf analytischem Wege nachgewiesen.

Schl.

E. Souvander. Études nouvelles des lignes et surfaces du second degré. Diss. Helsingfors.

Die bekannten Kriterien für die verschiedenen Arten von Curven und Flächen zweiten Grades werden als zufällige Resultate einer wenig eleganten Rechnung hergeleitet.

M. L.

R. Pendlebury. On directrices of conics represented by the homogeneous equation. Messenger (2) IX. 50-51.

Der Verfasser bezieht sich auf eine Arbeit von Eurenius im Quart. J. XIII. 198, welche eine Besprechung der Brennpunkte und Directricen eines Kegelschnitts enthält, dessen Gleichung in homogenen Coordinaten gegeben ist. Er giebt eine directere Methode zur Bestimmung der Directricen.

Glr. (O.)

G. Dostor. Nouvelle détermination analytique des foyers et directrices dans les sections coniques représentées par leurs équations générales; précédées des expressions générales des divers éléments que l'on distingue dans les courbes du second degré; et suivie de la détermination des coniques à centre par leur centre et les extrémités de deux demi-diamètres conjugués. Grunert Arch. LXIII. 113-205, auch separat Leipzig. Koch, Paris. Gauthier-Villars.

In diesem Titel ist der Inhalt der Arbeit vollständig angegeben. Es sei nur noch hinzugefügt, dass die Darstellung ziemlich ausführlich und sehr leicht fasslich ist, dass zum öfteren numerische Beispiele eingeflochten sind, und dass neben den rechtwinkligen Parallel-Coordinaten auch die schiefwinkligen Berücksichtigung finden. Mz.

P. Appel. Sur les courbes orthogonales composées de coniques. Grunert Arch. LXIII. 50-56.

Folgende Systeme von orthogonalen Curven, welche nur aus Kegelschnitten bestehen, sind bekannt:

1. Confocale Kegelschnitte, und zwar entweder eine Schaar Ellipsen und eine Schaar Hyperbeln oder zwei Schaaren Parabeln.

2. Die Kreisschaaren

$$x^2+y^2-2\lambda x+R^2 = 0;$$
$$x^2+y^2-2\mu y-R^2 = 0,$$

wo R eine Constante bedeutet, λ und μ die Parameter sind.

3. Die Schaaren gleichseitiger Hyperbeln

$$x^2-y^2 = \lambda; \quad xy = \mu.$$

4. Die Schaar von Parabeln, die einander im Scheitel berühren, und von Ellipsen, deren Mittelpunkte in diesem Scheitel liegen, deren grosse Axen in die Scheiteltangente fallen und die das Axenverhältnis $\frac{1}{\sqrt{2}}$, also auch die numerische Excentricität

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ haben, also die Schaaren

$$y^2 = \lambda x; \quad 2x^2+y^2 = \mu.$$

Der Verfasser beweist, dass dies die einzigen Orthogonalsysteme sind, welche nur aus Kegelschnitten bestehen.

Der Gang der Untersuchung ist etwa folgender. Es wird zunächst angenommen, dass in einer der beiden Schaaren ein centrischer Kegelschnitt existirt, dessen Gleichung in der Form

$$\text{I.} \qquad f(xy) = ax^2+by^2-1 = 0$$

vorausgesetzt wird.

Ein Kegelschnitt der zweiten Schaar sei

$$\text{II.} \qquad \varphi(xy) = Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F = 0.$$

Die Bedingung der Orthogonalität giebt:

$$\text{III.} \qquad Aax^2+B(a+b)xy+Cby^2+Dax+Eby = 0.$$

Die Gleichung III. stellt für sich auch einen Kegelschnitt dar, der durch die Durchschnittspunkte von I. und II. hindurchgehen muss; also muss sich k so bestimmen lassen, dass die Gleichung

$$kf(xy)+\varphi(xy) = 0$$

mit III. identisch erfüllt ist. Hieraus ergiebt sich zunächst $k = F$, und alsdann

$$\frac{A+Fa}{Aa} = \frac{2B}{B(a+b)} = \frac{C+Fb}{Cb} = \frac{2D}{Da} = \frac{2E}{Eb}.$$

Sind nun a und b verschieden, so müssen von den drei Coefficienten B, D und E immer zwei zugleich Null sein, da a und b beide von Null verschieden vorausgesetzt werden dürfen. Hiernach kann man vier Unterfälle unterscheiden:

1. $B = D = E = 0$; also

$$\frac{1}{a}+\frac{F}{A} = \frac{1}{b}+\frac{F}{B}.$$

Dies führt auf confocale Kegelschnitte.

2. $D = E = 0$. Dies führt, wenn man $\frac{B(a-b)}{F} = \lambda$ setzt, auf

$$(a+b)(ax^2-by^2)+2\lambda xy+a-b = 0.$$

Lässt man hier λ variiren und sucht die zu dieser Schaar ortho-

gonalen Curven, so findet man eine Differentialgleichung, deren Integration ergiebt

$$ax^2+by^2-1+\mu e^{-\frac{a+b}{2}(x^2+y^2)} = 0.$$

Diese stellt nur dann Kegelschnitte dar, wenn $a+b=0$, und man wird so auf den dritten Fall geführt, wo das System aus gleichseitigen Hyperbeln besteht.

3. $B=0$, $E=0$. Dies führt, wenn man $\lambda=(2b-a)\frac{D}{F}$ setzt, auf die Schaar

$$(2b-a)(ax^2+1)+aby^2+2\lambda x = 0.$$

Als Schaar der rechtwinkligen Trajectorien ergiebt sich

$$ax^2+by^2-1-\mu y^{2-\frac{a}{b}} = 0.$$

Soll diese Schaar nur aus Kegelschnitten bestehen, so muss

$$2-\frac{a}{b} = 0$$

sein; das Orthogonalsystem besteht, wie im vierten der oben angeführten Fälle, aus einer Schaar Parabeln und einer Schaar Ellipsen.

4. $B=0$, $D=0$. Dies führt mit Vertauschung der Coordinaten auf den vorigen Fall zurück. Es ist weiter der Fall zu erledigen, dass a und b gleich sind. Dann erhält man durch ganz analoge Schlüsse wie in dem allgemeineren Falle entweder ein System concentrischer Kreise und die Schaar ihrer Centralen oder zwei orthogonale Kreisschaaren. Man hat freilich noch einen Fall mehr zu berücksichtigen, nämlich:

$$B=0,\quad D \lesseqgtr 0,\quad E \lesseqgtr 0.$$

Endlich kann man noch voraussetzen, dass kein Kegelschnitt einer der beiden Schaaren centrisch wäre, dass also beide Schaaren aus lauter Parabeln beständen. Die Untersuchung ergiebt ein System confocaler Parabeln. A.

J. W. L. Glaisher. Note on an example in Boole's „Differential equations“ relating to orthogonal trajectories. Messenger (2) IX. 46-47

Es handelt sich um die orthogonale Trajectorie eines Systems von confocalen Ellipsen. Glr. (O.)

J. Mautner. Charakter, Axen, conjugirte Durchmesser und conjugirte Punkte der Kegelschnitte einer Schaar. Wien. Ber. 1879.

Die Arbeit enthält eine analytische Beweisführung der von Steiner (Borchardt J. LV. 374. Vergl. auch Schröter. „Theorie der Kegelschnitte". Erste Aufl. § 45) aufgestellten Sätze über die in einer Schaar enthaltenen Kegelschnitte. In diesen Sätzen geschieht die Gruppirung der Kegelschnitte in Arten nach der Lage der Pole der unendlich fernen Geraden, deren Ort bekanntlich die Mittelpunktsgerade ist. Der Verfasser giebt den Sätzen eine Erweiterung, indem er zwei beliebige bezüglich der Schaar conjugirte Gerade einführt und nach der Lage der Pole der einen die Kegelschnitte bezüglich der Schnittpunkte mit dieser Geraden gruppirt. B. K.

H. Brandsch. Geometrische Abhandlung. Pr. Mediasch.

Der Herr Verfasser untersucht die Curven, deren Punkte eine Schaar paralleler Sehnen eines Kegelschnitts in demselben Verhältnis theilen; er weist nach, dass diese Curven Kegelschnitte sind, und wie man durch Untersuchung derselben zu den wichtigsten Eigenschaften der Kegelschnitte geführt wird. Mz.

Weitere Lehrsätze und Lösungen von Aufgaben über Kegelschnitte im Allgemeinen in analytischer Behandlung von R. Graham, S. Johnston, D. Edwardes, G. Turriff, W. J. C. Sharp, Matz, J. L. Kitchin, J. Hammond, J. W. Sharpe, C. Harkema, F. D. Thomson, J. C. Malet, Lez, Moret-Blanc finden sich Educ. Times XXXI. 54-55, 83-84, 86; XXXII. 58-59, 61, 102, 110-111; Nouv. Ann. (2) XVIII. 379-381, 425-426.

O.

M. Azzarelli. Esposizione elementare della quadratura degli spazi curvilinei limitati dalle linee del 2. ordine. Acc. P. N. L. XXXII. 331-360.

Die Quadratur der Ellipse, Hyperbel und Lemniskate wird mit Hülfe der Summen gleicher Potenzen der Vielfachen der Winkel ausgeführt; die dazu nöthigen Formeln werden vorher entwickelt. H.

J. L. Kitchin, E. Rutter. Solution of a question (5842). Educ. Times XXXII. 67-68.

Die Gleichungen

$$x = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots,\ y = b_0\lambda^n + b_1\lambda^{n+1} + \cdots,\ z = c_0\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots,$$

wo λ variabler Parameter, stellen n gerade Linien dar, wenn

$$\begin{vmatrix} a_0\, a_1\, a_2 \ldots a_n \\ b_0\, b_1\, b_2 \ldots b_n \\ c_0\, c_1\, c_2 \ldots c_n \end{vmatrix} = 0.$$

O.

Mack. Ueber gewisse Quadrate, die an zwei gegebene Kreise geknüpft sind. Grunert Arch. LXIV. 225-252.

Es werden die zwei Aufgaben analytisch gelöst und discutirt, ein Quadrat zu construiren, von dem zwei Ecken auf dem einen, die zwei andern auf dem andern gegebenen Kreise liegen, 1) wenn die Eckenpaare den Diagonalen, 2) wenn sie den Gegenseiten des Quadrats zugehören. H.

V. Puiseux. Note sur les polygones qui sont à la fois inscrits dans un cercle et circonscrits dans un autre. Ann. Soc. scient. Brux. III. B. 1-12.

Untersuchung der ganzen Functionen, die von Jacobi in seiner Abhandlung über diese Frage eingeführt sind, nach elementarer Methode. Mn. (O.)

A. Schiappa Monteira. Recherches synthétiques et analytiques sur le cercle variable assujetti à couper continuellement deux cercles donnés sous des angles également donnés. Jorn. d. sc. mat. e astr. II. 54-64.

Gambey. Solution d'une question (1288). Nouv. Ann. (2) XVIII. 326-328.

Eine Parabel mit constantem Parameter bewegt sich in ihrer Ebene parallel sich selbst dergestalt, dass jeder ihrer Punkte eine Parabel mit gegebenem Parameter beschreibt, deren Axe der der beweglichen Parabel parallel ist. Dann ist die Enveloppe der Polaren eines gegebenen festen Punktes in Bezug auf die erste Parabel eine andere Parabel, deren Axe denen der beiden andern parallel ist. O.

E. Guillet. Solution d'une question de concours. Nouv. Ann. (2) XVIII. 31-32.

Gegeben ein Punkt und eine Gerade. Ein Kreis berührt die Gerade und geht durch den Punkt. Dann besteht der Ort der Punkte der Kreise, deren Tangenten senkrecht zu der gegebenen Geraden sind, aus zwei Parabeln. O.

H. Simon. Satz über Parabelsecanten und Sehnen, nebst einigen Folgerungen. Grunert Arch. LXIV. 215-218.

Der Herr Verfasser geht von derjenigen Eigenschaft der Parabel aus, die durch ihre Gleichung $y^2 = px$, wobei die Coordinatenaxen irgend ein Durchmesser und die Tangente in seinem Endpunkte sind, ausgesprochen ist, und leitet mittelst Proportionen einige Sätze von der Parabel her. So zu Anfang: Legt man durch einen Punkt T innerhalb oder ausserhalb einer Parabel ein Sehnen- resp. Secantenbüschel, so ist das Rechteck aus den Abscissen der Schnittpunkte, bezogen auf den durch T gehenden Durchmesser als Axe und seinen Scheitel als An-

fangspunkt, constant u. s. w. Nachher wird ein entsprechender Satz von den Ordinaten angegeben und schliesslich gezeigt, wie man zu einem beliebigen Durchmesser leicht die Ordinaten zeichnen kann. Mz.

CLIFFORD. Solution of a question (1378). Educ. Times XXXII. 31.

Eine Tangente an eine Ellipse sei Sehne in einem concentrischen Kreise, dessen Radius gleich der Entfernung zwischen den Endpunkten der Axen der Ellipse ist. Dann sind die Geraden, welche die Endpunkte der Sehne mit dem Mittelpunkt verbinden, conjugirte Durchmesser. Der Beweis ist analytisch.

O.

E. LUCAS. Problèmes sur les normales à l'ellipse. N. C. M. V. 161-165.

Beweise für den folgenden Satz und einige seiner Folgerungen: „Der Ort der Scheitel der Dreiecke, die der Ellipse umschrieben sind und deren Höhen Normalen zur Ellipse sind, setzt sich aus zwei Ellipsen oder zwei Kreisen zusammen."

Mn. (O.)

H. COURBE. Solution d'une question de licence. Nouv. Ann. (2) XVIII. 123-124.

Die orthogonalen Trajectorien der in Polarcoordinaten durch die Gleichung

$$\varrho^2 = a^2 \log \frac{\operatorname{tang}\omega}{c},$$

(c variabler Parameter) dargestellten Curven sind Hyperbeln.

O.

Weitere Lehrsätze und Lösungen von Aufgaben über specielle Kegelschnitte in analytischer Behandlung

von R. Knowles, R. E. Riley (Parabel); C. F. D'Arcy, A. W. Scott, R. Knowles, T. R. Terry, R. E. Riley, R. Graham, R. Warrens, G. G. Storr, D. Edwardes, F. E. Prudden, E. W. Symons, Ch. Ladd, Wolstenholme, L. Cauret (Ellipse); St. Watson, Clifford, G. Turriff, G. Heppel, Wolstenholme, A. Lacazette, A. Leinchugel (Hyperbel) finden sich Educ. Times XXXI. 57; XXXII. 93; Educ. Times XXXII. 41, 48, 56-57, 68, 87, 101-102; Nouv. Ann. (2) XVIII. 428-430; Educ. Times XXXII. 31, 94; Nouv. Ann. (2) XVIII. 324-325, 365-367.

O.

D. Andere specielle Curven.

J. Casey. On the equation of circles. Trans. of Dublin 1879.

Dies ist der zweite Theil einer Arbeit, deren erster im Jahre 1866 von der Irish Academy publicirt worden ist. Der erste Theil enthielt Erweiterungen mancher bekannten Sätze. So war dort bewiesen, dass dieselben Formen von Gleichungen, welche für einen Kreis gelten, der einem ebenen oder sphärischen Dreieck einbeschrieben ist, auch noch Geltung haben, wenn die geraden Linien im einen Falle oder die grössten Kreise im andern ersetzt werden durch irgend welche drei Kreise in der Ebene oder auf der Kugel, und es war gezeigt, dass die transformirten Gleichungen die Paare von Kreisen darstellen, welche die drei gegebenen Kreise berühren. Die für Kreise auf der Kugel gewonnenen Resultate waren weiter ausgedehnt auf Kegelschnitte, die doppelte Berührung mit einem gegebenen Kegelschnitt haben. In Zusätzen waren manche damit zusammenhängende Gegenstände behandelt.

Der zweite Theil dehnt die Resultate des ersten auf Polygone von beliebiger Seitenzahl aus, die einem gegebenen Kreise in der Ebene oder auf der Kugel ein- oder umbeschrieben sind. Der Gegenstand ist sehr eingehend behandelt. Die Arbeit umfasst ein weites Gebiet der Geometrie und behandelt auch andere Gegen-

stände von allgemeinerem Interesse, indem sie die grosse Fruchtbarkeit der angewandten Untersuchungsmethode zeigt. Das Folgende ist eine Auswahl von Erweiterungen bekannter Sätze, die sich darin finden. „Wenn ein Polygon von n Seiten, deren Gleichungen mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ und deren Längen mit $a, b, c, d, \ldots$ bezeichnet werden, einem Kreise einbeschrieben ist, so ist die Gleichung des Kreises ein Factor in der Gleichung

$$\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma} + \frac{d}{\delta} + \cdots = 0$$

oder kurz in der Gleichung

$$\Sigma\left(\frac{a}{\alpha}\right) = 0;$$

und auf der Kugel in der Gleichung

$$\Sigma\left(\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}a}{\alpha}\right) = 0“.$$

Die Gleichung $\Sigma\left(\frac{a}{\alpha}\right) = 0$ wird, wenn das Polygon aus n Seiten besteht, neben dem Kreise eine Restcurve (residual) vom Grade $(n-3)$ bezeichnen. Ein grosser Theil der Abhandlung beschäftigt sich mit dieser Curve, speciell in dem Fall $n = 6$, wo die Restcurve vom dritten Grade ist. Als Beispiel daraus möge der folgende Fall dienen. „Wenn das Polygon ein Sechseck ist, so ist die Linie $\Sigma\left(\frac{a}{\alpha}\right) = 0$, welche seine Axe genannt wird, der Satellit jeder Seite des Sechsecks in Bezug auf die Curve dritten Grades und auch der Pascal'schen Linie des Sechsecks“. Zu den aus den Gleichungen

$$\Sigma\left(\frac{a}{\alpha}\right) = 0, \qquad \Sigma\left(\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}a}{\alpha}\right) = 0$$

abgeleiteten Eigenschaften der einbeschriebenen Polygone lassen sich die reciproken Eigenschaften aufstellen, und man erhält so Tangentialgleichungen von der Form

$$\Sigma\left(\frac{\operatorname{cotg}\frac{1}{2}A}{\lambda}\right) = 0,$$

welche Eigenschaften der umschriebenen Polygone geben. In

dieser Gleichung bezeichnen A, B, C ... die Winkel der Polygone und λ, μ, ν ... die Senkrechten von den Winkelpunkten auf eine Tangente an den Kreis. Die obige Tangentialgleichung gilt sowohl für die Ebene wie für die Kugel. Es findet sich hier der Satz: „Wenn ein Polygon mit den Seiten α, β, γ, δ ... ω einem Kreise umschrieben ist, so ist die Gleichung der Kreise ein Factor in der polyzomalen Curve

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(\widehat{\alpha\beta})}{\sqrt{\alpha\beta}} + \frac{\cos\frac{1}{2}(\widehat{\beta\gamma})}{\sqrt{\beta\gamma}} + \frac{\cos\frac{1}{2}(\widehat{\gamma\delta})}{\sqrt{\gamma\delta}} + \cdots + \frac{\cos\frac{1}{2}(\widehat{\omega\alpha})}{\sqrt{\omega\alpha}} = 1.$$

Die Arbeit enthält eine eingehende Discussion der Eigenschaften dieser Gleichung in dem speciellen Falle $n = 4$. Die tetragonale Curve, welche vom achten Grade ist, zerfällt in zwei Factoren, von denen der eine den Kreis und das Quadrat der Linie, welche die Punkte $(\alpha\gamma)(\beta\delta)$ verbindet, darstellt. Der andere Factor bezeichnet eine unicursale Curve vierten Grades, deren drei Doppelpunkte $(\alpha\gamma)$, $(\beta\delta)$ und der Pol der diese Punkte verbindenden Linie in Beziehung auf den Kreis sind. Diese Resultate gelten für die Ebene und für die Kugel, und α, β, γ, δ ... können sowohl Kreise als Gerade bezeichnen. Sie sind auch richtig für Kegelschnitte, die doppelte Berührung mit einem gegebenen Kegelschnitt haben. Ausser diesen Erweiterungen bekannter Sätze enthält die Arbeit auch neue Sätze, welche ebenfalls auf Kegelschnitte angewendet werden, die doppelte Berührung mit einem gegebenen Kegelschnitt haben. So z. B.: „Wenn ein Kreis Σ von einer Reihe von Kreisen S_1, S_2, S_3 ... berührt wird, und wenn man mit $P(i)$ das Product der gemeinsamen Tangenten eines Kreises S_i des Systems mit allen übrigen bezeichnet, so ist die Gleichung von Σ ein Factor in der polyzomalen Curve

$$\frac{\sqrt{S_1^{n-2}}}{P(1)} - \frac{\sqrt{S_2^{n-2}}}{P(2)} + \frac{\sqrt{S_3^{n-2}}}{P(3)} \cdots = 0.“$$

Dieser Satz ist äusserst fruchtbar.

Csy. (O.)

A. AMESEDER. Theorie der negativen Fusspunktcurven. Grunert Arch. LXIV. 164-170.

Es werden hier auf sehr einfache und anschauliche Weise, nur mit Zuhilfenahme der neueren Geometrie, Eigenschaften der negativen Fusspunktcurven algebraischer Curven entwickelt. Ist D eine ebene Curve n^{ter} Ordnung und $n(n-1)^{\text{ter}}$ Classe, P ein fester Punkt ihrer Ebene, so lege man durch P alle möglichen Geraden σ; jede derselben trifft D in n Punkten, die in diesen Punkten auf σ errichteten Senkrechten t umhüllen die negative Fusspunktcurve C für die Directrix D und den Pol P. Die Curve C ist von der Classe $2n$ und von der Ordnung $n(n+1)$; die unendlich entfernte Gerade und die Linien von P nach den imaginären Kreispunkten sind n-fache Tangenten von C. Der Berührungspunkt einer Tangente von C ergiebt sich sehr leicht folgendermassen: Man ziehe eine Gerade von P nach einem Punkte b der Curve D und lege durch P denjenigen Kreis, welcher D in b berührt, dann ist der Gegenpunkt B zu P in diesem Kreise der Berührungspunkt auf der Tangente bB von C. Hieran knüpft sich die Besprechung der Evolute von C, welche gleichfalls als negative Fusspunktcurve in Bezug auf den Pol P und eine Directrix D', die vom jedesmaligen Gegenpunkte b' zu b während der Veränderung von b auf D beschrieben wird, auftritt. Noch viele interessante Einzelheiten, welche mehrfache Punkte u. s. w. betreffen, sind angegeben. Mz.

A. AMESEDER. Negative Fusspunktcurven der Kegelschnitte. Grunert Arch. LXIV. 170-176.

Der Verfasser beabsichtigt in dieser Abhandlung zu zeigen, wie einfach sich die Untersuchung der negativen Fusspunktcurven der Kegelschnitte gestaltet, wenn man die neuere Geometrie zu Hülfe nimmt. Der erste Satz lautet: Die negative Fusspunktcurve eines Kegelschnittes für einen beliebigen Punkt der Ebene als Pol ist eine Curve vierter Classe sechster Ordnung. Sie hat die unendlich ferne Gerade und die Verbindungslinien des Poles mit den imaginären Kreispunkten zu Doppeltangenten;

Die Untersuchung dieser Curven dritten Grades zerfällt in drei Theile, je nachdem das aus den drei Foci als Eckpunkten gebildete Dreieck *ABC* gleichseitig, gleichschenklig oder ungleichseitig ist. Wenn es in einer Familie confocaler Gruppen Curven dritten Grades mit Inflexionspunkten giebt, so kann der Ort der begleitenden Punkte zur Classification benutzt werden. Man erhält diesen Ort durch Elimination des Parameters aus den Invarianten vierten und sechsten Grades der cubischen Gleichung für eine Gruppe. Je nach der Lage des begleitenden Punktes zu diesem Orte kann eine confocale Gruppe eine ungrade oder grade Zahl von kritischen Werthen haben. Wenn der begleitende Punkt auf dem Ort liegt, ist es eine inflectionale Curve dritten Grades, und es giebt dann drei oder einen weiteren kritischen Werth; wenn dies nicht der Fall ist, giebt es eine grade Zahl, nämlich zwei oder keinen. Wenn der begleitende Punkt auf einer Seite von *ABC* liegt, so giebt es wenigstens sechs kritische Werthe.

Csy. (O.)

H. van Aubel. Sur les courbes du troisième degré.
N. C. M. V. 81-87.

Gleichung und Construction aus fünf gegebenen Punkten, so dass die Tangenten in vier dieser Punkte sich im fünften schneiden.

Mn. (O.)

Em. Weyr. Ueber dreifach berührende Kegelschnitte einer ebenen Curve dritter Ordnung und vierter Classe.
Wien. Ber. LXXX.

Ist auf einer Curve C_3^4 eine quadratische Punktinvolution gegeben, so umhüllen die Geraden, welche durch je zwei Punkte eines Paars bestimmt sind, einen Kegelschnitt. Dieser wird der Involutionskegelschnitt genannt, und nunmehr der Satz bewiesen: „Jeder die Curve C_3^4 dreifach berührende Kegelschnitt ist ein Involutionskegelschnitt einer quadratischen Punktinvolution auf C_3^4."

Schn.

J. J. Walker. Solution of a question (5813). Educ. Times XXXI. 98-99.

Von einem Punkt einer Inflexionstangente an eine Curve dritten Grades lassen sich vier Tangenten an die Curve ziehen. Es giebt dann sechs Punkte, zwei auf jeder Inflexionstangente, die auf einem Kegelschnitt liegen, von denen aus die vier Tangenten ein harmonisches Büschel bilden. O.

R. A. Hermans, E. W. Symons. Solutions of a question (5746). Educ. Times XXXI. 23.

Der Krümmungskreis in einem Punkte P der Curve $ay^2 = x^3$ schneidet dieselbe noch in drei Punkten. Der Ort des Centroids dieser Punkte, während P sich längs der Curve bewegt, ist

$$3ay^2+(3x+2a)(7x+2a)^2 = 0.$$

O.

G. de Longchamps. Sur les conchoïdales. N. C. M. V. 145-149.

Durch einen Punkt A auf einer Curve F ziehe man eine Tangente AI, welche zwei andere Curven f, φ in B, C schneide. Auf AI nehme man eine Länge $AI = BC$. Der Ort des Punktes I ist eine Conchoidale. Es folgt die Construction der Tangenten an die Cissoïde, die Strophoïde, die Lemniscate von Bernoulli, die Conchoide des Nicomedes, die Schneckenlinie des Pascal, die sich sämmtlich als Conchoïdale betrachten lassen. Benutzt wird der Hülfssatz: Es seien MNP drei in gerader Linie auf den Seiten eines Dreiecks liegende Punkte. Die zu den Punkten MNP in Beziehung auf die Mitten der Seiten der Dreiecke symmetrisch liegenden Punkte liegen ebenfalls auf einer Geraden.

Mn. (O.)

G. de Longchamps. Sur les cubiques unicursales. N. C. M. V. 403-408.

Fortsetzung der obigen Arbeit mit weiteren Anwendungen.

Mn. (O.)

K. Zahradnik. Beitrag zur Theorie der Cardioide.
Grunert Arch. LXIII. 94-97.

Nachdem die Cardioide, deren Gleichung:

$$(x^2+y^2)^2-4ax(x^2+y^2)-4a^2y^2 = 0,$$

mittels eines variablen Parameters durch die Gleichungen:

$$x = \frac{4a(1-u^2)}{(1+u^2)^2}; \quad y = \frac{8au}{(1+u^2)^2}$$

definirt ist, und die drei von einem Punkte (xy) an die Cardioide gehenden Tangenten durch die für u cubische Gleichung:

$$u^3+\frac{3x}{y}u^2-3u-\frac{x-4a}{y} = 0$$

gefunden sind, ferner (xy) Pol der drei Berührungspunkte mit den Parametern u_1, u_2, u_3 genannt ist, geht der Herr Verfasser zur Lösung der Aufgabe über, den Ort der Pole constanter Berührungsdreiecke bei der Cardioide zu finden. Die Rechnung geschieht sehr einfach mit Hülfe der bekannten Determinante, die den Inhalt eines Dreiecks durch die Coordinaten der Eckpunkte ausdrückt; in dieser Determinante werden für die Coordinaten ihre Ausdrücke in u_1, u_2, u_3 substituirt. Durch Quadriren wird diese Determinante dann eine symmetrische Function von u_1, u_2, u_3, die leicht mit Berücksichtigung der oben angegebenen cubischen Gleichung für u rational durch x und y ausgedrückt werden kann. Mz.

A. Ameseder. Astroiden. Grunert Arch. LXIV. 177.

Der Herr Verfasser erklärt im Eingange die Astroide eines Kegelschnitts als eine Curve vierter Classe sechster Ordnung, welche zwei conjugirte Durchmesser eines Kegelschnitts und die unendlich ferne Gerade zu Doppel-Rückkehrtangenten hat. Späterhin gelangt er nach mehreren geometrischen Betrachtungen zu der Definition: Die Astroide eines Kegelschnitts ist die Enveloppe aller Geraden, deren zwischen zwei festen sich schneidenden Geraden gelegenes Stück gleich ist dem demselben parallelen Durchmesser irgend eines centrischen Kegelschnitts der Ebene. Verschiedene Eigenschaften der Curve werden aufgeführt.

Mz.

C. **Crone.** Elementärgeometriske Beviser for nogle Sätninger vedrörende bicirkuläre Kurver af 4[de] Orden. Zeuthen Tidsskr. (4) III. 81-86.

Eine bicirculare Curve vierter Ordnung $K^{(4)}$ kann als der Ort der Punkte, deren Radicalaxe mit einem festen Kreise C einen festen Kegelschnitt K berührt, definirt werden. Für C kann man einen Kreis nehmen, dessen Centrum in einer der Spitzen von dem für C und K gemeinschaftlichen selbstconjugirten Dreiecke liegt, und als zugehörigen Grundkegelschnitt einen mit K confocalen Kegelschnitt hat. Aus dieser Erzeugung der $K^{(4)}$ leitet der Verfasser verschiedene Sätze und Constructionen ab, z. B. die Bestimmung der Schnittpunkte von $K^{(4)}$ mit einer willkürlichen Geraden oder einem Kreise, sowie die Construction der Tangenten in den Doppelpunkten, welche mittels Parabeln ausgeführt wird. Gm.

F. **Purser.** Solution of a question (5742). Educ. Times XXXI. 97-98.

Ein Kegelschnitt U berühre eine Gerade L und einen Kegelschnitt V und habe doppelte Berührung mit einem andern Kegelschnitt W. Die Berührungssehne von U und W umhüllt dann eine Curve vierten Grades mit zwei Knoten, welche die Schnittpunkte von L und W sind. O.

J. J. **Walker.** Solution of a question (5626). Educ. Times XXXII. 17.

Die zu einer bicircularen Curve vierter Ordnung doppelt normalen Kreise liegen in vier Systemen, und jedes System schneidet einen Hauptkreis orthogonal. Die Enveloppe eines Systems dieser binormalen Kreise wird gesucht und ergiebt sich als eine Curve von der zwölften Ordnung. O.

J. J. **Walker.** Solution of a question (5920). Educ. Times XXXII. 97-98.

Der aufgestellte Satz heisst: „Eine Curve vierten Grades kann drei Inflexionspunkte haben, die in derselben Geraden liegen“. Herr Walker beweist folgenden Satz: „Wenn bei einer Curve n^{ter} Ordnung $n-1$ Inflexionspunkte in einer geraden Linie liegen, so liegt auch ein n^{ter} Inflexionspunkt auf derselben Geraden“. O.

R. Knowles, T. Dobson. Solutions of a question (6032). Educ. Times XXXII. 67.

Von einem äusseren Punkte werden Tangenten so an eine Parabel gezogen, dass sie mit der Berührungssehne ein Dreieck mit constantem Inhalt p^2 einschliessen. Der Ort dieser Punkte hat die Gleichung

$$(y^2-4ax)^3 = 4a^2p^4.$$

O.

J. W. Sharpe, E. Rutter. Solutions of a question (5545). Educ. Times XXXI. 93-95.

Der Ort der Mittelpunkte von Kreisen, welche einen gegebenen Kreis orthogonal schneiden und einen gegebenen Kegelschnitt berühren, ist eine Curve sechster Ordnung mit sechs Spitzen, die auf einem andern Kegelschnitte liegen. O.

G. Bauer. Ueber Systeme von Curven sechster Ordnung, auf welche das Normalenproblem bei Curven zweiter Ordnung führt. Münch. Ber. 1878.

Die Arbeit beschäftigt sich zunächst mit denjenigen Curven, welche der Evolute eines Kegelschnitts bei der Cayley'schen verallgemeinerten Definition der Normalen entsprechen, behandelt also wesentlich denselben Gegenstand, über welchen Herr Roberts [On the sextic curves represented by

$$\left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{B}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{z}{C}\right)^{\frac{2}{3}}=0$$

and the correlatives quartics., siehe Quart. J. XV. 224—230.

F. d. M. X. 1878. 488–491] bereits eine eingehende Untersuchung veröffentlicht hat, wenn auch die Behandlungsweise in Einzelheiten eine andere ist. Dagegen untersucht der Verfasser im zweiten Theile seiner Arbeit ein anderes Curvensystem sechster Ordnung, welches ebenfalls mit dem Normalenproblem zusammenhängt. Wir können gewöhnliche Normalen zu Grunde legen, da die Verallgemeinerung nichts an der Rechnung ändert, sobald die Coordinaten homogen gemacht sind. Sind nämlich von einem Punkt N mit den Coordinaten XYZ die vier Normalen auf einen Kegelschnitt gefällt, und ordnet man die Tangenten in den Fusspunkten zu zwei Paaren und nennt die Coordinaten der Durchschnittspunkte jedes Paares $\xi\eta\zeta$ und $\xi'\eta'\zeta'$, so ist

$$a\xi\xi' = b\eta\eta' = c\zeta\zeta'.$$

Durchläuft nun der Punkt XYZ eine der Curven sechsten Grades, für welche die vier Normalen constantes Doppelverhältnis haben, und welche im ersten Theile und in der citirten Arbeit untersucht sind, so beschreiben die $\xi\eta\zeta$ und $\xi'\eta'\zeta'$ eine und dieselbe Curve, welche von der achtzehnten Ordnung ist, sich aber in drei Curven sechster Ordnung auflöst, deren Gleichungen u. a. in folgende Form gebracht werden können

$$(a\xi^2+b\eta^2+c\zeta^2)(ab\xi^2\eta^2+bc\eta^2\zeta^2+ca\zeta^2\xi^2)-(\varrho_h+1)abc\xi^2\eta^2\zeta^2 = 0,$$

wo ϱ_h eine Wurzel der cubischen Gleichung

$$(\varrho+4)^3-27m\varrho^2 = 0$$

bedeutet, während m eine Constante ist, welche von dem Doppelverhältnis der vier Normalen abhängt. Die drei Curven entsprechen den drei Anordnungen der vier Normalen zu je zwei Paaren, die beiden Punkte $\xi\eta\zeta$ und $\xi'\eta'\zeta'$ liegen aber stets auf derselben Curve.

Eine Untersuchung der Singularitäten dieser Curven ergiebt, dass sie im Allgemeinen von der Classe 24 und vom Geschlechte 7 sind; eine specielle Curve, für welche die entsprechende Curve der ersten Art die Evolute wird, ist von der Classe 16 und dem Geschlechte 3. Sie haben die Eckpunkte des Coordinatendreiecks zu Doppelpunkten. Die Tangenten in diesen Doppelpunkten sind allen Curven gemein, und zwar sind es Wendetangenten für die

beiden Aeste, ihre Gleichungen haben die Form

$$a\xi^2+b\eta^2 = 0 \text{ etc.}$$

Diese Geraden berühren ausserdem die Curven in denselben Punkten, in welchen sie den Kegelschnitt

$$x^2+y^2+z^2 = 0$$

berühren (welcher beim eigentlichen Normalenproblem in die unendlich entfernten Kreispunkte degenerirt). A.

A. Radicke. Zur Theilung des Winkels. Grunert Arch. LXIII. 328-331.

Es wird die Curve gesucht, derart, dass von einem beliebigen ihrer Punkte zwei Gerade nach zwei festen Punkten einer festen Geraden gezogen mit dieser nach derselben Seite hin Winkel im Verhältnis $1:n$ bilden. Die Curve war von Wasserschleben (LVI. 335, s. F. d. M. VI. 1874. p. 447) implicite bestimmt und für $n = 3$ und 5 explicite dargestellt. Sie wird jetzt für beliebige ganze Zahlen n in entwickelter Form dargestellt. Die Gleichung für $n = 5$ war bei Wasserschleben unrichtig; auch Emsmann in Hoffmann's Z. VII. S. 107 hatte specielle Lösungen derselben Aufgabe aufgestellt und dieselbe Gleichung angegeben. Der Verfasser bezeichnet die Curve als das verallgemeinerte oder n-theilende „Folium Cartesii.“ H.

Nash, Cochez. Solutions of a question (3560). Educ. Times XXXI. 22.

Eine Sehne PQ schneidet von einem gegebenen Oval ein constantes Flächenstück ab. Der Krümmungsradius der Enveloppe dieser Sehne ist dann

$$\tfrac{1}{2}PQ.(\text{cotg}\theta+\text{cotg}\varphi),$$

wo θ und φ die Winkel sind, unter denen PQ die gegebene Sehne schneidet. O.

H. Onnen. Aanteckeningen betreffende de theorie der essentieele vergelijkingen der vlakke kromme lijnen. Nieuw Arch. V. 1-34; Arch. Neerl. XIV. 1-75.

Fortsetzung, Schluss und französische Uebersetzung früherer Aufsätze (siehe F. d. M. X. 1878. S. 448). Die Erörterungen über die cycloidischen Curven werden fortgesetzt und zu Ende geführt. Mehrere interessante Eigenschaften dieser Curven werden hier mittels der wesentlichen Gleichungen ganz einfach abgeleitet. Zum Schlusse wird eine Uebersicht der verschiedenen Formen, welche sie annehmen, gegeben, und zählt der Verfasser zehn dieser Formen auf, welche durch Figuren erläutert werden.

G.

A. Sucharda. Ueber Trochoiden der Kegelschnittbrennpunkte bei gerader Basis. Casopis VIII. 166-175. (Böhmisch).

Enthält eine analytische Begründung von Sätzen, welche in dieser Zeitschrift eine Abhandlung Seydler's: „Ueber Gleichgewichtsfiguren von Flüssigkeiten“ zur Verwendung brachte.

Std.

Laguerre. Sur quelques propriétés de l'hypocycloïde à 3 points de rebroussement. Bull. S. M. F. VII. 108-124.

Der Herr Verfasser wendet statt der gewöhnlichen rechtwinkligen Coordinaten X, Y andere durch die Gleichungen:

$$X+Yi = x \quad \text{und} \quad X-Yi = y$$

definirte an, die er isotrope nennt, da die Gleichungen $x=\alpha$ und $y=\beta$, wo α und β Constanten, die verschiedenen isotropen Geraden der Ebene darstellen, d. h. die durch die Kreispunkte gehenden. Es ist ferner e^{-2Vi} der Winkelcoefficient einer Geraden, die mit OX den Winkel V bildet; die Gleichung der Geraden OX wird $x=y$, und die Gleichung eines Kreises mit dem Radius R und den Mittelpunktscoordinaten $\alpha\beta$ in diesem isotropen System wird

$$(x-\alpha)(y-\beta) = R^2.$$

Wenn nun eine Curve n^{ter} Classe gegeben ist, so findet man die

Winkelcoefficienten der durch einen Punkt (x, y) an diese Curve gehenden Tangenten aus einer in λ, μ homogenen Gleichung n^{ten} Grades: $U(\lambda, \mu) = 0$, in welcher $\frac{\mu}{\lambda}$ den Winkelcoefficienten der von (x, y) ausgehenden Tangente bedeutet, und die Coefficienten des Polynomens U ganze Functionen von x und y sind. Der Herr Verfasser nennt diese Gleichung die gemischte Gleichung der Curve. Zur Hypocycloide mit drei Spitzen übergehend zeigt er, dass ihre gemischte Gleichung die Form:

$$a\lambda^3 + b\lambda^2\mu + c\lambda\mu^2 + d\mu^3 + \lambda\mu(\lambda y - \mu x) = 0$$

hat. Der Ort der Punkte, von denen aus die Curve unter einem rechten Winkel gesehen wird, hat dann die Gleichung:

$$(c-x)(b+y) = ad$$

und ist daher ein Kreis mit dem Radius R und den Mittelpunktscoordinaten α, β, wofern:

$$c = \alpha; \quad b = \beta; \quad a = Re^{-\varphi i}$$

und $d = -Re^{\varphi i}$: Dadurch wird die gemischte Gleichung der Curve:

$$Re^{-\varphi i}.\lambda^3 - \beta\lambda^2\mu + \alpha\lambda\mu^2 - Re^{\varphi i}\mu^3 + \lambda\mu(\lambda y - \mu x) = 0.$$

Es wird hierauf die gemischte Gleichung der verschiedenen Hypocycloiden gesucht, welche die Axe OX berühren und sie ausserdem in zwei von O gleichweit abstehenden Punkten schneiden. Bei dieser Betrachtungsweise werden nun zum Theil bekannte Sätze auf's Neue verificirt, zum Theil neue Sätze hergeleitet.

In einem zweiten Theile werden diese Resultate auf rein geometrische Weise durch stereometrische Betrachtung gewonnen.

Mz.

E. St. Wenzel. Untersuchungen über die logarithmische Spirale. Pr. Böhmisch-Leipa.

Der Herr Verfasser bezweckt mit dieser Programmschrift, dem strebsamen Schüler, der bereits durch die Lehre von den Kegelschnitten mit den Elementen der analytischen Geometrie vertraut geworden ist, ein Beispiel einer analytischen Discussion

zu geben, wie es wegen Mangels an Zeit am Obergymnasium nicht durchführbar ist, aber dennoch auf diese Art zur Selbstthätigkeit anregend wirken kann. Nach dem Hinweise auf das eigenthümliche Interesse, welches die Erforschung der Spiralen überhaupt bietet, folgt die Ermittelung der Gestalt der Curve aus ihrer Gleichung: $r = ae^{m\varphi}$, die Angabe der geometrischen Bedeutung der Constante m, die Einführung der Gegenspirale $r = ae^{-m\varphi}$, die Bestimmung einer solchen Curve aus ihrem Mittelpunkt ($r = 0$, $\varphi = -\infty$) und zweien ihrer Punkte, die Bestimmung von Evolvente und Evolute, die Quadratur der Curve und zum Schluss die Bestimmung der Schaar derjenigen Curven, die ein System von logarithmischen Spiralen unter demselben Winkel durchschneiden, wobei das System durch die Constante m charakterisirt ist. Das Resultat der letzten Aufgabe ist, dass die Trajectorien des Systems von logarithmischen Spiralen wieder logarithmische Spiralen sind. Mz.

FREETH's Nephroid. Proc. L. M. S. X. 228-231.

Die Nephroide des Dr. Freeth wird folgendermassen construirt. Man ziehe irgend eine Sehne AB eines Kreises, dessen Centrum O, ferner verlängere man OB bis P, so dass $BP = BA$, dann ist der Ort von P für alle vom Punkte A auslaufenden Sehnen die Nephroide. Setzt man $OP = r$ und Winkel $POA = \theta$, den Kreisradius $= a$, so wird die Polargleichung der Curve:

$$r = a\left(1 + 2\sin\frac{\theta}{2}\right).$$

Ist F. Mitte von OA und FP' senkrecht zu OA und zwar bis zur Nephroide in P' verlängert, d. h. bis zum ausserhalb des Kreises liegenden Zweige derselben, so wird OAP' ein gleichschenkliges Dreieck, von welchem jeder Basiswinkel gleich dem Dreifachen des Winkels an der Spitze ist. Dies wird benutzt zu einer Construction regulärer Polygone von 7, 21, 35 etc. Seiten im Kreise. Für das reguläre Neuneck wird nachher noch eine Curve besprochen, deren Polargleichung:

$$r = \frac{a\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6}\right)}.$$

Sie entsteht aus einem gleichseitigen Dreieck *ABC*, indem jeder Punkt *K* von *BC* mit *A* verbunden, und dann *AK* um *KB* über *K* (bis *P*) verlängert wird. Der Ort von *P* ist diese Curve.

Mz.

H. Courbe. Solutions de questions de licence. Nouv. Ann. (2) XVIII. 123-126.

1) Bestimmung der orthogonalen Trajectorien der durch ihre Polarcoordinatengleichung dargestellten Curven

$$\varrho^2 = a^2 \log \frac{\operatorname{tang}\omega}{c}$$

(c variabler Parameter).

2) Gegeben ist in Polarcoordinaten die Curvengleichung

$$\varrho^2 = a^2 \log \frac{\operatorname{tang}\omega}{\operatorname{tang}\alpha},$$

wo α zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegt. Man soll untersuchen, ob der durch die Radii vectores $\omega = \alpha$ und $\omega = \frac{\pi}{2}$ bestimmte Sector einen endlichen oder unendlichen Werth hat. Es ergiebt sich ein endlicher Werth.

O.

L. G. Barbour. Curve of pursuit generalized. Analyst VI. 108-112.

Untersuchung des allgemeinen Problems der Verfolgungscurven und einiger Oerter, die mit speciellen Fällen derselben zusammenhängen.

Glr. (O.)

Lösungen weiterer Aufgaben über Enveloppen und geometrische Oerter, die auf Curven von höherem als

dem zweiten Grade führen, von J. Hammond, Morel, Nash, Torelli, Evans, J. L. Kitchin, S. Ruggero, W. J. C. Sharp, R. Knowles, E. W. Symons, D. Edwardes, J. Heppel, Wolstenholme, T. R. Terry, H. Lez, Robaglia finden sich Educ. Times XXXI. 24, 25, 26, 27-29, 30-31, 83, 93; XXXII. 71-74, 82; Nouv. Ann. (2) XVIII. 322-323, 363-365, 475-477.

O.

Capitel 3.

Analytische Geometrie des Raumes.

A. Allgemeine Theorie der Flächen und Raumcurven.

G. Salmon. Analytische Geometrie des Raumes. Deutsch bearbeitet von W. Fiedler. I. Die Elemente und die Theorie der Flächen zweiten Grades. 3te Aufl. Leipzig. Teubner.

L. Saltel. Sur un paradoxe mathématique et sur un nouveau caractère de décomposition dû à la présence des lignes multiples. Bull. de Belg. (2) XLVII. 184-210.

Das Paradoxon ist folgendes: Die Coordinaten aller Punkte des Raumes scheinen den Gleichungen eines Ortes zu genügen, obgleich sich derselbe nach seiner Definition aus Linien oder Flächen zusammensetzt.

Mn. (O.)

A. W. Panton. On the six coordinates of a right line. Herm. VI.

Eine kurze Abhandlung, in welcher der Gegenstand von einem elementaren Gesichtspunkte aus behandelt wird. Die sechs

Coordinaten werden in der Form

$$mz-ny,\ nx-lz,\ ly-mx,\ l,\ m,\ n$$

geschrieben, wo l, m, n die Richtungscosinus der Linie und x, y, z die Coordinaten eines Punktes auf der Linie, bezogen auf drei rechtwinklige Axen, sind. Beispiele werden ausgeführt, um zu zeigen, wie aus Bedingungen, denen die Coordinaten einer Linie genügen, die Gleichung der Oberfläche, die durch die Linie beschrieben wird, in rechtwinkligen Coordinaten hergeleitet werden kann, indem man Rücksicht nimmt auf die Eigenschaft, dass die Grössen x, y, z, welche in die sechs obigen Werthe eingehen, die Coordinaten eines Punktes auf der Linie sind.

Das Hauptresultat ist der einfache Ausdruck

$$Al,\ Bm,\ Cn,\ l,\ m,\ n$$

für die sechs Coordinaten einer Erzeugenden der Fläche zweiten Grades

$$Ax^2+By^2+Cz^2+ABC = 0.$$

Csy. (O.)

R. Beez. Ueber das Riemann'sche Krümmungsmass höherer Mannigfaltigkeiten. (Schluss.) Schlömilch Z. XXIV. 65-82.

Siehe das Referat Bd. IX. 1877. p. 513. Bl.

M. Woudstra. Kromming van oppervlakken volgens de theorie van Gauss. Diss. Groningen.

Die Krümmung der Oberflächen nach der Gauss'schen Theorie wird in dieser Dissertation behandelt. Auch die Biegung wird besprochen und nach den Untersuchungen Minding's, Bonnet's und Bour's das doppelte Problem gelöst: Unter welchen Bedingungen man zwei gegebene Oberflächen um einander wickeln kann, und: Die Oberflächen zu bestimmen, welche man durch Biegung einer gegebenen Fläche erhalten kann. Sodann werden einige Beispiele zur Erläuterung zugefügt und endlich ausführlicher die Flächen mit constanter Krümmung behandelt.

G.

J. W. Warren. An improved form of writing the formula of C. F. Gauss for the measure of curvature. Quart. J. XVI. 219-224.

Den Gauss'schen Ausdruck des Krümmungsmasses k transformirt der Verfasser zuerst ohne Einführung neuer Elemente in folgenden:

$$2Bk = -\frac{\partial}{\partial p}\left\{\frac{EG}{BF}\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{F^2}{CG}\right)\right\} + \frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{1}{BG}\left\{G\left(2\frac{\partial F}{\partial q}-\frac{\partial G}{\partial p}\right)-F\frac{\partial G}{\partial q}\right\}\right] + \frac{\partial}{\partial q}\left[\frac{1}{BE}\left\{E\left(2\frac{\partial F}{\partial p}-\frac{\partial E}{\partial q}\right)-F\frac{\partial E}{\partial p}\right\}\right],$$

wo $B = \sqrt{EG-F^2}$, p, q beliebige Parameter sind. Für den Fall orthogonaler Parameter hatte schon Liouville die Formel vereinfacht. Der erste der drei Theile des Ausdrucks lässt sich nun sehr einfach durch den Winkel w zwischen den Parameterlinien darstellen, so dass

$$Bk = \frac{\partial^2 w}{\partial p \partial q} + \frac{\partial Q}{\partial p} + \frac{\partial P}{\partial q}$$

wird. Auch die beiden andern Theile werden durch Einführung verschiedener geometrischer Grössen transformirt. H.

A. Razzaboni. Alcune proprietà delle superficie a linee di curvatura piane. Mem. di Bologna (3) X. 529-536.

J. N. Hazzidakis. Ueber einige Eigenschaften der Flächen mit constantem Krümmungsmass. Borchardt J. LXXXVIII. 68-73.

Von jenen Flächen werden folgende Sätze bewiesen. Die von den asymptotischen Linien gebildeten Vierecke haben gleich lange gegenüberliegende Seiten, und ihr Inhalt ist dem Ueberschuss der Summe der vier Winkel über 360° proportional. Es giebt unendlich viele Systeme von Linien, welche dieselbe Eigen-

schaft haben. Die Integration der partiellen Differentialgleichung der genannten Flächen lässt sich auf die Integration der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u \partial v} = \sin \lambda$$

zurückführen, wo $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ die asymptotischen Linien, und λ den Winkel derselben bedeuten. Hat man den Werth von λ, so ist noch eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung zu integriren, um alle Flächen mit constantem Krümmungsmasse zu erhalten. Sind die Coordinaten (xyz) einer solchen Fläche durch die geodätischen Variabeln u, v ausgedrückt und die von Gauss mit D, D', D'' bezeichneten Determinanten gebildet, so definiren die Gleichungen

$$\partial x' = (1 + u^2 + v^2) D \partial u + D' \partial v, \text{ etc.}$$

ebenfalls eine Fläche von constantem Krümmungsmasse.

H.

Sophus Lie. Zur Theorie der Flächen constanter Krümmung. I., II. Arch. f. Math. og Nat. IV. 345-354, 355-366.

Die erste Note lehrt die Haupttangentencurven und Krümmungslinien einer jeden Fläche constanter Krümmung in folgender Weise zu bestimmen.

Es seien

(1.) $X_1 dy - Y_1 dx = 0, \quad X_2 dy - Y_2 dx = 0, \quad X_3 dy - Y_3 dx = 0$

drei vorgelegte Differential-Gleichungen, deren unbekannte Integrale die Form

$$u, \quad v, \quad f(u) + \varphi(v)$$

erhalten können. Alsdann besitzen die drei Differentialgleichungen immer Euler'sche Multiplicatoren M_1, M_2 und M_3, die eine Relation der Form

(2.) $M_3(X_3 dy - Y_3 dx) = M_1(X_1 dy - Y_1 dx) + M_2(X_2 dy - Y_2 dx)$

erfüllen. Also folgt

$$\frac{M_1 X_1 + M_2 X_2}{X_3} = \frac{M_1 Y_1 + M_2 Y_2}{Y_3},$$

woraus

$$(3.)\qquad M_2 = \frac{X_1 Y_3 - X_3 Y_1}{Y_2 X_3 - Y_3 X_2} M_1 = f.u_1,$$

wo f eine bekannte Function von x, y bezeichnet. Setzt man diesen Werth von M_2 in die Gleichung

$$X_2 \frac{d\log M_2}{dx} + Y_2 \frac{d\log M_2}{dy} = -\frac{dX_2}{dx} - \frac{dY_2}{dy}$$

ein, so erhält man die Relation

$$X_2 \frac{d\log M_2}{dx} + Y_2 \frac{d\log M_2}{dy}$$
$$= -\frac{dX_2}{dx} - \frac{dY_2}{dy} - X_2 \frac{d\log f}{dx} - Y_2 \frac{d\log f}{dy},$$

wozu die bekannte Gleichung

$$X_1 \frac{d\log M_1}{dx} + Y_1 \frac{d\log M_1}{dy} = -\frac{dX_1}{dx} - \frac{dY_1}{dy}$$

gefügt wird. In dieser Weise findet man $\log M_1$ und danach M_1 durch Quadratur, endlich auch M_2 und M_3 durch (2.) und (3.). Hiermit ist die Integration der Gleichungen (1.) durch zwei successive Quadraturen geleistet.

Nun aber ist bekannt, dass die Haupttangentencurven und die Krümmungslinien der Flächen constanter Krümmung durch Gleichungen der Form

$$u = \text{Const.},\quad v = \text{Const.},\quad u \pm v = \text{Const.}$$

dargestellt werden können. Also verlangt die Bestimmung dieser Curven nur Quadraturen.

Die Sätze der zweiten Note sind fast sämmtlich früher von anderen Mathematikern, besonders von Dini (Brioschi Ann. (2.) IV. 175-206, s. F. d. M. III. 1871. p. 352) gegeben worden.

L.

Sophus Lie. Ueber Flächen, deren Krümmungsradien durch eine Relation verknüpft sind. Arch. f. Math. og Nat. IV. 507-512.

Die Krümmungslinien einer Fläche können bekanntlich ohne weiteres angegeben werden, wenn die geodätischen Curven der

Centerfläche gefunden sind. Nimmt man nun eine Fläche, deren Krümmungsradien ϱ und ϱ' durch eine ganz beliebige Relation verknüpft sind, so ist die Centerfläche nach Weingarten abwickelbar auf eine Rotationsfläche; andererseits hat Bour gelehrt, auf einer Rotationsfläche, deren Krümmungsmass nicht constant ist, die geodätischen Curven zu finden. Daher verlangt die Bestimmung der Krümmungslinien einer Fläche, deren Krümmungsradien durch eine Relation verknüpft sind, nur gewisse Quadraturen. Der hier gegebene Beweis dieses Satzes bleibt nicht mehr gültig, wenn die Centerfläche constante Krümmung besitzt. Es ist indess möglich, einen Beweis des betreffenden Satzes zu geben, der den besprochenen ganz besonders wichtigen Ausnahmefall umfasst. Die bekannte von Weingarten (Borchardt LIX.) herrührende Formel

$$d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2 = d\varrho^2+e^{2\int\frac{d\varrho}{\varrho-\varrho'}}dq^2$$

giebt nämlich durch Auflösung

$$dq = e^{-\int\frac{d\varrho}{\varrho-\varrho'}}\sqrt{d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2-d\varrho^2}$$

und durch Integration

$$q = \int e^{-\int\frac{d\varrho}{\varrho-\varrho'}}\sqrt{d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2-d\varrho^2},$$

womit die Gleichung $q=$ Const. der einen Schaar Krümmungslinien bestimmt ist. Die zweite Schaar wird in entsprechender Weise gefunden.

Ein besonderes Interesse bietet die Anwendung dieser Bestimmung auf den Fall, dass ϱ und ϱ' durch die Relation $\varrho-\varrho' = a =$ Const. verknüpft sind, in welchem Falle die beiden Schalen der Centerfläche, wie Beltrami und Dini bemerkt haben, constante Krümmung besitzen. Bianchi hat nämlich gelehrt, einfach unendlich viele neue Flächen constanter Krümmung zu bestimmen, wenn eine Fläche F constanter Krümmung mit bekannten geodätischen Curven vorgelegt ist. Nach dem Vorhergehenden ist es nun leicht, auch auf diesen neuen Flächen die geodätischen Curven

durch Quadratur zu bestimmen. Daher kann Bianchi's Operation wiederum auf die neuen Flächen angewandt werden. Indem man in dieser Weise verfährt, findet man successiv ∞^∞ Flächen constanter Krümmung, deren geodätische Curven, Krümmungslinien und Haupttangentencurven ohne weiteres angegeben werden können.

Es giebt eine andere bemerkenswerthe Weise, in welcher man aus einer vorgelegten Fläche constanter Krümmung eine andere derartige Fläche herleiten kann. Bezeichnet man mit s und σ die Bogenlängen der Haupttangentencurven einer Fläche constanter Krümmung, mit Θ den Winkel zwischen zwei einander schneidenden Haupttangentencurven, so besteht nach einer Bemerkung von Bonnet eine Gleichung der Form

$$\frac{d^2\Theta}{ds\,d\sigma} = K.\sin\Theta \quad (K = \text{Const.}).$$

Ist nun $\Theta = f(s\sigma)$ eine bekannte Lösung dieser partiellen Differentialgleichung, so ist

$$\Theta = f\left(ms, \frac{\sigma}{m}\right) \quad (m = \text{Const.})$$

eine allgemeine Lösung. In Folge derselben können aus einer vorgelegten Fläche immer ∞^1 neue derartige Flächen hergeleitet werden. Allerdings verlangt die Bestimmung der endlichen Gleichung dieser Flächen die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung 2^{ter} Ordnung, die jedoch auf eine Gleichung erster Ordnung reducirt werden kann. Nimmt man alle in dieser Weise erhaltenen Flächen und construirt die zugehörigen Parallelflächen constanter mittlerer Krümmung, so sind diese Parallelflächen auf einander abwickelbar. L.

Ed. Weyr. Sur l'arrangement des plans tangents de certaines surfaces. Mém. de Bord. (2) III. 191-219.

Die Flächen, mit denen sich Herr Ed. Weyr befasst, sind solche, welche durch einen beweglichen, im Allgemeinen in Grösse und Form veränderlichen Kegelschnitt erzeugt werden. Die Anordnung der Tangentialebenen dieser Fläche längs eines erzeugen-

den Kegelschnitts bildet den wesentlichen Inhalt vorliegender Arbeit.

Sind C und C_1 zwei auf einanderfolgende Kegelschnitte der Schaar, so ist der Ort der Ebenen, welche C und C_1 berühren, eine abwickelbare Fläche S vierter Classe. Diese ist der Fläche Π, welche durch jene Kegelschnitte erzeugt wird, längs des Kegelschnitts C umgeschrieben; die Natur dieser abwickelbaren Fläche lässt die Anordnung der Tangentialebenen der Fläche Π längs des Kegelschnitts C erkennen. Die allgemeine abwickelbare Fläche vierter Classe, welche zwei beliebigen Flächen zweiten Grades umgeschrieben ist, enthält in sich vier Kegelschnitte. Von diesen fallen in dem besonderen Falle, dass die Flächen zweiten Grades in zwei consecutive Kegelschnitte C und C_1 degeneriren, zwei in einen zusammen, so dass auf der betreffenden abwickelbaren Fläche nur drei Kegelschnitte enthalten sind; von ihnen ist der Kegelschnitt C, dem auch C_1 als Grenze sich nähert, doppelt zu rechnen. Die beiden anderen Kegelschnitte Σ und Σ' berühren die Ebene von C in demselben Punkte, und dieser Punkt ist der Pol P der Geraden Q, welche die Ebenen von C und C_1 gemeinsam haben, bezogen auf den Kegelschnitt C. Denkt man sich irgend zwei Ebenen der abwickelbaren Fläche S und nimmt auf ihrer Durchschnittskante einen Punkt M an, so gehen von ihm ausser jenen beiden Ebenen noch zwei Tangentialebenen an die Fläche S aus. Sie mögen den Kegelschnitt C in T und T' berühren. Bewegt sich M auf der Durchschnittskante, so bilden T und T' eine Involution auf dem Kegelschnitt, und das Centrum O dieser Involution liegt auf der Polaren Q des Punktes P; das anharmonische Verhältnis aber von vier Punkten M stimmt überein mit dem anharmonischen Verhältnis der entsprechenden vier Strahlen OT.

Gestützt auf diese Relationen giebt der Verfasser die Lösung folgender Aufgabe: „Es sei die Fläche dadurch bestimmt, dass fünf Leitcurven und eine abwickelbare Fläche Δ gegeben sind. Eine Tangentialebene von Δ schneidet die Leitcurven; in ihrer Ebene wird durch die fünf Schnittpunkte ein Kegelschnitt bestimmt, und dieser ist ein erzeugendes Element C der Fläche Π.

Wie ist nunmehr aus den gegebenen Elementen in einem beliebigen Punkte von C die Tangentialebene der Fläche Π zu construiren?"

Es seien A, B, C, D, E die Schnittpunkte der fünf Leitcurven mit einer Tangentialebene w der gegebenen abwickelbaren Fläche Δ. Durch die fünf Punkte wird der Kegelschnitt C bestimmt. Mit seiner Hülfe und vermittelst der Leitcurven sind die Tangentialebenen in A, B, C, D, E construirbar; sie mögen α, β, γ, δ, ε heissen. Die Ebene w berührt Δ längs einer Geraden Q, welche als Generatrix von Δ auftritt. Zur Geraden Q gehört in Bezug auf den Kegelschnitt ein Punkt P als Pol; in ihm berühren die beiden anderen Kegelschnitte die Ebenen von C, welche ausser C auf der Fläche S enthalten sind. Kann man an S in einem beliebigen Punkte C eine Tangentialebene construiren, so ist auch die oben gestellte Aufgabe gelöst; denn S ist der Fläche Π längs des Kegelschnitts umgeschrieben. Um nun jene Tangentialebene zu construiren, construire man zunächst die Durchschnittskante von zweien, über die zu verfügen ist, z. B. von δ und ε. Die Gerade $\overline{\delta\varepsilon}$ schneide w in einem Punkte p, die Ebenen α, β, γ aber in A', B', C'. Construirt man nunmehr auf Q einen Punkt O, so dass die Strahlen OA, OB, OC, Q homographisch den Punkten A', B', C', p entsprechen, so kann man zu jedem Punkte F des Kegelschnitts den Strahl OF verzeichnen und einen Punkt F' auf $\overline{\delta\varepsilon}$ finden, so dass das anharmonische Verhältnis der Punkte A', B', C', F' gleich ist dem der Strahlen OA, OB, OC, OF. Bestimmt man endlich die Ebene, welche den Kegelschnitt in F berührt und durch F' geht, so hat man die obige Aufgabe gelöst und in F die Tangentialebene an die Fläche Π gefunden. Specielle Fälle bilden den Schluss der Arbeit. Schn.

H. Molins. Mémoire sur un système triple de surfaces orthogonales triples. Mém. de Toul. (8) I. 81-98.

Das dreifache Orthogonalsystem, mit welchem sich die Arbeit beschäftigt, entsteht folgendermassen: Sei AB eine beliebige

Raumcurve. Der Ort ihrer Tangenten ist eine abwickelbare Fläche; in dieser bestimme man irgend zwei Systeme orthogonaler geodätischer Linien. Jede dieser Linien ist die Wendungscurve einer abwickelbaren Fläche. Die beiden Systeme abwickelbarer Flächen, welche man so erhält, und das System der Schmiegungsebenen der Curve *AB* bilden ein dreifach orthogonales Flächensystem.

In der Arbeit werden die Gleichungen der Flächen dieses Systems und einige daraus sich ergebende Eigenschaften entwickelt. Die abwickelbare Fläche, deren Wendungscurve *AB* ist, ist, wie sich von selbst versteht, die Fläche der Centra für alle Flächen der ersten und der zweiten Schaar. Zum Schluss werden diejenigen Orthogonalsysteme besprochen, welche bei der Inversion oder Transformation durch reciproke Radien daraus entstehen. A.

R. Hoppe. Ueber die Bedingung, welcher eine Flächenschaar genügen muss, um einem dreifach orthogonalen System anzugehören. Grunert Arch. LXIII. 285-294.

Der Herr Verfasser nimmt die Untersuchung nach den Arbeiten von Cayley, Darboux und Weingarten (s. F. d. M. V. 1873. 374, IX. 1877. 535, IX. 531.) noch einmal auf, weil in der letzten Arbeit die Entdeckung einer Relation, welche Folge der Orthogonalität sein würde, noch von dem Beweise getrennt wird, dass diese Relation auch ausreichende Bedingung für die Orthogonalität ist. Der Verfasser aber will von vornherein die nothwendige und hinreichende Bedingung aufstellen, und zwar in noch einfacherer Form. Ausserdem ergeben sich einige wichtige specielle Resultate.

Es seien x, y, z so als Functionen zweier Parameter u und v gegeben, dass $u =$ const. und $v =$ const. das System der Krümmungslinien der definirten Fläche sind. Es seien ferner x, y, z noch von einem dritten Parameter w abhängig; so hat man drei Flächenschaaren $u =$ const., $v =$ const., $w =$ const., welche orthogonal sind, wenn die Curven $u =$ const., $v =$ const.

rechtwinklige Transversalcurven der Flächen $w = \text{const.}$ sind, und die Curven $u = \text{const.}$ ebenso wie die Curven $v = \text{const.}$ auf jeder Fläche $w = \text{const.}$ Krümmungslinien sind.

Setzt man

$$\frac{dx}{dw} = Np, \quad \frac{dy}{dw} = Nq, \quad \frac{dz}{dw} = Nr,$$

wo p, q, r die Richtungscosinus der Normale der Fläche $w = \text{const.}$ sind, und

$$N = \sqrt{\left(\frac{dx}{dw}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dw}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dw}\right)^2},$$

$$e = \left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2; \quad g = \left(\frac{dx}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dv}\right)^2,$$

so ist die Bedingung:

$$2\frac{d^2N}{du\,dv} = \frac{dlge}{dv}\cdot\frac{dN}{du} + \frac{dlgg}{du}\cdot\frac{dN}{dv}.$$

Als Krümmungsliniensysteme sind alle diejenigen zu verstehen, welche den Bedingungen

$$f = \frac{dx}{du}\cdot\frac{dx}{dv} + \frac{dy}{du}\cdot\frac{dy}{dv} + \frac{dz}{du}\cdot\frac{dz}{dv} = 0,$$

$$F = p\,\frac{d^2x}{du\,dv} + q\,\frac{d^2y}{du\,dv} + r\,\frac{d^2z}{du\,dv} = 0$$

genügen.

Sind die Bedingungen $f = 0$, $F = 0$ erfüllt, so ist die oben aufgestellte Bedingung es ebenfalls. Hieraus ergiebt sich leicht die Folgerung, dass jede Schaar von Ebenen und Kugelflächen einem dreifach orthogonalen System angehört, dass aber die beiden anderen Schaaren nicht vollständig bestimmt sind. Jede andere Flächenschaar aber, wenn sie überhaupt einem Orthogonalsystem angehört, bestimmt das System vollständig. An diese allgemeine Untersuchung wird die speciellere geknüpft, die sämmtlichen Orthogonalsysteme zu finden, denen eine gegebene Kugelschaar angehört. Auch dieses Problem wird in allgemeinster Weise gelöst. A.

O. Röthig. Ueber die durch den Malus'schen Satz definirten Flächen. Borchardt J. LXXXVIII. 22-34.

Die vorliegende Arbeit schliesst sich an den Aufsatz an: „Der Malus'sche Satz und die Gleichungen der dadurch definirten Flächen" l. c. LXXXIV. 231. (F. d. M. IX. 1877, 724). Ein Punkt im Raume wird in drei Parametern α, β, γ dargestellt und die Flächen gleichzeitigen Eintreffens gleichzeitig von einem Punkte ausgehender beliebig oft gebrochener Strahlen durch die Relation $\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2 = 1$ ausgedrückt. Diese wird irgendwie durch zwei Unabhängige σ, τ erfüllt. Dann ist, wie gezeigt wird, das Flächenelement rational in σ, τ. Es werden weiter die Krümmungsmittelpunktsflächen, unabhängig von der Wahl der σ, τ, in α_1, β_1, γ_1 dargestellt. Ferner werden die Krümmungslinien untersucht. Endlich wird eine in der vorigen Abhandlung erwähnte Aufgabe über den Fall, wo gewisse Strahlen gewisse Flächen berühren, ausgeführt.

H.

Sophus Lie. Classification der Flächen nach der Transformationsgruppe ihrer geodätischen Curven. Universitätspr. Christiania.

Ist das Bogenelement einer Fläche auf die Form

$$(1) \qquad ds^2 = F(xy)dx\,dy$$

gebracht, so werden die geodätischen Curven bestimmt durch die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(2) \qquad F\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dF}{dx}\frac{dy}{dx} - \frac{dF}{dy}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

Ist nun F eine willkürliche Function von x und y, so gestattet die Gleichung (2) im Allgemeinen keine infinitesimale Punkttransformation; anders ausgesprochen, es ist in diesem allgemeinen Falle unmöglich den Grössen x und y solche Incremente

$$\delta x = \xi(xy)\delta t, \quad \delta y = \eta(xy)\delta t$$

zu geben, dass jede geodätische Curve in eine ebensolche unendlich benachbarte Curve übergeführt wird.

Es giebt drei verschiedene Flächenclassen, deren geodätische

Curven eine infinitesimale Transformation gestatten. 1) Die erste Classe wird definirt durch die Gleichung

$$F = e^{ax}\Phi(x-y).$$

Jede hierher gehörige Fläche kann auf ∞^1 ihr ähnlichen Flächen abgewickelt werden. 2) Die zweite Classe entspricht der Gleichung

$$F = y\varphi(x) + \Phi(x),$$

wo φ und Φ in der Abhandlung näher bestimmt werden. 3) Die dritte Classe entspricht der Gleichung

$$F = \varphi(x+y) + \Phi(x-y),$$

wobei φ und Φ durch eine Relation verknüpft sind.

Sodann werden alle Flächen bestimmt, deren geodätische Curven mehrere infinitesimale Transformationen gestatten. Gestatten die geodätischen Curven mehr als drei infinitesimale Transformationen, so hat die Fläche constante Krümmung. Die Gleichung

$$F = (x-y)^m$$

bestimmt alle Flächen, deren geodätische Curven zwei conforme infinitesimale Transformationen gestatten. Die Gleichungen

$$F = xy+1, \quad F = x+y$$

bestimmen zwei Classen Flächen mit drei infinitesimalen Transformationen. Zwei infinitesimale Transformationen gestatten die Flächen

$$F = \frac{A}{(x+y)^2} + \frac{B}{(x-y)^2}$$

und einige Rotationsflächen.

Aus dem Obenstehenden fliesst eine rationelle Behandlung der Differentialgleichung der geodätischen Curven in allen Fällen, in denen diese Gleichung eine oder mehrere infinitesimale Transformationen gestattet. Dabei wird nicht, wie bei den entsprechenden Untersuchungen von Liouville, vorausgesetzt, dass die Curven $ds = 0$ schon bestimmt sind. L.

M. Azzarelli. Equazione della linea geodetica con qualche applicazione. Acc. P. N. L. XXXI. 327-341.

Die gewöhnliche Bestimmung der kürzesten Linien auf Flächen wird nach bekannter Weise durch Variationsrechnung hergeleitet, die jedoch der Verfasser, wohl blos wegen verschiedener Bezeichnung, nicht als solche anerkennen will. Es werden die Gleichungen der Kürzesten berechnet auf cylindrischen Flächen und Rotationsflächen. Das einzige, was vielleicht neu sein mag, ist die Rectification der Kürzesten auf dem Rotationsparaboloid.

H.

R. Hoppe. Untersuchungen über kürzeste Linien.
Grunert Arch. LXIV. 60-74.

Wenn auf einer Fläche eine stetige Schaar kürzester Linien gegeben ist, so existirt eine Schaar von Curven, welche zu derselben orthogonal ist. Alle Curven dieser zweiten Schaar haben die Enveloppe der ersten Schaar zur gemeinsamen geodätischen Evolute und werden geodätische Parallelen genannt. Die Binormale einer Curve der ersten Schaar ist Tangente einer Curve der zweiten Schaar. Wenn ferner auf einer Fläche zwei Curvenschaaren die Eigenschaft besitzen, dass die Binormale einer Curve der ersten Schaar Tangente einer Curve der zweiten Schaar ist, so ist die erste Schaar eine Schaar geodätischer Parallelen, die zweite ist diejenige ihrer geodätischen Normalen.

Der Verfasser stellt sich nun das Problem, eine Curve so variiren zu lassen, dass sie die Kürzeste der erzeugten Fläche ist; oder genauer, er sieht x, y, z als Functionen des Bogens u und eines Parameters v an, den er so bestimmt, dass die Curven für jedes v geodätische Linien der erzeugten Fläche werden, während $v =$ const. das System der geodätischen Parallelen liefert. Die Rechnung, welche nach den bekannten Principien des Verfassers über Curventheorie durchgeführt wird, führt zwischen der Krümmung π, der Torsion ϱ und einer unbekannten Function t, welche, wie beiläufig bemerkt wird, die Eigenschaft hat, dass $t\,du\,dv$ das Flächenelement der erzeugten Fläche ist, worauf es indessen für die vorliegende Untersuchung nicht ankommt, zu folgenden Gleichungen:

$$(6)\qquad \frac{d\pi}{dv}+2\varrho\frac{dt}{du}+\frac{d\varrho}{du}t=0,$$

$$(7)\qquad \frac{d\varrho}{dv}-\pi\frac{dt}{du}+\frac{d}{du}\frac{\varrho^2 t-\frac{d^2t}{du^2}}{\pi}=0,$$

welche nach Elimination von t eine Bedingung ergeben, durch welche Krümmung und Torsion der Curven u, sofern sie mit v variiren, von einander abhängig sind. Es zeigt sich, dass diese nothwendige Bedingung auch hinreichend ist, dass also jeder Lösung des aufgestellten Gleichungspaares mindestens eine Fläche entspricht, auf welcher die Curven $u=$ const. geodätische Parallelen, die Curven $v=$ const. Kürzeste sind, so dass $ds^2=du^2+t^2dv^2$ ist, wenn ds das Linienelement auf der Fläche bedeutet.

Da durch Bogen, Krümmung und Torsion die Curve u in sich bestimmt ist, aber nicht ihre Lage, so ist denkbar, dass die Curve verschiedene Flächen erzeugen kann. Es wird die Bedingung hierfür dargestellt und nachgewiesen, dass dieselbe hinreichend ist. Auf specielle Probleme wird die Theorie angewendet, erstens für den Fall $\varrho=0$, wo die Kürzesten ebene Curven sind, ein Fall, der eine besondere Untersuchung nöthig macht. In diesem Falle sind die Gleichungen 6) u. 7) integrabel. Man findet dann, wie sich auch durch directe geometrische Betrachtungen ergiebt, als Auflösung Canalflächen.

Ein anderes Beispiel ist, dass π und ϱ unabhängig von v sind; auch in diesem Falle gelingt die Integration; die Kürzesten sind Schraubenlinien, die erzeugten Flächen Cylinder. A.

A. v. Braunmühl. Ueber Enveloppen geodätischer Linien. Clebsch Ann. XIV. 557-567.

Die Arbeit, deren Inhalt der Hauptsache nach bereits in der vor Kurzem erschienenen Doctordissertation des Verfassers enthalten ist, beschäftigt sich mit den Enveloppen der geodätischen Linien auf Rotationsflächen überhaupt und specieller auf Rotationsflächen zweiten Grades.

Ist y die Rotationsaxe, $y = f(r)$ die Gleichung des Meridians $r^2 = x^2 + z^2$, so lassen sich die geodätischen Linien darstellen durch

$$\varphi = \nu \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r} \sqrt{\frac{1+f'^2}{r^2-\nu^2}}.$$

Dies ist die Polargleichung der Projection der geodätischen Linie auf irgend eine zur Rotationsaxe senkrechte Ebene. Die Curve ist nur reell, wenn $r^2 \gtreqless \nu^2$. Verzweigungspunkte des Integrals sind erstens $r^2 = \nu^2$, zweitens $f' = \infty$, d. h. $\frac{dr}{dy} = 0$, (wenn für diesen Werth r ein wirkliches Maximum oder Minimum hat). An den Verzweigungsstellen muss dr, also auch die Wurzel ihr Vorzeichen wechseln, wenn man nicht rückwärts auf der Curve gehen, sondern sie fortsetzen will. Sind auf der Fläche zwei Parallelkreise $r = \nu$ vorhanden, so oscillirt die geodätische Linie periodisch zwischen ihnen in demjenigen Theil der Fläche, für welchen $r^2 > \nu^2$ ist. Ist dieser endlich, wie beim Ellipsoid, so muss es dazwischen mindestens einen Maximalwerth für r geben und im Allgemeinen zwei Kreise $r = r_0$ (r_0 und r'_0). Ist er unendlich, wie bei den Hyperboloiden, so gehen auch die geodätischen Linien in's Unendliche, können aber als durch's Unendliche geschlossen betrachtet werden. Ein Theil der Curve, welcher von r_0 ausgeht, auf r'_0 endet und dazwischen einen Grenzkreis berührt hat, heisst eine halbe Periode. Ist nur ein Grenzkreis vorhanden, wie beim Paraboloid, so gehen die Linien ohne reelle Periode in's Unendliche. Die Bedingung für die Enveloppen gewinnt der Verfasser, indem er $\frac{d\varphi}{d\nu} = 0$ setzt. Dies ergiebt

$$I = \int_{r_0}^{r} \frac{r dr \sqrt{1+f'^2}}{\sqrt{r^2-\nu^2}^3} = 0,$$

wo das Integral I mit dem Integrale für φ gleich verzweigt ist, aber für $r^2 = \nu^2$ unendlich wird. Der Verfasser weist hierdurch die generelle Realität der Enveloppen nach, indem er sich darauf stützt, dass das Integral I bei einem Durchschreiten der Unstetig-

keitswerthe $r^2 = \nu^2$ mit einem Zeichenwechsel unendlich wird, woraus folgt, dass es periodisch alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft, also auch den Werth Null periodisch annimmt.

Referent möchte bemerken, dass sich dieser Schluss in einer etwas elementareren Form ganz allgemein darstellen lässt, wenn man zunächst die Vieldeutigkeit des Integrals für φ zum Ausdruck bringt. Geht man nämlich auf einer geodätischen Curve von r_0 bis r ohne einen Grenzkreis zu überschreiten, so erhält man

$$\varphi = \varphi_1 = \nu \int_{r_0}^{a} \mp \nu \int_{r}^{a},$$

wobei das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem der betreffende Bogen der geodätischen Linie den Maximalkreis a durchschneidet oder nicht, und wo beide Wurzeln mit gleichen Vorzeichen, etwa beide positiv zu nehmen sind. Wären mehrere Maxima und Minima von r innerhalb der Grenzkreise vorhanden, so würde sich der Ausdruck für φ_1 etwas compliciren, was aber an den weiteren Schlüssen nichts ändert. Für jede Ueberschreitung des Grenzkreises tritt eine halbe Periode zu diesen Werthen hinzu von der Grösse

$$2\nu K(\nu) = 2\nu \int_{\nu}^{a} \frac{dr}{r} \sqrt{\frac{1+f'^2}{r^2-\nu^2}},$$

wo die Wurzel dasselbe Vorzeichen wie oben hat; also ist allgemein

$$\varphi = \varphi_1 + 2n\nu K(\nu),$$

und der Durchschnittspunkt der geodätischen Linie mit einer von demselben Anfangspunkte ausgehenden benachbarten ist bestimmt durch

$$0 = I + 2n(\nu K'(\nu) + K(\nu)),$$

wo der Integrationsweg für I in derselben Weise zerlegt werden kann, wie der für φ_1. Da nun I, wenn man dem r alle möglichen Werthe von ν bis a ertheilt, alle Werthe zwischen $-\infty$ und $+\infty$ annimmt, so lassen sich r und die Vorzeichen der Theilintegrale so bestimmen, dass $I = -2p(\nu K'(\nu) + K(\nu))$ wird, und zwar ist, je nachdem $(\nu K'(\nu) + K(\nu))$ positiv, null oder negativ

ist, der $\pm p^{te}$ Schnittpunkt um mehr als p halbe Perioden, um p halbe Perioden oder um weniger als p halbe Perioden vom ersten Punkt r_0 entfernt. Der Ausdruck $\nu K'(\nu)+K(\nu)$ ist übrigens nichts anderes als ein Periodicitätsmodul des Integrales I.

Der Verfasser discutirt nun die Gestalt der Enveloppen der durch einen Punkt gelegten geodätischen Linien genauer für die verschiedenen Flächen zweiter Ordnung. Beim Rotationsellipsoid schneiden sich zwei benachbarte geodätische Linien vor oder nach Vollendung einer halben Periode, je nachdem es länglich oder abgeplattet ist.

Nimmt man den festen Punkt A auf dem Aequator, so ergiebt sich als Enveloppe eine Curve, welche zwei zu A symmetrische Punkte C und D als Spitzen enthält. (Der Verfasser hat hier, wie überall, nur die von A aus zunächst folgenden Coincidenzpunkte in Betracht gezogen, welche den Werthen $p=\pm 1$ entsprechen; eigentlich entstehen des weitern unzählig viele entsprechende Aeste, die man für $p=\pm 2$, $p=\pm 3$ etc. erhält.)

Der erste Ast erhält noch zwei andere auf dem durch A gehenden Meridian liegende Spitzen. Hierdurch erhält man einen aus vier Zweigen mit vier Spitzen bestehenden Ast.

Lässt man den Punkt A vom Aequator aus auf einem Meridian bis r_0 rücken, so wandern die Spitzen B und C nach der durch A gelegten geodätischen Linie, welche den Parallelkreis r_0 und r_0' berührt, und zwar in die beiden Berührungspunkte mit r_0', welche um eine halbe Periode von A entfernt sind, während die beiden auf dem Meridian liegenden Spitzen demjenigen Pole näher rücken, welcher mit r_0' auf derselben Seite liegt. Je mehr A in den einen Pol rückt, desto mehr zieht sich die Enveloppe auf den andern Pol zusammen, in welchen sie sich im Grenzfalle auflöst.

In ähnlicher Weise wird die Gestaltänderung einer beliebigen Enveloppe untersucht, wenn das Ellipsoid, welches erst länglich war, sein Axenverhältnis ändert und durch die Kugel in ein abgeplattetes übergeht, wobei im Uebergangsfall die Enveloppe ebenfalls in einen Punkt degenerirt.

Ebenso untersucht der Verfasser die Enveloppen auf den

beiden Arten von Hyperboloiden und auf dem Kegel, welcher den Uebergangsfall zwischen beiden Arten bildet.

Als charakteristisch ergiebt sich folgendes. Auf dem zweischaligen, respective einschaligen Hyperboloide schneiden sich die von einem Punkte ausgehenden benachbarten geodätischen Linien vor, respective nach Vollendung einer halben Periode, auf dem Kegel aber mit Vollendung der ganzen.

Das zweischalige Hyperboloid schliesst sich ganz dem Ellipsoid an, da es wie dieses zwei Pole besitzt; doch kann es kommen, dass die Enveloppe ganz auf derjenigen Schale liegt, auf welcher sich der Ausgangspunkt A der geodätischen Linien nicht befindet. Dieser Fall wird von Jacobi in seinen Vorlesungen über Dynamik als ein solcher bezeichnet, in welchem keine Enveloppe existirt, weil nach Jacobi's Auffassung die geodätische Linie nicht als durch's Unendliche geschlossen angesehen wird.

Bei dem einschaligen Hyperboloide besteht eine Enveloppe aus einem zweispitzigen Zuge, dessen Spitzen auf dem Parallelkreise r_0' liegen und dessen vier Aeste sich auf beiden Seiten dem Kehlkreise asymptotisch nähern, nachdem zwei davon durch's Unendliche gegangen sind. Da man aber auf jeder geodätischen Linie, ehe man zum Coincidenzpunkte gelangt, das Unendliche passiren muss, so existiren im Jacobi'schen Sinne keine Enveloppen, da dieser die geodätischen Linien nicht über das Unendliche fortsetzt.

Für den Kegel artet die Enveloppe in einen doppelt gedachten Kreisbogen aus, der dem dem Kreise r_0 gleichen Parallelkreise r_0' angehört, und die geodätischen Linien gehen zur einen Hälfte durch den einen, zur andern Hälfte durch den andern Endpunkt desselben.

Zum Schluss betrachtet der Verfasser das Paraboloid und den Cylinder und gelangt zu dem Resultat, dass auf dem Paraboloid jede Enveloppe in den unendlich entfernten Kreis ausartet, während auf dem Cylinder überhaupt keine Enveloppe existirt.

Die letztere Behauptung hat indessen Herr von Mangoldt vor Kurzem in einer Abhandlung: „Ueber diejenigen Punkte auf positiv

gekrümmten Flächen, welche die Eigenschaft haben, dass die von ihnen ausgehenden geodätischen Linien nie aufhören kürzeste zu sein" (Borchardt J. XCI. p. 23—53) als irrthümlich nachgewiesen.

A.

R. Hoppe. Ueber die kürzesten Linien auf den Mittelpunktsflächen. Grunert Arch. LXIII. 81-93.

Jeder Krümmungslinie einer Fläche entspricht eine kürzeste Linie auf der Mittelpunktsfläche (Fläche der Hauptkrümmungscentra). Dadurch ist für jeden Punkt der Mittelpunktsfläche eine kürzeste Linie vor allen anderen hindurchgehenden ausgezeichnet, und man kann fragen, welche Linien auf der Urfläche entsprechen überhaupt den Kürzesten auf der Mittelpunktsfläche. Da jedem Punkte der Urfläche zwei Punkte der Mittelpunktsfläche entsprechen, so erhält man zwei Liniensysteme auf der Urfläche, deren jedes eine Schaar von Krümmungslinien in sich begreift. Die Aufgabe kommt darauf hinaus, die Differentialgleichung der Kürzesten auf der Mittelpunktsfläche in Elementen der Urfläche aufzustellen und zu integriren. Diese Differentialgleichung ist von der zweiten Ordnung und im Allgemeinen nicht linear.

In den Fällen, wo sie linear wird, genügt eine Particularlösung (mit Ausschluss der Krümmungslinie selbst) zur Darstellung des ganzen Systems.

Die Differentialgleichung wird in folgender Gestalt gewonnen. Sind die Coordinaten xyz eines Punktes der Urfläche so als Functionen von u und v gegeben, dass die Parametercurven $u=$ const. und $v=$ const. die Krümmungslinien derselben sind, ist weiter

$$e=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,\quad g=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$E=p\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+q\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}+r\frac{\partial^2 z}{\partial u^2},\quad G=p\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}+q\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}+r\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

wo p, q, r die Richtungscosinus der Normalen bedeuten, dann sind die Krümmungsradien

$$\varrho=\varrho_1=\frac{e}{E};\quad \varrho_2=\frac{g}{G}.$$

Setzt man ferner

$$h = g\left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_1}\right)^2,$$

$$U = \frac{\partial}{\partial u} \log \frac{\partial \varrho}{h \partial u},$$

$$V = \frac{2\frac{\partial \varrho'}{\partial u} - \frac{3}{2}\varrho' \frac{\partial h}{h \partial u}}{\frac{\partial \varrho}{\partial u}} - \frac{h'}{2h},$$

$$W = \frac{\varrho'' - \frac{\varrho' h'}{2h}}{\frac{\partial \varrho}{\partial u}} - \frac{1 + \frac{\varrho'^2}{h}}{2\left(\frac{\partial \varrho}{\partial u}\right)^2} \frac{\partial h}{\partial u},$$

wo die Accente Differentiationen nach v bedeuten, dann muss die Differentialgleichung der Linien der Urfläche der geodätischen derjenigen Mittelpunktsfläche entsprechen, deren Abstand von der Urfläche längs der Normale ϱ ist,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial v^2} + U\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)^2 + V\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right) + W = 0,$$

wobei die Krümmungslinien v = const. ausgeschlossen sind.

Die Gleichung wird ohne Transformation linear, wenn $U = 0$ und V und W Functionen von v allein sind, für welchen Fall die Untersuchung weiter durchgeführt wird. Ein anderer Fall, in welchem die Untersuchung sich durchführen lässt, ist in der folgenden Abhandlung besprochen. A.

R. Hoppe. Abwickelbare Mittelpunktsflächen. Grunert Arch. LXIII. 205-215.

Es wird die Bedingung gesucht, welche eine Fläche A zu erfüllen hat, damit eine ihrer beiden Mittelpunktsflächen geradlinig sei.

Der Verfasser beweist folgende Sätze:

Eine Fläche A hat dann und nur dann eine abwickelbare Mittelpunktsfläche B, wenn eine der beiden Schaaren von Krümmungslinien aus kürzesten Linien besteht.

Die eine Mittelpunktsfläche einer nicht abwickelbaren Fläche ist dann und nur dann abwickelbar, wenn die der andern entsprechenden Krümmungslinien der Urfläche Kürzeste sind.

Untersucht man hiernach die Bedingung genauer unter der Voraussetzung, dass A nicht abwickelbar ist, so ergiebt sich, dass die Untersuchung sich auf zwei Fälle erstrecken muss, da die Gleichung, welche die Hauptkrümmungen von B bestimmt, in zwei Gleichungen verschiedener Form sich auflöst, von denen entweder die eine oder die andere die erzeugende Gerade von B darstellen müsste. Untersucht man aber die beiden Fälle genauer, so ergiebt sich, dass die nothwendige Bedingung in keinem Falle erfüllbar ist.

Hieraus folgt, dass B nur dann abwickelbar sein kann, wenn A es ist; in diesem Falle ist es aber stets so.

Man kann also sagen: Nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine Fläche A eine abwickelbare Mittelpunktsfläche habe, ist, dass sie selbst abwickelbar ist.

Weiter ergiebt sich, dass jede abwickelbare Fläche Mittelpunktsfläche eines doppelt unendlichen Systems abwickelbarer Flächen ist, die aber in Schaaren paralleler Flächen zerfallen.

Im Anschluss an die vorige Arbeit wird die Frage nach denjenigen Curven auf einer abwickelbaren Fläche beantwortet, denen auf der Mittelpunktsfläche Kürzeste entsprechen. Schliesslich werden noch die Beziehungen der Gratlinie (welche sich selbst entspricht) und der Krümmungslinie von A zu den entsprechenden Gebilden auf B untersucht. A.

L. Bianchi. Ricerche sulle superficie elicoidali.
Battaglini G. XVII. 9-40.

Bildet man auf einer Fläche S ein beliebiges System Kürzester und schneidet deren Tangenten normal durch ein System paralleler Flächen Σ, so ist S die „Evolute“ (Mittelpunktsfläche) von Σ. Eine Evolute besteht aus 2 Schalen, die „Complementarflächen“ heissen. Die Complementarfläche S' zu S findet man als Ort des Endpunkts jener Tangente, auf der man eine Strecke

gleich dem Radius der geodätischen Krümmung der orthogonalen Trajectorie abschneidet. Von dieser Construction ausgehend werden folgende Sätze bewiesen: Deformirt man eine Rotationsfläche, so besteht die Reihe der Complementarflächen derselben aus Flächen, abwickelbar auf einer und derselben Rotationsfläche. Die Evolute eines „Helikoids" ist ein Helikoid von derselben Axe, desgleichen die Evolvente und die Complementarfläche. Das complementare Helikoid eines „liniirten Helikoids" (Ort einer Geraden, die mit einer Axe einen constanten Winkel bildet und axial und rotirend proportional fortschreitet) ist gleichfalls liniirt. Im besonderen Falle ist das Helikoid kleinste Fläche; die Evolute eines solchen ist ein Helikoid, erzeugt von einer Curve 4^{ten} Grades mit dem unendlich fernen Punkt der Axe als Doppelpunkt. Die zwei Curven

$$x = -m \frac{\sin i\omega}{i}; \quad y = \pm m \cos i\omega; \quad z = -m\omega$$

erzeugen bei derselben Helikoidalbewegung des Parameters m in Bezug auf die z-Axe erstere eine Schraubenfläche, letztere das Complementarhelikoid von constanter negativer Krümmung. Das Complementarhelikoid des Helikoids von constanter negativer Krümmung, welches zum Profil eine „Tractrix" hat, ist abwickelbar auf der Rotationsfläche, deren Meridian die logarithmische Curve ist. Das Helikoid von constanter negativer Krümmung, welches einen Schnitt („passo") gleich der Peripherie für den Radius gleich dem Abstande der Spitze der Tractrix von der Asymptote hat, hat zur Complementarfläche und zur Fläche der geodätischen Centra der Tractricen zwei identische Helikoide, welche aus einander hervorgehen durch Rotation zweier rechten Winkel um die Axe. Durch Biegung eines sphärischen Streifens zwischen zwei Meridianen, bis letztere zusammenfallen, werde eine Rotationsfläche gebildet. Giebt man dann dem Meridian der letztern eine passende helikoidale Bewegung um die Axe, so wird ein Helikoid, abwickelbar auf einer Rotationsfläche constanter mittlerer Krümmung, erzeugt. H.

T. C. Lewis. On the twist of a bar. Messenger (2) IX. 44-45.

Einfache Methode zur Aufstellung des Ausdrucks für die „Drillung“ eines schmalen Oberflächenstreifens. Glr. (O.)

P. Appell. Sur une propriété caractéristique des hélices. Grunert Arch. LXIV. 19-23.

Es wird eine vom laufenden Punkt einer Curve ausgehende Gerade von constanter Richtung gegen das Trieder von Tangente, Hauptnormale, Binormale gesucht, die eine abwickelbare Fläche erzeugt. Es ergiebt sich, dass im allgemeinen die Tangente die einzige ist, nur die Curven von constantem Verhältnis der Krümmung und Torsion (hélices) machen eine Ausnahme. Hier bilden die Geraden, die der Aufgabe genügen, einen Kegel zweiten Grades. Die Gratlinie der erzeugten Fläche ist wieder eine Helix. Der Coincidenzpunkt der Geraden bewegt sich relativ zum Trieder auf einem (mitbewegten) Rotationscylinder, welcher denjenigen Cylinder, den die Urcurve umwindet, in der Tangente der letzteren berührt. Der Radius der Basis des Rotationscylinders ist die Hälfte des Krümmungsradius der Basis des ersteren. Einige specielle Folgerungen ergeben sich für den Fall, wo die Helix in ihre Basis degenerirt. H.

Aoust. De la courbe lieu des positions des centres de courbure d'une courbe gauche, après son développement sur une ligne droite. C. R. LXXXVIII. 768-771.

Wickelt man eine Curve E so auf einer Geraden ab, dass das Dieder zweier consecutiver Schmiegungsebenen unverändert bleibt, so erzeugt ihr Krümmungsmittelpunkt die Curve C_1, und der Endpunkt des Krümmungsradius, wenn man seinen Anfang durch Parallelverschiebung in einen festen Punkt verlegt, die Curve C_2. Es gelten dann folgende Sätze. Die entsprechenden Tangenten von C_1 und C_2 haben relativ zum begleitenden Axensystem (axes mobiles, Tangente, Haupt- und Binormale) von E gleiche Richtung. Ihre entsprechenden Bogen sind gleich. Die geodätische Normale von C_1 und die geodätische Polarnormale

von C_2 sind gleich, desgleichen die Tangenten dieser beiden Curven. Trägt man auf der rectificirenden Geraden vom Scheitel des Winkels zwischen ihr und der Binormale eine Strecke gleich der geodätischen Normale und eine zweite Strecke derart ab, dass nach ihrer Projicirung auf die Binormale und von dieser wieder auf die rectificirende Gerade die erste Strecke erhalten wird, so ist die doppelte letztere Strecke das harmonische Mittel der geodätischen Krümmungsradien von C_1 und C_2. Errichtet man auf der geodätischen Normale in ihrem Endpunkt ein Loth bis zum Durchschnitt mit der Binormale und in diesem Punkte ein Loth auf der Binormale bis zum Durchschnitt mit der rectificirenden Geraden, so ist der doppelte Abstand des letzten Endpunkts und ersten Fusspunkts das harmonische Mittel zwischen den Radien normaler Krümmung von C_1 und C_2. Die Beweise sind nur kurz angedeutet; doch schwieriger als diese ist wohl die Feststellung des Sinnes der Sätze selbst und der vorgängigen Anordnung aus dem so stark abgekürzten Ausdruck der Mittheilung. H.

R. Hoppe. Ueber die Bedingung, unter welcher eine variabele Gerade Hauptnormale einer Curve sein kann, und verwandte Fragen. Grunert Arch. LXIII. 360-380.

Der Herr Verfasser spricht die in der Ueberschrift gestellte Frage zu Anfang der Abhandlung eingehender so aus: „Eine variable Gerade sei dargestellt in der Form

$$(1) \qquad x_1 = x-au; \quad y_1 = y-bu; \quad z_1 = z-cu,$$

wo x, y, z die Coordinaten ihres Ausgangspunktes, x_1, y_1, z_1 die eines mit u variirenden Punktes auf ihr, a, b, c ihre Richtungscosinus bezeichnen. Sie variire mit einem Parameter ν, als dessen Functionen x, y, z, a, b, c zu denken sind, und zwar sei ν bestimmt durch

$$d\nu^2 = da^2+db^2+dc^2.$$

Macht man u zur Function von ν, so beschreibt der Punkt $(x_1 y_1 z_1)$ eine Curve s_1. Es ist zu untersuchen, unter welchen Bedingungen eine Function u existirt, die so beschaffen ist, dass die Gerade (1) Hauptnormale von s_1 wird."

Im weiteren Verlauf wird die Frage behandelt: „Welche Bedingung hat die Curve s zu erfüllen, damit eine mit ihrem begleitenden Axensystem in gegebener fester Verbindung stehende Gerade in einer andern gegebenen festen Verbindung mit dem begleitenden Axensystem einer andern Curve s_1 stehen kann?" Das Nähere ist in der Abhandlung selbst nachzusehen.

Mz.

C. L. Landré. Een woord over de omhullende van een stelsel kromme lijnen. Nieuw. Arch. V. 205-208.

Einige Bemerkungen über die Einhüllenden eines Systems von Curven, nach Anleitung der Dissertation von Mounier über die Methode Lagrange's zur Bestimmung der singulären Lösungen von Differentialgleichungen (siehe F. d. M. IX. 1877. 222). Der Verfasser behandelt den besonderen Fall, dass die Gleichung der Curven, deren Einhüllende bestimmt werden soll, nach der Constante gelöst ist.

G.

Aoust. Intégrales des courbes dont les développantes par le plan et les développées par le plan sont égales entre elles. Bull. S. M. F. VII. 143-154.

Evolvente und Evolute durch die Ebene nennt nach Vorgang Lancret's der Verfasser die Einhüllende der Krümmungsaxe (oder, wie es hier heisst, die Gratlinie der Einhüllenden der Normalebene) und deren inverse Curve. Er stellt sich die Aufgabe, eine Curve C_1 so zu bestimmen, dass ihre Evolvente C_2 und ihre Evolute C durch die Ebene einander „gleich" werden. Die ersten Ansätze zeigen, dass hiermit nicht blosse Längengleichheit gemeint sein kann. Erwägt man aber, dass C und C_2 in den entsprechenden Punkten bedingungslos gleiche Tangentialrichtung haben, so erhellt, dass die Längengleichheit $ds = ds_2$ die Congruenz zur Folge haben muss, dass mithin die Zweideutigkeit sich hebt. An Identität oder Deckung von C und C_2 ist deshalb nicht zu denken, weil sonst $\mu = 0$ einzige Lösung der hier fol-

genden Gleichung gewesen wäre. Die geforderte Beziehung der Curven ist also die, dass x_2-x, y_2-y, z_2-z constant sind. Auf die Curve C übertragen, stellt sie sich in folgender Form dar:

$$(4) \qquad \frac{d^3\mu}{d\omega^3} - \frac{\psi'}{\psi}\frac{d^2\mu}{d\omega^2} + (1+\psi^2)\frac{d\mu}{d\omega} - \frac{\psi'}{\psi}\mu = 0,$$

und zwar sind, um auch die übrigen Bezeichnungen aufzuführen, $d\varepsilon$, $d\omega$ die Contingenzwinkel der Tangente und Krümmungsaxe,

$$\psi = \frac{d\varepsilon}{d\omega}, \quad \psi' = \frac{d^2\varepsilon}{d\omega^2}, \quad \varrho = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}, \quad \mu = \frac{d\varrho}{d\omega},$$

$d\sigma$ Bogenelement, mithin ϱ Krümmungsradius. Es wird nun bemerkt, dass ψ unbestimmt bleibt, und dass dann die Grösse μ durch dieselbe Gleichung (4) bestimmt ist, welche auch den Richtungscosinus der Binormale bestimmt. Die Lösung der Gleichung (4) aber „übersteige die Kräfte der Analysis". Das letztere ist jedoch nicht der Fall. Die Aufgabe verlangt nicht, dass ψ beliebig gegeben, sondern nur, dass die Curve die allgemeinst mögliche sei. Statt der willkürlichen ψ braucht man nur irgend eine von σ unabhängige Bestimmungsgrösse der Curve, z. B. den Richtungscosinus der Binormale $\cos(\nu, x)$, woraus alle übrigen durch Differentiationen und Quadraturen hervorgehen, als willkürliche Function von ω einzuführen, den allgemeinsten Werth des Richtungscosinus der Binormale $=\mu$ zu setzen, daraus $\varrho = \int \mu d\omega$, $d\sigma = \varrho d\varepsilon$ zu berechnen, woraus dann die Coordinatenwerthe

$$x = \int d\sigma \cos(\tau, x); \quad y = \int d\sigma \cos(\tau, y); \quad z = \int d\sigma \cos(\tau, z)$$

folgten. Statt dessen betrachtet der Verfasser die Lösung der Aufgabe als unabhängig von der vorgängigen Integration der „Resolvente" (4), behandelt zunächst dieses Problem, das im Grunde mit der Aufgabe nichts zu thun hat, und bespricht die Reductionen der Gleichung. Ein erstes Integral bietet sich in irrationaler Form dar, auf das man schon bei Entwickelung der Gleichung geführt wird. Ausserdem wird erwähnt, ohne darauf zu reflectiren, dass sich dieselbe auf eine lineare Gleichung zweiter Ordnung, zuerst entwickelt in Crelle J. LX. 182, redu-

ciren lässt, und dass der Verfasser unabhängig davon die Existenz einer solchen Gleichung durch geometrische Betrachtungen in seiner „Analyse des courbes dans l'espace“ bewiesen hat. Er setzt nun gemäss Gleichung (4) das Integral aus drei Speciallösungen zusammen, legt eine derselben hypothetisch zu Grunde und berechnet daraus, grossentheils mit Hülfe der irrationalen Integralgleichung, alle noch zu bestimmenden Grössen bis zu den Coordinatenwerthen. Es folgen dann specielle Anwendungen zuerst auf den Fall $\psi = 2\lambda\mu$ (λ const.), dann auf den eines constanten ψ. Zuletzt wird die Aufgabe dahin verallgemeinert, dass C und C_2 einander ähnlich sein sollen. Die „Resolvente“ (4) bekommt nur im letzten Term einen constanten Factor hinzu. Anwendung wird gemacht auf constantes ψ. H.

N. Salvatore-Dini. Sul genere delle curve gobbe. Rend. di Nap. XVIII. 133-136.

B. Theorie der algebraischen Flächen und Raumcurven.

L. Saltel. Détermination du nombre des points doubles d'un lieu défini par des conditions algébriques. C. R. LXXXVIII. 329-331.

Siehe Abschn. VIII. Cap. 5. C. p. 467.

F. Studnička. Ueber die Gleichung der Schmiegungsebene. Prag. Ber. 1878. 37-41.

Für den Fall, dass eine Curve durch zwei algebraische, insbesondere homogene Gleichungen bestimmt ist, wird, indem man eine Coordinate zur Unabhängigen macht, die einfachste Form der Gleichung der Osculationsebene entwickelt. H.

Laguerre. Sur quelques propriétés des foyers des courbes algébriques et des focales des cônes algébriques. Nouv. Ann. (2) XVIII. 57-67.

Herr Laguerre giebt hier von seinem Satze (Bull. S. M. F. III. p. 174, s. F. d. M. VII. 1875. p. 413): „Die Polare eines Punktes in Bezug auf die gemeinsamen Tangenten zweier Curven ist zugleich die Polare in Bezug auf die Verbindungslinien der nicht auf der nämlichen Curve liegenden Paare von Berührungspunkten der von diesem Punkte aus an die Curve gezogenen Tangenten.“ Anwendungen auf verschiedene specielle Curven, so z. B. auf die Hypocycloide mit drei Spitzen, auf confocale Kegelschnitte und Kegel zweiten Grades, sowie auf einen von Liouville herrührenden Satz. V.

W. Spottiswoode. On the twenty-one coordinates of a conic in space. Proc. L. M. S. X. 185-196.

Nach Analogie der Betrachtungen, durch die man dazu geführt wird, einer Geraden im Raume sechs homogene Coordinaten zuzuweisen, zwischen denen eine quadratische Identität besteht, ergeben sich für einen Kegelschnitt 21, resp. 18 solche Zahlen. Zwischen diesen besteht ein umfangreiches System von Identitäten, durch welche dieselben auf acht von einander unabhängige zurückgeführt werden können. Zugleich wird die Bedingung abgeleitet, unter welcher zwei Kegelschnitte im Raume sich schneiden. In einem Zusatze macht Herr. Cayley darauf aufmerksam, dass die 21 Coordinaten die Coefficienten der Gleichung des Kegelschnittes in Liniencoordinaten sind.

V.

L. Cremona. Sulle superficie e le curve che passano pei vertici d'infiniti poliedri formati da piani osculatori di una cubica gobba. Rend. Ist. Lomb. (2) XII. 347-359.

Zum Beweise der Steiner'schen Sätze über einem Kegelschnitt eingeschriebene Polygone hatte Herr Darboux (Sur une

classe remarquable de courbes Mém. de Bord. IX. p. 183 ff., s. F. d. M. V. 1873. p. 399) als Coordinaten eines Punktes die Parameter der von demselben an einen festen Kegelschnitt gehenden Tangenten eingeführt. Herr Cremona erweitert diese Betrachtung für den Raum. Bekanntlich sind die Parameter der drei Schmiegungsebenen der Raumcurve dritter Ordnung

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \omega^3 : 3\omega^2 : 3\omega : 1,$$

welche durch den Punkt $x_1\, x_2\, x_3\, x_4$ gehen, die Wurzeln $\omega_1\, \omega_2\, \omega_3$ der Gleichung:

$$x_4\omega^3 - 3x_3\omega^2 + 3x_2\omega - x_1 = 0,$$

also:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \omega_1\omega_2\omega_3 : \omega_2\omega_3 + \omega_1\omega_3 + \omega_1\omega_2 : \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 : 1.$$

Eine Gleichung n^{ten} Grades $f(\lambda_1 \lambda_2 \omega) = 0$ in Bezug auf ω mit zwei willkürlichen Parametern λ_1, λ_2 bezeichnet daher den Ort der Punkte, deren drei Schmiegungsebenen derselben genügen, wenn man aus

$$f(\lambda_1 \lambda_2 \omega_1) = 0, \quad f(\lambda_1 \lambda_2 \omega_2) = 0, \quad f(\lambda_1 \lambda_2 \omega_3) = 0$$

die $\lambda_1\, \lambda_2$ eliminirt. Sind die $\lambda_1\, \lambda_2$ linear in f enthalten, so entsteht eine in den ω symmetrische Gleichung $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades, d. h. eine Oberfläche $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung. Dieselbe ist gleichzeitig der Ort der Ecken von ∞^2 vollständigen Polyedern, deren n Ebenen die Curve osculiren. Da drei solche Polyeder die Gleichung der Fläche bestimmen, so folgt: Die Ecken von drei vollständigen n-flächigen Polyedern, deren Ebenen Schmiegungsebenen der R_3 sind, liegen auf einer Fläche $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche die Ecken von ∞^2 anderen analogen Polyedern enthält. Herr Cremona erläutert dann mit Hülfe eines anderen Satzes, der ebenfalls eine Verallgemeinerung eines Darboux'schen ist, dass diese Fläche construirt wird, wenn man sie durch alle $\frac{n.(n-1).(n-2)}{1.2.3}$ Ecken des ersten, durch die $\frac{(n-1).(n-2)}{1.2}$ in einer Ebene gelegenen des zweiten, endlich durch die $n-2$ auf einer Kante des dritten befindlichen hindurchlegt. V.

E. d'Ovidio. Studio sulle cubiche gobbe mediante la notazione simbolica delle forme binarie. Battaglini G. XVII. 310-338.

Siehe Abschn. II. Cap. 2. pag. 88.

C. Raumgebilde ersten, zweiten und dritten Grades.

M. Azzarelli. Applicazione del discriminante nullo alla geometria. Acc. P. N. L. XXX. 290-302.

Es wird die Gleichung der Einhüllenden einer Geraden, bezw. Ebene, deren Abstände von zwei festen Punkten eine constante Summe, Differenz, Product haben, durch Nullsetzung einer Functionsdeterminante (Discriminante) hergeleitet. H.

L. Lévy. Exposition des premières propriétés des surfaces du second degré. N. C. M. V. 276-278, 321-323, 348-350.

Mn.

Th. Reye. Synthetische Geometrie der Kugeln und linearen Kugelsysteme. Mit einer Einleitung in die analytische Geometrie der Kugelsysteme. Leipzig. Teubner.

Siehe Abschn. VIII. Cap. 5 B. p. 439.

Mathematische Modelle. Fadenmodelle von Flächen zweiter Ordnung, dargestellt durch Seidenfäden in Messinggestellen. (Vierte Serie.) L. Brill. Darmstadt.

Die eleganten Modelle von geradlinigen Flächen zweiter Ordnung, welche Olivier für die Sammlung des Conservatoire des arts et métiers in Paris hat anfertigen lassen, von denen jedoch nur wenige Copien verbreitet sind, dienten der vorliegenden

Sammlung zum Muster. Dieselbe enthält fünf Modelle: das einschalige Hyperboloid mit Asymptotenkegel, das hyperbolische Paraboloid; ferner zwei bewegliche Hyperboloide, welche durch Drehung eines der gegenüberstehenden Ringe, an denen die Fäden befestigt sind, in Grenzlagen (Kegel, Cylinder) überführbar sind, wo denn bei nicht paralleler Lage der Ringe Regelflächen vierter Ordnung mit leicht erkennbarer Strictionslinie entstehen; endlich ein bewegliches Paraboloid, in ein gleichseitiges Viereck einbeschrieben, das durch Drehung um eine Axe ebenfalls in Grenzlagen (Ebene und Doppelebene) überführbar ist.

Bl.

J. Casey. On the equation of circles. Trans. of Dublin 1879.

Siehe Abschn. IX. Cap. 2. D. p. 508.

Souillart. Observation relative à l'article de M. Sourander. Borchardt J. LXXXVII. 220-222.

Herr Sourander hatte in einem Aufsatz: Sur les sections circulaires des surfaces du second ordre (Borchardt J. LXXXV. 339-344, siehe F. d. M. X. 515) behauptet, dass die von ihm aufgestellten Formeln einfacher als die früheren seien. Herr Souillart bemerkt, dass sie bis auf einen geringen Unterschied mit ihnen übereinstimmen und leicht daraus hergeleitet werden können. Er erkennt aber den Vorzug der Methode des Herrn Sourander an; alsdann zeigt er einen noch einfacheren Weg, zu derselben Zerlegung zu gelangen, und weist auf eine elegante Methode des Herrn Bauer hin, durch welche sich der Ausdruck, um welchen es sich handelt, in eine Summe von sechs Quadraten zerlegen lässt.

A.

M. Azzarelli. Di alcune linee tracciate sul cilindro retto a base circolare. Acc. P. N. L. XXX. 1-44.

Es werden einige Sätze und Aufgaben der Geometrie auf

der geraden Kreiscylinderfläche behandelt. Sie beziehen sich auf die Gerade, die Parabel, den Kreis und die Ellipse, von der Ebene auf den Cylinder gewickelt. Ueber die Darstellung ist erstens zu bemerken, dass zur Rectification und Quadratur der Curven eine Rechnung ausgeführt wird, die mit geringer Zeichenänderung sich als eine Geometrie der Ebene zu erkennen giebt, und doch das mit letzterer übereinstimmende Resultat jedesmal als überraschende Leistung verkündigt wird; zweitens, dass auch in den wesentlich der Geometrie des Raumes zugehörenden Fragen, nämlich Krümmung, Torsion, Krümmungsmittelpunkt u. s w., die speciell getheilte Behandlung ganz unnöthig war. H.

Anonyme. Solution d'une question (1270). Nouv. Ann (2) XVIII. 466-468.

Die sechs durch einen Punkt zu einem Ellipsoid gezogenen Normalen liegen bekanntlich auf einem Kegel zweiten Grades. Es wird gesucht der Ort der Scheitel dieses Kegels, so dass die verschiedenen Kegel dieselben cyklischen Ebenen haben. Es ergiebt sich für diesen Ort ein Durchmesser des betrachteten Ellipsoids. O.

L. Bourguet. Solution d'une question de concours. Nouv. Ann. (2) XVIII. 170-172.

Gegeben ist ein Ellipsoid und ein Punkt A. Man soll einen Punkt B finden, der so beschaffen ist, dass, wenn man durch diesen Punkt eine Ebene P legt, die Gerade AB stets die eine der Axen des Kegels ist, der A zum Scheitel und den Schnitt des Ellipsoids durch die Ebene P zur Basis hat. Dem folgen zwei weitere sich anschliessende Fragen. O.

Wolstenholme. Solution of a question (5854). Educ. Times XXXII. 28-30.

Von einem festen Punkt werden Lothe gefällt 1) auf drei conjugirte Durchmesser, 2) auf drei conjugirte Diametralebenen

eines gegebenen Ellipsoids. In beiden Fällen geht die Ebene durch den Fuss der Lothe durch einen festen Punkt, welcher auf der Normale liegt, die durch den gegebenen Punkt zu dem durch denselben gehenden ähnlichen, concentrischen und mit dem gegebenen Ellipsoid ähnlich gelegenen Ellipsoid geht. Der Beweis ist analytisch. O.

Nash, F. Wertsch. Solutions of a question (5769). Educ. Times XXXII. 68-69.

Beweise des bekannten Satzes: Eine Ebene, die von einem gegebenen Ellipsoid ein gegebenes Volumen abschneidet, umhüllt ein ähnliches Ellipsoid. O.

E. Lucas. Problème sur l'ellipsoide. Nouv. Ann. (2) XVIII. 304-306.

Den geometrischen Ort der Eckpunkte derjenigen Tetraeder zu finden, deren Höhen sich in einem Punkte schneiden, und deren Seitenflächen ein Ellipsoid in den Fusspunkten der Höhen berühren.

Die Entwickelung stützt sich auf einen Satz von Desboves. Wenn man die sechs Fusspunkte der Normalen, welche sich von einem beliebigen Punkte auf das Ellipsoid

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1=0$$

fällen lassen, in zwei Gruppen zu je dreien ordnet und die Pole der durch je eine Gruppe gelegten Ebenen mit $x\,y\,z$ und $x_1\,y_1\,z_1$ bezeichnet, so ist

$$xx_1=-a^2,\quad yy_1=-b^2,\quad zz_1=-c^2.$$

Ist nun $x_0 y_0 z_0$ der Berührungspunkt einer Seitenfläche des Tetraeders, xyz der gegenüberliegende Eckpunkt, so muss, da die Verbindungslinie Normale in $x_0\,y_0\,z_0$ ist,

$$\text{(I.)}\qquad \frac{a^2(x-x_0)}{x_0}=\frac{b^2(y-y_0)}{y_0}=\frac{c^2(z-z_0)}{z_0}=\lambda$$

sein. Da aber der Punkt $x\,y\,z$ der Pol derjenigen Ebene ist,

welche durch die Fusspunkte der drei andern Höhen gelegt ist, so folgt aus dem obigen Satze unmittelbar, dass der Punkt $-\frac{a^2}{x}, -\frac{b^2}{y}, -\frac{c^2}{z}$ auf der Tangentialebene von $x_0 y_0 z_0$ liegt; also ist

$$\text{(II.)} \qquad \frac{x_0}{x} + \frac{y_0}{y} + \frac{z_0}{z} + 1 = 0.$$

Berechnet man $x_0 y_0 z_0$ aus (I.) und setzt die Werthe in (II.) und in die Gleichung

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1,$$

so erhält man

$$\frac{a^2}{a^2+\lambda} + \frac{b^2}{b^2+\lambda} + \frac{c^2}{c^2+\lambda} + 1 = 0,$$

und

$$\frac{a^2 x^2}{(a^2+\lambda)^2} + \frac{b^2 y^2}{(b^2+\lambda)^2} + \frac{c^2 z^2}{(c^2+\lambda)^2} = 1.$$

Der geometrische Ort besteht demnach aus drei reellen, dem gegebenen concentrischen Ellipsoiden. A.

A. Migotti. Ueber die Strictionslinie des Hyperboloids als rationale Raumcurve vierter Ordnung. Wien. Ber. LXXX.

Unter dem Centralpunkt der Erzeugenden einer geradlinigen Fläche versteht man nach Chasles denjenigen Punkt, in welchem die zur consecutiven Erzeugenden parallele Tangentialebene auf der Fläche senkrecht steht. Dieser Punkt ist zugleich der Punkt, in welchem die Erzeugende den kürzesten Abstand von der consecutiven hat, und er ist ferner Centrum derjenigen quadratischen Involution, welche auf der Erzeugenden gebildet wird von den Berührungspunkten der Tangentialebenen einerseits und von denjenigen Punkten andererseits, wo dieselben Ebenen senkrecht zur Fläche stehen. Der Ort dieser Centralpunkte heisst die Strictionslinie der Fläche. Für das Hyperboloid stellte Chasles dieselbe dar als Durchschnitt des Hyperboloides selbst

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

mit dem Kegel vierter Ordnung

$$\frac{a^6(b^2+c^2)}{x^2} + \frac{b^6(c^2+a^2)}{y^2} - \frac{c^6(a^2+b^2)}{z^2} = 0.$$

Die Durchschnittscurve ist eine Raumcurve achten Grades, welche aber aus zwei symmetrischen Theilen besteht, deren jeder die Strictionslinie für die eine der beiden Schaaren enthält.

Trotzdem hielt Chasles die Curve für irreductibel. Der Verfasser beweist nun zunächst aus allgemeinen Gesetzen, dass sie reductibel sein muss, und stellt dann die Coordinaten des einen Theils der Curve durch einen Parameter in folgender Weise rational dar.

Setzt man

$$A = a^2(b^2+c^2), \quad B = b^2(c^2+a^2), \quad C = c^2(a^2+b^2)$$

und nennt die Coordinaten eines Punktes $\frac{x}{w}$, $\frac{y}{w}$, $\frac{z}{w}$, so ist

$$\begin{aligned} x &= a(B+C)(1-t^4) \\ y &= 2bBt(1+t^2) \\ z &= \pm 2cCt(1-t^2) \\ w &= B(1+t^2)^2+C(1-t^2)^2, \end{aligned}$$

wo das positive Vorzeichen in der dritten Gleichung für die Strictionslinie der einen, das negative für die der andern Schaar gilt.

Der Parameter t hat folgende Bedeutung. Es ist $t = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, wo α die excentrische Anomalie desjenigen Punktes der Kehlellipse bedeutet, durch welchen die zum Strictionspunkte gehörende Erzeugende geht. Den Werthen $t = 0$, $t = \infty$, $t = \pm 1$, $t = \pm i$ entsprechen die Scheitel der Fläche, durch welche die Strictionslinie hindurchgeht. Die Strictionslinie ist, da sie sich rational darstellen lässt, eine Raumcurve vierter Ordnung und zweiter Art; d. h. es lässt sich keine zweite Fläche zweiter Ordnung hindurchlegen, und sie wird von allen Generatrices der einen Schaar in einem Punkte geschnitten, nämlich bei derjenigen Schaar für die sie Strictionslinie ist, im Strictionspunkte, dagegen

von den Geraden der zweiten Schaar in drei Punkten. Die Aufsuchung der drei stationären Schmiegungsebenen und die Aufstellung einer Reihe von Relationen, welche damit zusammenhängen, lassen sich ohne Schwierigkeit vollziehen; auch weist der Verfasser darauf hin, dass die Curve der theilweise Durchschnitt des Hyperboloids mit gewissen Flächen (Conoiden) ist, deren Gleichungen sind

$$x(c^2Cy^2+b^2Bz^2)=abcAyz,$$
$$y(c^2Cx^2-a^2Az^2)=abcBxz,$$
$$z(b^2Bx^2+a^2Ay^2)=abcCxy,$$

welche je eine der Axen zu Doppelgeraden haben. Zum Schluss stellt der Verfasser eine allgemeine Relation auf zwischen der Lage des Centralpunktes einer beliebigen Erzeugenden irgend einer Regelfläche und der Krümmung längs dieser Erzeugenden. Er gewinnt dadurch folgenden Satz: „Im Centralpunkte einer Erzeugenden hat die Krümmung den grössten Werth im Vergleiche mit allen anderen Punkten derselben. Die Krümmungen in beliebigen Punkten derselben Erzeugenden verhalten sich umgekehrt wie die Quadrate der Entfernungen vom Centralpunkte.“ Die Gültigkeit desselben braucht nur für das Hyperboloid nachgewiesen werden, da man durch drei consecutive Gerade einer beliebigen Regelfläche stets ein Hyperboloid legen kann, welches in allen Punkten der Osculationsgeraden mit der Fläche gleiche Krümmung hat.

A.

A. Schönfliess. Bemerkung zu der Abhandlung: „Ueber ein specielles Hyperboloid u. s. w. Schlömilch Z. XXIII. 269-285.“ Schlömilch Z. XXIV. 62-63.

Der geometrische Ort der Punkte, deren Entfernungen von zwei windschiefen Geraden ein constantes Verhältnis haben, ist ein einschaliges Hyperboloid, welches eine eingehende Behandlung von Herrn Schröter erfahren und welchem derselbe den Namen „orthogonales Hyperboloid“ beigelegt hat. Mit diesem Hyperboloid hatte sich in der oben citirten Abhandlung auch

Herr Schönfliess (siehe F. d. M. X. 1878. p. 524) beschäftigt und unter anderem gezeigt, dass, wenn ein solches Hyperboloid gegeben ist, es unzählig viele Geradenpaare giebt, welche in der obigen Beziehung zur Fläche stehen, und dass alle diese Geradenpaare in einer Regelfläche achter Ordnung R_8 enthalten sind. In der vorliegenden Bemerkung zeigt er, dass diese Regelfläche in zwei Regelschaaren vom vierten Grade zerfällt. Jede derselben hat zwei Doppelgeraden und ausserdem noch die vier Geraden mit der anderen gemein, welche in der angeführten Abhandlung als Doppelerzeugende der Fläche R_8 betrachtet worden sind.

Schn.

E. Bouglé. Solution d'une question de concours.
Nouv. Ann. (2) XVIII. 13-19.

Es werden die Oberflächen S zweiten Grades analytisch untersucht, auf denen es eine Gerade D giebt, die so beschaffen ist, dass das Rotationshyperboloid H, welches eine beliebige geradlinige Generatrix G der Oberfläche S und von demselben System wie D, zur Axe hat, und das durch die Gerade D geht, die Oberfläche S in allen Punkten dieser Geraden orthogonal schneidet. Namentlich wird die Gesammtheit aller dieser Hyperboloide H, die zu derselben Fläche gehören, berücksichtigt und der Ort der Scheitel A und der Brennpunkte F der H conjugirten Hyperboloide H' bestimmt; etc. O.

Wolstenholme, Townsend. Solutions of a question (6035). Educ. Times XXXII. 103-104.

Ein hyperbolisches Paraboloid geht durch die vier Seiten eines windschiefen Vierseits. Dann halbirt das abgeschnittene Stück seiner Oberfläche das Volumen des durch die vier Ecken des Vierecks bestimmten Tetraeders. O.

G. Bruno. Una proprietà di due quadriche omofocali.
Atti di Torino XIV. 125-141.

Sind

$$\Sigma \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

$$\Sigma' \equiv \frac{x^2}{a^2-i^2} + \frac{y^2}{b^2-i^2} + \frac{z^2}{c^2-i^2} - 1 = 0$$

die Gleichungen zweier confocaler Flächen zweiter Ordnung, und ist M ein Punkt des Durchschnittes beider, bezeichnet man mit λ, μ, ν die Richtungswinkel des Radius OM, so ist, wie man leicht erkennt,

$$\text{(I.)} \qquad \frac{\cos\lambda^2}{a^2(a^2-i^2)} + \frac{\cos\mu^2}{b^2(b^2-i^2)} + \frac{\cos\nu^2}{c^2(c^2-i^2)} = 0.$$

Bestimmt man in beiden Flächen die zur Richtung OM conjugirten Diametralebenen Π und Π', welche auf einander senkrecht stehen, und nennt ihre Schnitte mit der zugehörigen Fläche bezüglich G und G', so ergiebt sich, dass die eine Hauptaxe beider in die Richtung der Durchschnittsgeraden der beiden Ebenen, welche der Tangente der Durchschnittslinien von Σ und Σ' im Punkte M parallel ist, zusammenfällt.

Die Gleichungen dieser Geraden sind

$$\frac{x\cos\lambda}{a^2(a^2-i^2)(b^2-c^2)} = \frac{y\cos\mu}{b^2(b^2-i^2)(c^2-a^2)} = \frac{z\cos\nu}{c^2(c^2-i^2)(a^2-b^2)};$$

die andere Halbaxe des Kegelschnitts G fällt in die Gerade

$$\frac{x(a^2-i^2)}{\cos\lambda} = \frac{y(b^2-i^2)}{\cos\mu} = \frac{z(c^2-i^2)}{\cos\nu},$$

die des Kegelschnitts G' in die Gerade

$$\frac{xa^2}{\cos\lambda} = \frac{yb^2}{\cos\mu} = \frac{zc^2}{\cos\nu}.$$

Nennt man die in gleiche Richtung fallenden Halbaxen für G und G' d und d', die nicht zusammenfallenden aber d_1 und d_1', so zeigt sich durch geschickte Benutzung der Gleichung I., dass

$$\text{(II.)} \qquad d^2 - d'^2 = i^2; \quad d_1^2 = i^2; \quad d_1'^2 = -i^2.$$

Hieraus geht hervor, dass auf den gleich gerichteten Axen beider Kegelschnitte die Scheitel des einen die Brennpunkte des anderen sind, und umgekehrt ferner, dass die Scheitel der verschieden gerichteten Axen für jeden der beiden Kegelschnitte G und G'

auf dem Durchschnitte der betreffenden Fläche Σ oder Σ' mit einer reellen oder imaginären Kugel liegen, deren Radius i, respective $i\sqrt{-1}$ ist; diese Kugel, also auch der Durchschnitt mit der betreffenden Fläche Σ oder Σ' bleibt ungeändert, wenn M die Durchschnittscurve von Σ und Σ' durchläuft.

Nimmt man jetzt auf der Geraden OM einen beliebigen Punkt K, bestimmt zu diesem die Polarebenen π und π' für die Flächen Σ und Σ' und bezeichnet den Schnitt von π mit Σ durch g, den von π' und Σ' durch g', so sind die Ebenen π und π' den Ebenen Π und Π' bezüglich parallel, und ihre Durchschnittsgerade trifft die Gerade M in einem einfach bestimmbaren Punkte H und ist der Tangente der Durchschnittscurve $\Sigma\Sigma'$ in M parallel. Die Kegelschnitte g und g' sind bezüglich ähnlich und ähnlich liegend mit G, G', sie haben eine gemeinschaftliche Axe in der Richtung der durch H gelegten Parallelen; für diese Axe sind die Scheitel des einen Kegelschnittes die Brennpunkte des andern. Aendert der Punkt K seine Lage auf OM, so beschreibt die gemeinsame Axe der Kegelschnitte g und g' die Ebene θ, welche durch O und die Tangente der Durchschnittscurve von Σ und Σ' in M hindurchgeht, und die beiden Kegelschnitte, in welchen die Ebene θ die Flächen Σ und Σ' schneidet, sind die Orte der Scheitel der Focalaxe und der Brennpunkte der Kegelschnitte g und g'; bezeichnet man die Halbaxen von g und g' analog mit denen von G und G' durch die entsprechenden δ, so ist

$$\delta^2 - \delta'^2 = \delta_1^2 = -\delta^2 = i^2\left(1 - \frac{h^2}{p^2}\right);\ \text{wo } p = OM,\ h = OH \text{ ist.}$$

Von den Coordinaten α, β, γ eines Brennpunktes des Kegelschnittes g lässt sich nun nachweisen, dass

$$i^2\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} - 1\right) < 0.$$

Daraus kann dann mit Rücksicht auf die Lage des Punktes α, β, γ in der Ebene θ und auf die Gleichung (I.) geschlossen werden, dass, wenn die Kegelschnitte g und g' reell sind, die Bedingung

$$a^2b^2c^2(a^2-i^2)(b^2-i^2)(c^2-i^2) < 0$$

erfüllt sein muss.

Der Verfasser wendet nun die hier gewonnenen Sätze zur Lösung folgender Aufgaben an:

1. Durch einen gegebenen Punkt F eine Ebene zu legen, welche eine gegebene (centrische) Fläche zweiter Ordnung in einem Kegelschnitt schneidet, der F zum Brennpunkte hat.

2. Die Brennpunkte eines beliebigen ebenen Schnittes einer Fläche zweiter Ordnung zu suchen.

3. Denjenigen Schnitt einer Fläche zweiter Ordnung zu bestimmen, welcher gegebene Axen hat.

Die Arbeit bezieht sich zunächst nur auf centrische Flächen; zum Schluss bemerkt der Verfasser, dass die analogen Gesetze für Paraboloide sich mit geringen Modificationen der Formeln aufstellen lassen. A.

Laguerre. Sur les surfaces homofocales du second ordre. Darboux Bull. (2) III. 14-26.

Sind im Raume drei Gerade A B B' gegeben, so ist der Ort ihrer Transversalen a b b' ein Hyperboloid, und der Ort der zum Punkte a zugeordneten vierten harmonischen Punkte a' dieser Transversalen ist eine Gerade A', welche derselben Schaar der Generatrices des Hyperboloides angehört, wie die drei gegebenen Geraden. Diese Gerade, welche gewöhnlich die zur Geraden A in Bezug auf B und B' zugeordnete vierte harmonische genannt wird, nennt der Verfasser die Polare von A in Bezug auf B und B'. Dann gilt der Satz: „Wenn ein System (Σ) von confocalen Flächen zweiter Ordnung und eine feste Gerade D gegeben ist, wenn man ferner durch D an eine beliebige Fläche Σ des Systems die beiden Tangentialebenen construirt, so ist die Polare von D in Bezug auf die beiden in den Berührungspunkten der Tangentialebenen errichteten Normalen von Σ in Bezug auf alle Flächen des Systems (Σ) dieselbe.“ Diese Gerade Δ nennt der Verfasser die adjungirte (adjointe) von D in Bezug auf das confocale System. Diese Adjungirte lässt sich mit Hülfe eines der Focalkegelschnitte leicht construiren, durch welche ja die Grenzgestalten der confocalen Flächen dargestellt werden.

Einen rein geometrischen Beweis dieses Satzes hat der Verfasser in einer Note im Bull. S. M. F. III. 179 (Sur les polaires d'une droite relativement aux courbes et aux surfaces algébriques, siehe F. d. M. VII. 1875. p. 413) veröffentlicht. Die vorliegende Arbeit enthält den analytischen Beweis nebst einigen Folgerungen. Sind die Gleichungen der Geraden D

$$\frac{x-\alpha}{L} = \frac{y-\beta}{M} = \frac{z-\gamma}{N},$$

ist die Gleichung einer Fläche Σ

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C} = 1,$$

und setzt man zur Abkürzung:

$$P = \Sigma(M-N)^2,\quad Q = \Sigma(M-N)(N\beta-M\gamma),\quad R = \Sigma(N\beta-M\gamma)^2,$$

wo die Summationen sich auf die cyklische Vertauschung der Coordinatenaxen beziehen, so werden die Gleichungen der zu D adjungirten Geraden Δ

$$x\omega = A(M-N)+\frac{(M-N)(Pr-Qq)+(N\beta-M\gamma)(Qp-Pq)}{PR-Q^2}$$
$$+\mu\left[A(N\beta-M\gamma)-\frac{(M-N)(Qr-Pq)+(N\beta-M\gamma)(Rp-Qq)}{PR-Q^2}\right],$$

wo

$$\omega = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ L & M & N \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

gesetzt ist, und μ eine veränderliche Grösse bedeutet. Für $y\omega$ und $z\omega$ erhält man die durch cyklische Vertauschung entstehenden Ausdrücke.

Aus den gewonnenen Gleichungen lassen sich nun mancherlei Folgerungen ziehen, von denen folgende hervorgehoben werden.

Wenn eine Gerade zu ihrer adjungirten rechtwinklig steht, so steht sie auch rechtwinklig zu ihren sämmtlichen Polaren in Bezug auf das System (Σ).

Wenn eine Gerade Generatrix einer Fläche Σ ist, so ist sie mit ihrer adjungirten identisch.

Wenn man durch eine Gerade D die Tangentialebenen an

eine Fläche Σ legt, in den Berührungspunkten die Normalen errichtet und die kürzeste Verbindung zwischen beiden construirt, so liegt die Mitte der letzteren auf der adjungirten Δ.

Sind Σ und Σ_0 zwei Flächen des Systems, welche Δ in den Punkten m und m_0 berühren, ist K das Krümmungscentrum des geraden Schnittes des Berührungscylinders der Fläche Σ, dessen Seiten parallel D sind, und hat K_0 die analoge Bedeutung für die zweite Fläche, so hat die Gerade KK_0 die zu D adjungirte Δ.

Wenn Σ eine Fläche des Systems ist, welche D in m berührt, so enthält die Normalebene der Fläche in m, welche durch die zu D conjugirte Tangente gelegt ist, Δ in sich, u. a.

A.

Winterberg. Sulla linea geodetica. Terzo problema generale. Analisi dei triangoli sferoidici. Acc. R. d. L. (3) III. 93, 143.

Referat über eine der Akademie im Manuscript eingereichte Arbeit von Herrn Winterberg, welche die Fortsetzung zweier in den (Astr. N. 2119—2120 und 2168) veröffentlichter Abhandlungen bildet. Dieselbe behandelt die Aufgabe: Wenn die Länge einer geodätischen Linie, die geographische Längendifferenz ihrer Endpunkte und die Breite des andern Endpunktes gegeben ist, die Lage des andern Endpunktes u. s. w. zu bestimmen; und bespricht auch die Lösung der übrigen geodätischen Probleme. Das Referat hebt hervor, dass eine ältere Arbeit eines italienischen Astronomen Barnaba Oriani (Elementi di trigonometria sferoidica, nelle Memorie dell' Istituto Nazionale Italiano Tom I e II) aus den ersten Jahren dieses Jahrhunderts mit den damaligen Hülfsmitteln der Analysis, namentlich mit Hülfe von Reihenentwickelungen, alle geodätischen Probleme, welche in der Praxis vorkommen, in einfacher und bequemer Weise behandelt, und bedauert, dass diese Arbeit nicht von den späteren Autoren genügend berücksichtigt sei. A.

K. Schwering. Neue Darstellung der geodätischen Linie auf dem Rotationsellipsoid. Schlömilch Z. XXIV. 405-407.

Die Notiz enthält den Nachweis für folgende interessante Relation:

Jede geodätische Linie auf dem Rotationsellipsoid hat zur Projection auf die Aequatorebene eine Curve, welche aufgefasst werden kann als die abgewickelte Basis eines geraden elliptischen Kegels, dessen Mantel in die Aequatorebene ausgebreitet ist.

A.

A. Harnack. Notiz über die algebraische Parameterdarstellung der Schnittcurven zweier Flächen zweiter Ordnung. Clebsch Ann. XV. 560-564.

Zweck dieser Note ist, an Stelle der von Herrn Westphal (Clebsch Ann. XIII. S. 9 gegebenen Darstellung eine solche zu setzen, aus der ohne weiteres zu erkennen ist, welche Formen des Systems dabei in Betracht kommen.

T.

M. Azzarelli. Rettificazione di alcune linee che risultano dalla intersecazione di superficie di second' ordine e quadratura di alcune porzioni di esse superficie. Acc. P. N. L. XXX. 337-365.

Der Verfasser nimmt die von Tortolini an die Hand gegebene Aufgabe auf, Fälle zu untersuchen, wo der Bogen des Schnittes eines Ellipsoids und eines coaxialen elliptischen Cylinders sich als elliptische Function darstellt. Der allgemeine Ausdruck des Bogens ist

$$s=\int d\vartheta\sqrt{\frac{L+M\sin^2\vartheta+N\sin^4\vartheta}{P+Q\sin^2\vartheta}}.$$

Das Integral wird augenscheinlich elliptisch, wenn eine der Grössen L, N, P, Q Null ist. Hier wird jedoch mit L resp. N, auch M

Null gesetzt; es werden die Axenrelationen noch besonders für Kreiscylinder, wo die Form dieselbe ist, entwickelt und die Integrale auf die Grundform reducirt. Das vom genannten Schnitt begrenzte Ellipsoidflächenstück hatte Tortolini untersucht; der Verfasser fügt das Cylinderflächenstück hinzu, welches allgemein elliptische Function ist. Statt des Ellipsoids wird nun ein Rotationsparaboloid genommen und der Bogen des Schnitts, das von ihm begrenzte Paraboloid- und Cylinderflächenstück berechnet. Dasselbe geschieht schliesslich mit einem Kegel. H.

H. Thieme.*) Ueber die Flächen zweiten Grades, für welche zwei Flächen zweiten Grades zu einander polar sind. Schlömilch Z. XXII. 1877. 377-395.

Sind zwei Flächen zweiten Grades *A* und *B* gegeben, so kann man sich die Aufgabe stellen, diejenigen Flächen zweiten Grades zu bestimmen, für welche *A* das polare Gebilde von *B* ist. Die vorliegenden synthetischen Untersuchungen ergeben folgende Bedingungen für die Lösbarkeit dieser Aufgabe. Die beiden Flächen *A* und *B* haben ein gemeinsames Quadrupel harmonischer Pole (*M*). Sind alle Ecken desselben reell, so müssen *A* und *B* entweder sein imaginäre Ellipsoide oder einschalige Hyperboloide, welche dieselben zwei Paar Kanten von (*M*) in reellen Punkten schneiden, oder nicht geradlinige Flächen, welche dasselbe Tripel von Kanten in reellen Punkten treffen, also dieselbe Ecke von (*M*) im Innern haben. Sind nur zwei Ecken von (*M*) reell, so müssen *A* und *B* gleichzeitig geradlinige Flächen sein oder nicht. Sind alle Ecken imaginär, so lässt die Aufgabe stets eine Lösung zu. Sind diese Bedingungen erfüllt, so ist die gestellte Aufgabe also lösbar, und es entsprechen im Allgemeinen acht Flächen zweiten Grades den Forderungen. Ihre Construction wird auf synthetischem Wege gewonnen, und es werden einige allgemeine Beziehungen derselben zu den Flächen

*) Das Referat ist durch einen von der Redaction nicht verschuldeten Zufall damals fortgeblieben und wird daher hier nachgeholt. O.

A und *B* hergeleitet. Demnächst wendet sich die Untersuchung den drei besonderen Fällen zu, welche durch die Realität von vier, von zwei und von keinem Quadrupelpunkte von (*M*) gekennzeichnet sind. Im ersten Falle giebt es ein imaginäres Ellipsoid, drei einschalige, drei zweischalige und ein reelles Ellipsoid oder zweischaliges Hyperboloid, für die *A* und *B* Polarflächen zu einander sind. Liegt der zweite Fall vor, so giebt es zwei einschalige, ein zweischaliges Hyperboloid und ein Ellipsoid, welche den geforderten Bedingungen entsprechen. Sind endlich von dem conjugirten Tetraeder (*M*) von *A* und *B* alle Ecken imaginär, so giebt es vier einschalige Hyperboloide, für welche jene Flächen zu einander polar sind. Schn.

J. Hammond. Solution of a question (5387). Educ. Times XXXI. 38-39.

Beweis des bekannten Satzes: Eine Fläche dritten Grades hat höchstens 4 und eine solche vierten Grades höchstens 16 conische Punkte. O.

G. Pittarelli. La cubica gobba e le forme binarie quadratiche e cubiche. Battaglini G. XVII. 260-310.

Die Arbeit stellt ein sehr eingehendes Studium der binären quadratischen und cubischen Formen mit genauer Feststellung ihrer geometrischen Bedeutung für die Theorie der Raumcurven dritter Ordnung dar. A.

A. B. Chace. A certain class of cubic surfaces treated by quaternions. Am. J. II. 315-324.

Es handelt sich um eine specielle Classe von Flächen dritter Ordnung, welche der Verfasser Central-Cubics nennt, deren Eigenschaften mit Hülfe von Quaternionen untersucht werden.

A.

G. Pittarelli. Intorno ad un problema di eliminazione nella teoria analitica della cubica gobba. Battaglini G. XVII. 244-260.

Bedeuten a_0, a_1, a_2, a_3 die homogenen Coordinaten eines Punktes a, so können bei passender Wahl des Coordinatensystems die Gleichungen einer Raumcurve dritter Ordnung in die Form gebracht werden

$$a_0 : a_1 : a_2 : a_3 = \lambda^3 : \lambda^2 : \lambda : 1.$$

Jedem Werthe von λ entspricht ein Punkt λ der Curve; die Coordinaten eines Punktes x der Sehne λ, μ genügen dann den Gleichungen

$$\text{(I.)} \qquad \begin{cases} x_0-(\lambda+\mu)x_1+\lambda\mu x_2 = 0, \\ x_1-(\lambda+\mu)x_2+\lambda\mu x_3 = 0. \end{cases}$$

Bestimmt man nun durch eine homogene Gleichung dritten Grades $f(\lambda_1\lambda_2) = 0$ drei Werthe von $\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ und dadurch drei Punkte auf der Curve, so giebt die Gleichung

$$\text{(II.)} \qquad \mu_1 \frac{\partial f}{\partial \lambda_1} + \mu_2 \frac{\partial f}{\partial \lambda_2} = 0, \qquad \left(\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2};\ \ \mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}\right)$$

eine Relation zwischen zwei Punkten λ und μ, bei welcher jedem μ zwei λ entsprechen und jedem λ ein μ, und welche man so bezeichnet, dass man das Punktpaar λ, welches einem Punkt μ entspricht, die quadratische (erste) Polare von μ in Bezug auf die Punkte $f = 0$ nennt.

Sucht man nun in einem solchen Polarsystem den Ort der Sehnen, welche irgend einen Punkt μ mit einem seiner quadratischen Polarenpaare angehörigen Punkte verbindet, so erhält man eine geradlinige Fläche F, die durch die Gleichungen (I) und (II) definirt ist. Es handelt sich nun in der Arbeit um die Elimination der Parameter λ und μ aus den Gleichungen, wodurch die Gleichung der Fläche in den Coordinaten allein erscheint. Die Elimination wird mittels einer ausgedehnt angewendeten symbolischen Bezeichnung durchgeführt und lässt sich nicht kurz andeuten.

A.

P. Cassani. La quadrica dei dodici punti e ricerche che le si collegano. Battaglini G. XVII. 202-218.

Siehe Abschn. VIII. Cap. 5. B. p. 452.

Lösungen weiterer Aufgaben über Flächen zweiten und höheren Grades von J. J. Walker, Nash, H. Stabenow, J. Hammond, S. Roberts, E. B. Elliott, C. F. D'Arcy, W. J. C. Sharp, E. W. Symons, L. Bourguet, C. A. Borel finden sich Educ. Times XXXI. 17-18, 35, 44-46, 79-80; XXXII. 111, 112; Nouv. Ann. (2) XVIII. 170-172, 234-237.

D. Andere specielle Raumgebilde.

A. Cayley. Note on the theory of apsidal surfaces. Quart. J. XVI. 109-113.

Unter der Apsidalfläche einer gegebenen Fläche in Bezug auf einen gegebenen Punkt versteht der Verfasser folgende Fläche. Man lege durch den Punkt eine Ebene, ziehe in dieser die apsidalen Radien, d. h. die Radien, welche die Curve rechtwinklig schneiden, und errichte auf der Ebene ein Loth im festen Punkte, auf welchem man vom festen Punkte aus die apsidalen Radien abträgt; dann heisst der geometrische Ort der Endpunkte die Apsidalfläche. Unter der reciproken Fläche ist die durch Abbildung nach reciproken Radien in Bezug auf einen festen Punkt entstehende Fläche gemeint. Wird dann für beide Operationen derselbe feste Punkt, etwa der Coordinatenanfang genommen, so besteht der Satz: Die Reciproke der apsidalen Fläche einer gegebenen ist identisch mit der apsidalen der Reciproken. Für diesen Satz, der sich geometrisch sehr einfach beweisen lässt, wird hier ein analytischer Beweis gegeben.

A.

A. Enneper. Ueber die Krümmungslinien einer algebraischen Fläche. Schlömilch Z. XXIV. 180-187.

Die in Rede stehende Fläche hat Laguerre in Liouville J. (3) II. 145 (s. F. d. M. VIII. 1876. 524) untersucht und durch rein geometrische Betrachtungen ihre Krümmungslinien gefunden. Der Verfasser bestimmt dieselbe Fläche folgenderweise. Durch eine Gerade L in einer der gemeinsamen Hauptebenen zweier confocaler Flächen 2ten Grades gehen zwei Ebenen, welche die Flächen einzeln in P' und P'' berühren. Die Gerade $P'P''$ ist dann normal zur ersten Geraden, welche daher von einer durch $P'P''$ gehenden Ebene in P normal geschnitten wird. Der Ort von P bei Variation der anfänglichen Geraden in der Hauptebene ist die untersuchte Fläche S. Die zwei confocalen Flächen sind

$$\frac{x^2}{a-\alpha}+\frac{y^2}{b-\alpha}+\frac{z^2}{c-\alpha}=1; \quad \frac{x^2}{a-\beta}+\frac{y^2}{b-\beta}+\frac{z^2}{c-\beta}=1.$$

Die genannte Hauptebene ist die der xy, die Berührungspunkte $(x'y'z')$ und $(x''y''z'')$. Setzt man dann

$$\frac{z''}{c-\beta}=\frac{z'}{c-\alpha}\,t,$$

so ergiebt sich die Gleichung von S sowohl in der Form

$$\frac{x^2}{a-\beta-(a-\alpha)t}+\frac{y^2}{b-\beta-(b-\alpha)t}+\frac{z^2}{(\alpha-\beta)^2}\left(c-\beta-\frac{c-\alpha}{t}\right)=\frac{1}{1-t},$$

als auch in der ihrer partiellen Derivation nach t, resultirt also auch aus der Elimination von t zwischen beiden. S ist folglich die Einhüllende der in vorstehender Gleichung dargestellten Fläche bei unabhängig variirendem t. Setzt man

$$t=\frac{s+\beta}{s+\alpha},$$

so geht die Gleichung von S aus der Bedingung hervor, dass die obige Gleichung zwei gleiche Wurzeln s hat. Die Differentialgleichung der Krümmungslinien erscheint in der Form

$$\begin{vmatrix} x'-x'' & y'-y'' & z'-z'' \\ dx' & dy' & dz' \\ dx'' & dy'' & dz'' \end{vmatrix}=0.$$

Durch Multiplication mit einer Determinante n^{ter} Ordnung wird

sie auf eine Form gebracht, wo ihr eine lineare Relation zwischen p^2 und q^2 genügt, wenn p, q die Coefficienten der Gleichung von $P'P''$

$$px+qy = 1; \quad z = 0$$

sind. Sind u, v die Parameter der Krümmungslinien, so ergiebt sich:

$$p^2 = \frac{(a-b)Auv}{(B-Au)(B-av)}; \quad q^2 = \frac{-(a-b)B}{(B-Au)(B-av)},$$

wo

$$A = (a-\alpha)(a-\beta); \quad B = (b-\alpha)(b-\beta)$$

gesetzt ist. Auf dem Wege der Berechnung tritt auch die von Laguerre bemerkte Eigenschaft hervor, dass, wenn man durch die vier Schnittpunkte der zwei Kegelschnitte, welche die zwei confocalen Flächen auf der gemeinsamen Hauptebene bilden, einen dritten Kegelschnitt legt und diesen variiren lässt, während die Gerade L ihn beständig berührt, der Punkt P auf der Fläche S eine Krümmungslinie beschreibt. H.

V. Jarolímek. Ueber die entwickelbare Normalenfläche einer Kegelfläche zweiter Ordnung. Casopis VIII. 247-257. (Böhmisch).

Enthält eine analytische Untersuchung der developpablen Normalenfläche N einer Kegelfläche 2ter Ordnung P längs einer Krümmungscurve K des zweiten Systems (die Mantellinien als erstes gerechnet), dem eine axonometrische Darstellung der beiden Flächen beigefügt ist. Die Symmetrie-Ebenen der Kegelfläche sind zugleich Symmetrie-Ebenen der Normalenfläche und enthalten die Selbstschnitte der Fläche N, welche sich als Curven 2ter Ordnung herausstellen. Die räumliche Rückkehrkante V der Fläche N, zugleich eine Evolute der Krümmungslinie K, besitzt vier Rückkehrpunkte, welche mit den Endpunkten der Selbstschnitte (resp. ihrer reellen Theile) identisch sind. Dem Systeme der Krümmungslinien ΣK entspricht das System von Normalenflächen ΣN, und ihre Rückkehrkanten bilden die Fläche $\Sigma V \equiv S$, den Ort der dem Systeme ΣK entsprechenden Krüm-

mungsmittelpunkte der Kegelfläche *P*. Die Fläche *S* ist eine mit *P* concentrische Kegelfläche, welche vier gerade Rückkehrkanten besitzt, nämlich die Verbindungslinien der den Curven *V* zugehörigen Rückkehrpunkte. Std.

Ad. Hochheim. Ueber die Polarenflächen der windschiefen Flächen dritter Ordnung. Schlömilch Z XXIV. 18-32.

Vorliegende Arbeit bildet den Schluss zu den Untersuchungen, über welche im X. Bd. dieser Zeitschrift Bericht erstattet worden ist. Die allgemeine windschiefe Fläche dritten Grades enthält eine Doppelgerade *D* und eine einfache Gerade *E*, welche nicht zur Schaar der geradlinigen Erzeugenden gehört. Fallen diese beiden Geraden zusammen, so entsteht eine singuläre Fläche, welche in tetraedrischen Coordinaten in der Form

$$x_2^3+x_1(x_1x_3+x_2x_4)=0$$

dargestellt werden kann. Mit dieser singulären Fläche beschäftigt sich der Verfasser in obiger Abhandlung und untersucht für diese besonderen Formen alle die Fragen, über welche im X. Bd. p. 527 bereits referirt worden ist. Schn.

A. Quidde. Curven gleicher Steilheit auf Flächen zweiten Grades. Pr. Stargard.

Der Verfasser entwickelt zunächst allgemein den Begriff der Curven gleicher Steilheit und ihre Gleichung. Er zeigt, dass dieselben bei den Flächen zweiten Grades in Bezug auf beliebige Ebenen vom Mittelpunkt der Fläche aus durch einen Kegel zweiten Grades projicirt werden und knüpft daran Untersuchungen für specielle Flächen und andere damit zusammenhängende Fragen. O.

A. Tourettes. Solution d'une question du concours général. Nouv. Ann. (2) XVIII. 102-108.

Gegeben ist ein Parallelepipedon. Man betrachte drei Kanten, die keinen Endpunkt gemeinsam haben, und die nicht auf diesen drei Kanten gelegenen beiden Ecken. Gesucht wird die Gleichung des Orts einer ebenen Curve zweiten Grades, welche durch die beiden Punkte geht und sich auf die drei Kanten stützt. Es ergiebt sich eine Fläche vierten Grades. Für diese Fläche werden dann die reellen Geraden bestimmt, sowie die Form der Schnitte, parallel einer der Seiten des Parallelepipedons. O.

A. Cayley. On the tetrahedroid as a particular case of the 16 nodal quartic surface. Borchardt J. LXXXVII. 161-165.

Die Notiz enthält eine neue Darstellung einer bereits früher vom Herrn Verfasser durchgeführten Betrachtung betreffend einen speciellen Fall der Kummer'schen Fläche, welcher als Tetrahedroid bezeichnet wird. Dieselbe stützt sich auf mehrere inzwischen vom Herrn Verfasser publicirte Aufsätze und ist wesentlich einfacher und symmetrischer. A.

H. Valentiner. Nogle Sätninger om fuldständige Skjäringskurver mellem to Flader. Zeuthen Tidsskr. (4) III. 22-30.

Laut Angabe von Salmon (Geometry of three dimensions p. 494) soll eine Fläche vierter Ordnung immer durch eine der Gleichungen $XY+ZV=0$ oder $aX^2+bY^2+cZ^2+dV^2=0$ dargestellt werden können. Dieses ist aber nicht richtig. Wie schon von Reye bemerkt (Clebsch Ann. I. p. 455) lässt eine Fläche von der Ordnung $p+q$ sich nur dann als Erzeugnis von zwei projectivischen Flächenbündeln p^{ter} und q^{ter} Ordnung darstellen, wenn sie unendlich viele Schnittcurven von Flächen p^{ter} und q^{ter} Ordnung enthält. Dieses findet bei den Flächen vierter und höherer Ordnung nur in besonderen Fällen statt. Der Beweis dieses Satzes, welcher von Reye nicht geführt ist, ist der Gegenstand dieser Abhandlung. Der Gang des Beweises ist der

folgende. Gesetzt $p > q$, dann ist die Anzahl der Punkte von F_q, die eine vollständige Schnittcurve φ_{pq} von F_p und F_q bestimmen,

$$A_{pq} = a_p - a_{p-q} - 1,$$

wo $a_n = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3)-1$. Ebenso wird die Bedingung dafür aufgestellt, dass F_n die Curve φ_{pq} enthält, wie auch diejenige, dass F_n durch resp.

$$A_{npq} = a_n - a_{n-p} - a_{n-q} - 1 \qquad (\text{für } n < p+q)$$

oder

$$a_{npq} = a_n - a_{n-p} - a_{n-q} + a_{n-p-q} \qquad (\text{für } n \geqq p+q)$$

Punkte von φ_{pq} hindurchgeht. Diese Bedingungen sind nothwendig und hinreichend, was sich durch Betrachtung einer speciellen Curve φ'_{pq} ergiebt, welche zusammen mit einer Curve $\varphi_{q\,n-p}$ die vollständige Schnittcurve von F_n und einer gewissen Fläche F'_q bildet. Wählt man für F'_q eine aus q Ebenen zusammengesetzte Fläche, dann lässt sich für den zu beweisenden Satz ein Inductionsbeweis geben, indem man von dem Falle $q = 1$ ausgeht. Uebrigens ergiebt sich, dass eine F_n, welche eine φ_{pq} enthält, eine specielle Fläche sein muss, sofern $n \geqq 4$. Endlich bestimmt der Verfasser die Anzahl der Constanten, von welchen F_n abhängt, wenn sie φ_{pq} enthalten soll. Diese Zahl ist

$$a_p + a_q + a_{n-p} + a_{n-q} - a_{p-q} - a_{n-p-q} - 1, \quad (n > p+q,\ p > q).$$

Für $n = 4$, $p = q = 2$ wird diese Anzahl 33. Gm.

H. G. Zeuthen. Om Flader af fjerde Orden med Dobbeltkeglesnit. Festskr. Kjöbenhavn.

Indem der Verfasser dieser Arbeit mit den von mehreren Mathematikern früher angestellten Untersuchungen über Flächen vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt ein neues Glied anfügt, beabsichtigt er insbesondere die Fragen nach der Form und dem Zusammenhang solcher Flächen, sowie die Realität ihrer Geraden und Kummer'schen Kegel zu erörtern. Als Hülfsmittel dieser Untersuchung, welche durchweg auf rein geometrischem Wege geführt wird, benutzt er zunächst den Umstand, dass die scheinbare Contour der Fläche, von einem Punkte des

Doppelkegelschnittes gesehen, eine allgemeine Curve vierter Ordnung ist. Die Consequenzen dieses Satzes werden in dem ersten Abschnitt der Abhandlung erörtert, wo er zur Untersuchung verschiedener allgemeiner Eigenschaften der Fläche, der sechszehn Geraden derselben und der fünf Kummer'schen Kegelflächen verwendet wird. Die Tangentenebenen der Kummer'schen Kegel schneiden bekanntlich die Fläche in zwei Kegelschnitten; ihre Projectionen bilden zehn unter den dreiundsechzig Systemen von vierfach berührenden Kegelschnitten der allgemeinen C^4. Im zweiten Abschnitt nimmt der Verfasser die Spitze eines Kummer'schen Kegels als Projectionscentrum. Die Contour der Fläche wird dann aus den Spuren des Kegels, zweifach genommen, und einer C^4 mit zwei Doppelpunkten zusammengesetzt. In genauer Verbindung mit dieser Projection steht die folgende Construction der Fläche. Durch einen festen Punkt T lege man eine Gerade, welche zwei gegebene Flächen der zweiten Ordnung resp. in SS' und DD' schneidet. Auf dieser bestimme man harmonisch mit DD' zwei Punktepaare M_1M_2 und $M'_1M'_2$, von welchen das erste auch zu TS, das letzte zu TS' harmonisch conjugirt ist. Der Ort der Punkte M wird dann eine Fläche der erwähnten Art sein. Mittels dieser Construction erhält man zugleich eine Abbildung der Fläche auf einer doppelten Fläche zweiter Ordnung. Von den soeben entwickelten Sätzen und Methoden werden demnächst vielfache Anwendungen bei den besonders interessanten Untersuchungen gemacht, welche in dem dritten und vierten Abschnitte enthalten sind. Als Hülfsmittel benutzt der Verfasser hier die von ihm selbst und Crone früher gewonnenen Resultate über die Figur der Curven vierter Ordnung und die Realität der sie vierfach berührenden Kegelschnitte. Er zeigt dann zuerst, wie man die Anzahl der reellen Geraden und der reellen Kummer'schen Kegel bestimmen kann, insofern der Doppelkegelschnitt reell ist, und diese Bestimmung giebt dann zu einer natürlichen Eintheilung solcher Flächen in sechs Gattungen Anlass, charakterisirt durch die reellen Geraden und Kummer'schen Kegel, durch die „Type“ und den Zusammenhang ihrer Netze, endlich durch ihre Lage innerhalb oder ausserhalb der Kummer'schen Kegel. Nach

einer genaueren Betrachtung der verschiedenen auftretenden reellen Kegelschnitte und imaginären Geraden der Flächen sowie durch Anwendung der oben erwähnten Abbildung ergiebt sich endlich, dass die erlangten Resultate auch gültig sind, wenn der Doppelkegelschnitt imaginär wird, so dass die aufgestellten sechs Gattungen alle Formen der in Rede stehenden Flächen enthalten.

Gm.

H. G. Zeuthen. Nogle Egenskaber ved Kurver af fjerde Orden med to Dobbeltpunkter. Kjöbenhavn. Forh. 1879. 89-122.

Eine Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten kann als Centralprojection der Schnittcurve zweier Flächen zweiter Ordnung aufgefasst werden. Die Anwendung dieser Betrachtungsweise zur Deduction von verschiedenen Eigenschaften der genannten ebenen Curven ist der Gegenstand der vorliegenden Arbeit. Insbesondere behandelt der Verfasser ein besonderes System von vierfach berührenden Kegelschnitten, welches von den scheinbaren Contouren aller Flächen des von den beiden gegebenen Flächen bestimmten Büschels gebildet wird. Die Charakteristiken dieses besonderen Systems sind $\mu = 2$, $\nu = 3$; die Polaren eines festen Punktes umhüllen einen Kegelschnitt, während der Ort der Pole einer festen Geraden eine Curve der dritten Ordnung wird; ebenso wird die Hermite'sche Curve des Systems eine Curve der dritten Classe. Weiter wird gezeigt, wie die acht Tangenten der K_4 aus einem gegebenen Punkte sich bestimmen lassen. Die gefundenen Resultate führen zu verschiedenen Constructionen der K_4 als des geometrischen Orts der Schnittpunkte von gewissen Kegelschnitten oder Geraden. Dann folgen einige Untersuchungen über die gemeinschaftlichen acht Tangenten der K_4 und eines Kegelschnittes des besonderen Systems, die Construction der Berührungspunkte und die Erzeugung der Curve mittels Tangenten. Von den genannten acht Tangenten gilt u. a. der Satz, dass sie sich in zwei Gruppen von vier theilen, von welchen jede auf dem zugehörenden Kegelschnitte dasselbe anharmonische Verhältnis bestimmt. Die analytische

Darstellung der K_4 als Ort der Schnittpunkte zweier Tangenten von Kegelschnitten führt zu einer Gleichung zwischen zwei Parametern, welche beide im zweiten Grade enthält. Eine Discussion dieser Gleichung zeigt, dass die Aufgabe, die K_4 aus zwei Kegelschnitten des besonderen Systems und vier Punkten zu bestimmen, vierundsechszig Lösungen hat, während ein Kegelschnitt und acht Punkte hundertachtundzwanzig Lösungen geben. Für bicirculare Curven vereinfachen sich die Resultate beträchtlich; z. B. zeigt es sich, dass die Berührungspunkte der Kegelschnitte des besonderen Systems auf concentrischen Kreisen liegen.

Gm.

J. W. L. Glaisher. On a space-locus connected with the ellipsoid. Quart. J. XVI. 283-294.

Der Ort der Mitten aller Sehnen von constanter Länge in einer Ellipse ist eine Curve vierter Ordnung. Bei einem Ellipsoide dagegen ist es ein Theil des Raumes, welcher eingeschlossen ist durch die Theile einer Fläche sechster Ordnung, mit deren Untersuchung sich die vorliegende Arbeit beschäftigt.

Für die Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

hat der besprochene Ort die Gleichung

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}\right)+\frac{h^2}{a^2b^2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)=0.$$

Als Vorbereitung für die eigentliche Frage wird diese Curve genauer discutirt. Für sehr kleine h hat sie eine ähnliche Gestalt wie die Ellipse selbst. Für grössere h erhält sie bei den Durchschnitten mit der x-Axe Einschnürungen; für $h=b$ hat sie die Form einer Schleife. Die Fälle $h>b$ bedürfen einer genaueren Untersuchung, bei der es wesentlich auf den Werth $\frac{b^2}{a}$ ankommt. Der Anfangspunkt ist ein Doppelpunkt der Curve, und zwar ein conjugirter, wenn $h<b$.

Es ergeben sich übrigens verschiedene sehr bequeme Constructionen derselben, die hier übergangen werden müssen.

Für die analoge Aufgabe im Raume ergiebt sich, wenn die Gleichung des Ellipsoides ist

$$f^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

als Gleichung der Fläche, welche den Raum begrenzt, in welchem die Punkte liegen,

$$\frac{x^2}{a^2(a^2f^2+h^2)} + \frac{y^2}{b^2(b^2f^2+h^2)} + \frac{z^2}{c^2(c^2f^2+h^2)} = 0.$$

Diese Gleichung lässt sich auch in die Form bringen

$$\frac{x^2}{a^2f^2+h^2} + \frac{y^2}{b^2f^2+h^2} + \frac{z^2}{c^2f^2+h^2} = 1 + \frac{1}{f^2}.$$

Es werden nun die Hauptschnitte der Fläche untersucht, deren jeder aus einer Curve vierter Ordnung und einer Ellipse besteht, welche mit dem betreffenden Hauptschnitte des Ellipsoides ähnlich und ähnlich liegend ist. Zwischen diesen beiden Curven liegt also der Streifen, welcher dem Ort-Raume angehört. Der Verfasser macht darauf aufmerksam, dass die Fläche einige Analogien mit der Wellenfläche, sowohl hinsichtlich ihrer Gleichungsform als hinsichtlich ihrer Gestalt besitzt.

Für das Rotationsellipsoid vereinfacht sich dieselbe; es ist der Ort selbstverständlich auch ein Rotationskörper, von dessen Gestalt man sich in beiden Hauptfällen leicht eine Vorstellung bilden kann.

A.

K. Rohn. Transformation der hyperelliptischen Functionen $p = 2$ und ihre Bedeutung für die Kummer'sche Fläche. Clebsch Ann. XV. 315-354.

Siehe Abschn. VII. Cap. 2. p. 312.

A. Mannheim. Détermination géométrique des ombilics de la surface de l'onde. C. R. LXXXVIII. 902-906.

Wenn m ein Punkt eines Ellipsoides ist, mn die Normale in diesem Punkte und o der Mittelpunkt desselben, so gewinnt man einen Punkt der Wellenfläche, wenn man sich die Ebene, welche durch mn und o bestimmt ist, in sich um einen rechten Winkel drehen lässt. Es geht dabei mn in die Lage von $m_1 n_1$ über, m_1 ist ein Punkt der Wellenfläche, $m_1 n_1$ aber wird die Normale in diesem Punkte. Zwischen den Hauptkrümmungscentren des Ellipsoides für den Punkt m und den Hauptkrümmungscentren der Wellenfläche für den Punkt m_1 existirt ein Zusammenhang, über den Herr Mannheim in der Sitzung der Akademie am 11. Februar 1867 berichtet hat, ein Zusammenhang, der es ermöglicht, die Hauptkrümmungsmittelpunkte der Wellenfläche aus den Hauptkrümmungsmittelpunkten der correspondirenden Punkte des Ellipsoides herzuleiten. Anknüpfend an jene Beziehung untersucht Herr Mannheim die Frage, wo die Nabelpunkte auf der Wellenfläche gelegen sind. Für diese Punkte fallen die Hauptkrümmungscentren zusammen, und indem er den nothwendigen Folgen dieser Bedingung nachgeht, ergiebt sich ihm, dass sich Nabelpunkte für die Wellenfläche nur in den Symmetrieebenen finden, und dass, wenn m_1 ein Nabelpunkt der Wellenfläche ist, die Strahlen, welche von o aus nach den Hauptkrümmungsmittelpunkten des correspondirenden Punktes m des Ellipsoides laufen, einen rechten Winkel einschliessen. Sind oa, ob, oc die nach der Grösse geordneten Halbaxen der Wellenfläche, welche bezüglich in die Richtung der Axen ox, oy, oz fallen, so liegt ein singulärer Punkt g in der Ebene xoz. Theilt man den Winkel gox durch eine Gerade $o\nu$ in zwei gleiche Theile und dreht um die Halbirungslinie $o\nu$ eine von o auslaufende Gerade, welche mit ihr einen Winkel $\frac{\pi}{4}$ einschliesst, so entsteht ein Kegel mit der Axe $o\nu$. Dieser schneidet den kreisförmigen Hauptschnitt in der Symmetrieebene xoy, dessen Radius oa ist, in vier Punkten. Führt man durch diese Punkte Ebenen parallel der Ebene xoz, so treffen diese den Kegelschnitt, welcher in der Symmetrieebene yoz gelegen ist, in vier Punkten, und diese sind Nabelpunkte der Wellenfläche. Hätte man den Winkel goz halbirt und die

analoge Construction mit Hülfe der Halbirungslinie dieses Winkels ausgeführt, so hätte man die vier reellen Nabelpunkte erhalten, welche auf dem Kegelschnitt in der Symmetrieebene *yox* gelegen sind. Es giebt also auf der Wellenfläche acht reelle Nabelpunkte, welche sich zu je vier auf den Kegelschnitten in den Symmetrieebenen befinden, die die singulären Punkte nicht enthalten; auf dem Kegelschnitt in der letzteren aber liegt kein Nabelpunkt. Schn.

A. Cayley. Equation of the wave surface in elliptic coordinates. Messenger (2) VIII. 190-191.

Untersuchung der Gleichung der Wellenfläche in elliptischen Coordinaten in der Form:

$$(q+r-a-b-c)(r+p-a-b-c)(p+q-a-b-c) = 0.$$

Glr. (O.)

E. B. Elliott. On normals to envelopes; and on the envelopes, if any, to which a given doubly infinite set of straight lines are normals. Messenger (2) IX. 85-90.

Es ist eine bekannte Eigenschaft der Normale einer Fläche oder der Normalebene einer Curve, dass die senkrechte Entfernung eines Punktes auf der von der Tangentialebene resp. Tangente in ihrem Fuss gleich ist derjenigen für eine benachbarte Tangential-Ebene oder Linie. Ist nun ϖ der analytische Ausdruck für die Länge der Senkrechten auf die Tangential-Ebene oder Linie von einem Punkt, so dass $\varpi+d\varpi$ die auf die benachbarte ist, so besteht der Ort, welcher durch $d\varpi = 0$ gegeben ist, aus der Normal-Linie oder Ebene entweder allein oder zusammen mit einem andern Ort, dessen Punkte dieselbe Eigenschaft haben. Der Verfasser untersucht, was dieser Ort in speciellen Fällen darstellt. Glr. (O.)

---

v. Braunmühl. Ueber die kürzesten Linien der developpablen Flächen. Bair. Bl. XV. 402-405.

Die Gleichungen dieser geodätischen Linien werden mit Hülfe moderner Methoden entwickelt. Als Beispiel dient die Schraubenlinie.

Gr.

V. Strouhal. Ueber die Krümmungslinien der geraden Schraubenfläche. Arch. mathem. a fysiky. II. 69-94.

Es werden die Hauptkrümmungsrichtungen, daraus die Krümmungslinien berechnet, discutirt, construirt und die Eigenschaften hervorgehoben, dass die Krümmungslinien jeder Schaar congruent, diejenigen, welche verschiedenen Schaaren angehören, symmetrisch sind.

H.

A. de Saint-Germain. Lignes de courbure de la surface $z = L\cos y - L\cos x$. Nouv. Ann. (2) XVIII. 201-204.

Die Betrachtung schliesst sich gewissermassen an die von Herrn Tissérand in seinen „Exercices sur le calcul infinitésimal" (p. 329) über die Fläche

$$z = -L\cos y - L\cos x$$

an. Durch schachbrettartige Eintheilung der xy-Ebene kann man den Verlauf derselben einfach übersehen; als Differentialgleichung der Projection der Krümmungslinie findet man, wenn man setzt

$$\frac{1}{\cos x} = u; \quad \frac{1}{\cos y} = v,$$

$$(udv - vdu)^2 - (du^2 + dv^2) = 0,$$

welche sich leicht durch die Substitution $u = \varrho\cos\omega$, $v = \varrho\sin\omega$ weiter behandeln lässt und schliesslich auf das Integral

$$\cos y = \frac{\sin\alpha\cos x}{\cos\alpha - \cos x}$$

führt. In der Abhandlung steht durch einen Druckfehler $\cos\alpha . \cos x$ statt $\cos\alpha - \cos x$ im Nenner. Aus dieser Gleichung kann nun der Verlauf der Krümmungslinien leicht beurtheilt werden.

A.

F. Minding. Zur Theorie der Curven kürzesten Umringes bei gegebenem Flächeninhalt auf krummen Flächen. Borchardt J. LXXXVI. 279-290.

In früheren im Bull. d. St. Pét. XXI., XXIV., XXV. veröffentlichten Mittheilungen (s. F. d. M. VIII. 1876. 225, IX. 1877. 281, X. 1878. 271) hat der Verfasser die entsprechenden Aufgaben für speciellere Fälle, namentlich für Umdrehungsflächen behandelt. Die vorliegende Arbeit bezieht sich auf das Problem in seiner allgemeinsten Fassung, also bei beliebigen Flächen, wendet sich aber später auch wieder den Rotationsflächen zu. Zunächst weist der Verfasser nach, dass die Gestalt der Curve zugleich die Gleichgewichtslage eines Fadens von unveränderlicher Länge ist, welcher sich auf der Fläche befindet und ausserdem durch eine überall gleiche in der Tangentialebene senkrecht zum Faden gerichtete Kraft P gespannt ist, und dass die geodätische Krümmung des Fadens constant ist. Ist das Feld durch feste Grenzcurven eingeengt, so erfordern die Trennungsstellen von diesen eine besondere Betrachtung, der Faden schliesst sich in den Trennungsstellen in tangentialer Richtung an die Grenzcurve an; diese und ähnliche Sätze, welche Steiner im 24ten Bande des Crelle'schen Journals zuerst ausgesprochen hat, entwickelt der Verfasser mit Hülfe der statischen Beziehungen. Die Differentialgleichung für die Curve, welche ziemlich verwickelt ist, wird nun vereinfacht, wenn es möglich ist, die Coordinaten der Fläche auf zwei solche Parameter p und q zu beziehen, dass die Curven $p =$ const. selbst Curven kürzesten Umringes sind, während die Curven $q =$ const. dazu orthogonal sind; dies erfordert eine Bedingungsgleichung, welche bei Umdrehungsflächen erfüllt wird, wenn $p =$ const. die Parallelkreise, $q =$ const. die Meridiane sind. Stellt man nun die Aufgabe, auf einer Umdrehungsfläche ein gegebenes Flächenstück durch eine Curve kürzesten Umringes zu begrenzen, so zeigt sich, dass diese letztere aus zwei analytisch ganz verschiedenen Theilen besteht; nämlich aus einem Parallelkreisbogen und dem anderen Theil, welcher sich stetig an beiden Enden ansetzt, so dass die ganze Figur symmetrisch wird. Nur ausnahmsweise kann der Parallelkreisbogen verschwinden. A.

Sophus Lie. Bestimmung aller in eine algebraische Developpable eingeschriebenen algebraischen Integralflächen der Differentialgleichung $s = 0$. Arch. f. Math. og Nat. IV. 334-344.

Die Integralflächen der partiellen Differentialgleichung $s = 0$ besitzen bekanntlich die Gleichungsform

$$z = F(x) + \Phi(y).$$

Diejenige Integralfläche, die eine vorgelegte Curve $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}$ enthält, und welche längs derselben gegebene Tangentialebenen mit den Richtungscosinus X, Y, Z besitzt, wird bestimmt durch die Formel

$$z = -\int \frac{X}{Z} d\underline{x} - \int \frac{Y}{Z} d\underline{y}.$$

Sind $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}, X, Y, Z$ gegebene algebraische Functionen einer Hülfsvariablen, so ist die zugehörige Fläche im allgemeinen transcendent.

In der vorliegenden Note wird nun gezeigt, dass es immer ∞^{∞} algebraische Integralflächen giebt, die in eine vorgelegte algebraische Developpable eingeschrieben sind; gleichzeitig werden alle diese eingeschriebenen algebraischen Flächen durch einfache Constructionen bestimmt.

Betrachtet man eine beliebige partielle Differentialgleichung, deren Integralflächen die Gleichungsform

$$x = At + A_1\tau,$$
$$y = Bt + B_1\tau,$$
$$z = Ct + C_1\tau$$

besitzen, so gelten immer ähnliche Sätze. Hierher gehört insbesondere die partielle Differentialgleichung der Minimalflächen.

L.

Sophus Lie. Weitere Untersuchungen über Minimalflächen. Arch. f. Math. og Nat. IV. 477-506.

Die von Monge herrührende Gleichungsform der Minimalflächen

$$x = A(t)+A_1(\tau),\quad y = B(t)+B_1(\tau),\quad z = C(t)+C_1(\tau),$$
$$dA^2+dB^2+dC^2 = 0,\quad dA_1^2+dB_1^2+dC_1^2 = 0$$

zeigt, wie der Verfasser bei verschiedenen Gelegenheiten hervorgehoben hat, dass jede solche Fläche in zwei Weisen durch Translationsbewegung einer Curve, deren Bogenlänge gleich Null ist, erzeugt werden kann. Sucht man alle Minimalflächen, die durch Translationsbewegung einer Curve, deren Bogenlänge von Null verschieden ist, erzeugt werden, so erhält man nur die zuerst von Scherck entdeckte Minimalfläche

$$e^{2ny}\cos n(\varrho x-rz)+\cos n(\varrho x+rz) = 0$$

mit ihren Ausartungen, unter denen die Schraubenfläche sich findet. Jede solche Fläche wird in unendlich vielen verschiedenen Weisen durch Translationsbewegung einer Curve erzeugt. Die Haupttangenten einer solchen Fläche sind in jedem Punkte conjugirte Gerade hinsichtlich unendlich vieler Kegelschnitte, und es giebt überdies keine weiteren Flächen, die diese Eigenschaft besitzen. Unsere Flächen sind daher die allgemeinsten Minimalflächen, die durch unendlich viele (nicht orthogonale) lineare Transformationen wiederum in Minimalflächen übergeführt werden.

L.

Sophus Lie. Beiträge zur Theorie der Minimalflächen. Clebsch Ann. XIV. 331-416; XV. 465-506.

Die erste Abhandlung hat die Ueberschrift: „Projectivische Untersuchungen über algebraische Minimalflächen“, und enthält bemerkenswerthe Methoden zur Bestimmung von Classe und Ordnung einer beliebigen Minimalfläche; die zweite: „Metrische Untersuchungen über algebraische Minimalflächen“ entwickelt den allgemeinen Zusammenhang zwischen der Krümmungstheorie aller algebraischen Raumcurven und der Theorie aller algebraischen Minimalflächen, die in eine vorgelegte algebraische Developpable eingeschrieben sind. Da beide Abhandlungen im Wesentlichen mit denjenigen übereinstimmen, die der Herr Verfasser früher im Arch. f. Math. II. 295—337; III. 166—176; IV. 224—233, 340—351 veröffentlicht hat, so verweisen wir auf die bezüglichen

Referate des Herrn Verfassers F. d. M. IX. 1877. 572 und X. 1878. 542—544. M.

H. A. Schwarz. Ueber einige nicht algebraische Minimalflächen, welche eine Schaar algebraischer Curven enthalten. Borchardt J. LXXXVII. 146-160.

Bisher sind von nicht algebraischen Minimalflächen, welche eine Schaar algebraischer Curven enthalten, nur diejenigen untersucht, welche von einer Schaar von Kegeln zweiten Grades umhüllt werden, und ihre speciellen resp. Grenzfälle, nämlich die Meusnier'sche Schraubenfläche, die durch die Rotation der Kettenlinie um ihre Directrix als Axe entstehende Rotationsfläche, die Catalan'sche Minimalfläche, welche eine Schaar von Parabeln enthält, und die von Riemann und Enneper untersuchten Minimalflächen, welche eine Schaar von Kreisen enthalten. Herr Schwarz versucht nun im Vorliegenden die Lösung der allgemeinen Aufgabe, alle nicht algebraischen Minimalflächen zu bestimmen, welche eine Schaar algebraischer Curven enthalten. Es wird zunächst der Fall genauer untersucht, in welchem die algebraische Classe jeder auf der Minimalfläche liegenden Curve der Schaar unter der durch die beiden Grössen

$$s = \frac{X+Yi}{1+Z} \quad \text{und} \quad F(s) = \frac{dx+i(Zdy-Ydz)}{(1-s^2)ds} \quad \text{etc.}$$

bestimmten algebraischen Classe enthalten ist. Alsdann wird der Fall erörtert, in welchem die Grössen s und $F(s)$ eindeutige elliptische Functionen eines Argumentes u sind. M.

L. Henneberg. Bestimmung der niedrigsten Classenzahl der algebraischen Minimalflächen. Brioschi Ann. (2) IX. 54-57.

Es wird der Beweis geführt, dass keine algebraische Minimalfläche von der dritten oder vierten Classe existiren kann. Zum Beweise dienen folgende Hülfssätze: „Jeder Cylinder, welcher eine algebraische Minimalfläche berührt, hat zum Orthogonalschnitte die Evolute einer algebraischen Curve. Jede

Minimalfläche, welche von einem Cylinder berührt wird, dessen Orthogonalschnitt die Evolute einer transcendenten Curve ist, ist eine transcendente Fläche". M.

Capitel 4.

Liniengeometrie (Complexe, Strahlensysteme).

T. A. Hirst. Note on the complexes generated by two correlative planes. Proc. L. M. S. X. 131-143.

Der Verfasser hatte schon früher die correlative Verwandtschaft zwischen zwei Ebenen eingehend studirt (Proc. L. M. S. 1874. V. p. 40, s. F. d. M. VI. p. 347). Hier untersucht er den Complex zweiten Grades, welcher dadurch entsteht, dass man bei zwei correlativ auf einander bezogenen Ebenen α und β jeden Punkt der einen Ebene mit jedem ihm conjugirten Punkte, d. h. mit jedem Punkte des ihm entsprechenden Strahls der andern Ebene verbindet. Der Schnittlinie der beiden Ebenen α und β entspricht durch die Correlation in jeder Ebene ein Punkt und zwar A_0 in β und B_0 in α. Ferner giebt es auf dieser Schnittlinie zwei Punkte C_1 und C_2, deren jeder sich selbst conjugirt ist. Daraus folgt, dass sowohl jeder in α oder β liegende Strahl, wie auch jeder durch C_1 und C_2 gehende Strahl zu den Complex-Strahlen gehört. Die sämmtlichen von einem Punkte auf α oder β ausgehenden Strahlen bilden immer zwei Strahlbüschel, d. h. die Punkte auf α und β sind singulär. Zu den singulären Ebenen, d. h. solchen, deren Complex-Kegelschnitt in zwei Strahlen zerfallen ist, gehören zunächst alle diejenigen, welche einen Punkt der einen Ebene mit einem Strahle der andern Ebene verbinden, oder, was dasselbe ist, die Schnittebenen aller solcher zwei Strahlen auf α und β, die sich schneiden und dabei conjugirt sind. Ausserdem aber ist auch jede Ebene singulär, die durch C_1 oder C_2 geht. Daraus ergiebt sich dann, dass die singuläre Fläche vierter Ordnung vierter Classe des Complexes in zwei Flächen zweiten Grades zerfällt, von denen die eine

ausgeartet ist, indem sie sich aus α, β, b_1, b_2 zusammensetzt, die andere Fläche als Ort der Verbindungsebenen der Punkte von α und β mit den ihnen entsprechenden Strahlen auftritt. Diese Fläche enthält die vier Geraden A_0C_1, A_0C_2, B_0C_1, B_0C_2, welche mit der Schnittlinie von α und β zusammen die fünf Doppellinien des Complexes bilden. Nachdem der Verfasser dann auch noch die von den singulären Linien des Complexes gebildete Congruenz untersucht hat, betrachtet er die quadratische Verwandtschaft, welche auf den beiden Ebenen durch die ∞^2 Paare von Strahlen festgesetzt wird, die sowohl conjugirt sind, wie auch sich schneiden. Während nämlich je zwei ein solches Paar constituirender Strahlen sich ein-eindeutig entsprechen, umhüllen alle diejenigen Strahlen, welche den Strahlen eines Strahlbüschels entsprechen, einen Kegelschnitt. Bei dieser quadratischen Verwandtschaft bilden $B_0C_1C_2$ die drei Hauptpunkte in α, $A_0C_1C_2$ die drei Hauptpunkte in β. Den Schluss der interessanten, rein geometrisch gehaltenen Untersuchung bildet die Besprechung derjenigen Ausartungen des betrachteten Complexes, welche entstehen, erstens wenn die Punkte C_1 und C_2 zusammenfallen, zweitens, wenn A_0 und B_0 auf der Schnittgeraden liegen, der sie entsprechen, drittens, wenn A_0 und B_0 zusammenfallen. Bemerkt mag noch werden, dass der hier durch correlative Ebenen erzeugte Complex zweiten Grades mit demjenigen identisch ist, den Herr Weiler in Artikel 13 seiner Abhandlung „Ueber die verschiedenen Gattungen der Complexe zweiten Grades“ (Clebsch Ann. 1874. VII. p. 177, s. F. d. M. V. 1873. p. 416) beschreibt.

Scht.

E. Caporali. Sopra alcuni sistemi di rette. Nebst Bericht von E. Fergola, N. Trudi, E. Padova. Rend. di Nap. XVIII. 244-249.

A. Voss. Zur Theorie der linearen Connexe. Clebsch Ann. XV. 355-359.

Für ein von Clebsch in den Göttinger Nachrichten 1872, Clebsch Ann. VI. 205 (siehe F. d. M. IV. p. 64) ausgesprochenes Theorem über Collineationen, welches von verschiedenen Geometern in Zweifel gezogen war, wird hier ein Beweis gegeben. (Siehe das Referat über Rosanes, Linear abhängige Punktsysteme, Borchardt J. LXXXVIII. p. 241 s. diesen Band p. 484).

V.

G. Battaglini. Sui complessi di secondo grado. Acc. R. d. L. (3) III. 43.

V.

G. Battaglini. Sui connessi ternarie di 2° ordine e di 2° classe in involuzione semplice. Rend. di Nap. XVIII. 176-178.

F. Schur. Geometrische Untersuchungen über Strahlencomplexe ersten und zweiten Grades. Clebsch Ann. XV. 432-465.

Herr Schur zeigt in dieser reichhaltigen Arbeit, wie sich die bisher durch vorwiegend analytische Betrachtungen gewonnenen Resultate über Strahlencomplexe ersten und zweiten Grades auf rein synthetischem Wege herleiten lassen. Dieselbe umfasst gleichzeitig auf Grund einer Abbildung des linearen Complexes auf den Punktraum eine Theorie der Strahlensysteme zweiter Ordnung und Classe und zerfällt in drei Capitel.

Im ersten wird eine Abbildung des linearen Complexes auf den Punktraum erläutert, vermöge deren jedem Punkte ϱ zwei Strahlen p_1, p_2, jeder Ebene σ zwei Strahlen s_1, s_2 entsprechen. (Dieselbe geht in einem speciellen Falle in die bekannte Nöther'sche Abbildung über.) Dabei bilden die Punkte ϱ, denen zusammenfallende Strahlen p entsprechen, eine Fläche zweiten Grades χ, deren Tangentenebenen σ gleichzeitig nur ein einziger Strahl s zugehört. Beschreibt ferner ein Punkt eine Fläche n^{ter} Ordnung φ_n, so erfüllen die entsprechenden Strahlen p_1, p_2

ein Strahlensystem n^{ten} Grades, dessen Brennfläche den gemeinsamen Tangenten von φ und χ entspricht.

Auf Grund dieser Abbildung untersucht der Verfasser im zweiten Capitel das Strahlensystem zweiter Ordnung. Den Erzeugenden der Fläche zweiten Grades φ entsprechend enthält dasselbe zwei Regelflächenschaaren zweiten Grades; vier andere Paare von solchen ergeben sich durch die bekannten Eigenschaften des Büschels φ, χ, also im ganzen fünf gleichwerthige Paare von Schaaren. Weiter ergeben sich die bekannten Eigenschaften des Strahlensystemes zweiter Ordnung und seiner Brennfläche vermöge der Tangenten von φ, welche Erzeugende von χ sind, sowie die verschiedenen Arten der allgemeinen Strahlensysteme 2^{ter} Ordnung und Classe nach der gegenseitigen Lage der Flächen φ und χ. Auf die interessante Erzeugung der Strahlensysteme 2^{ter} Ordnung durch zwei reciproke Bündel von linearen Strahlensystemen, welche den wichtigsten Theil dieses Abschnittes bildet, kann hier nur hingewiesen werden.

Im dritten Capitel endlich wendet sich der Verfasser zur Untersuchung des Complexes zweiten Grades. In zwei reciproken Bündeln linearer Complexe entspricht jedem Complexe A des ersten ein Strahlensystem S des zweiten; die Gesammtheit der Regelflächen A, S bestimmt einen Complex zweiten Grades. Aber auch umgekehrt kann, wie gezeigt wird, jeder Complex auf diesem Wege erzeugt werden. Jedem Paare von Flächen zweiten Grades (Grundflächen), auf welches sich solche Bündel linearer Complexe A, A' beziehen, gehört dann eine bestimmte Erzeugung an. Der Verfasser untersucht nun näher die Systeme dieser Grundflächen, und gelangt so, was hier nicht näher ausgeführt werden kann, zu einer Darlegung der Eigenschaften des Complexes und seiner Singularitätenfläche, die, wenn auch die Resultate nicht wesentlich über die bereits durch Plücker und Klein dargelegten Verhältnisse hinausgehen, doch dieselben in einem neuen und interessanten Lichte erscheinen lässt. V.

E. Bertini. Sui complessi di secondo grado. Battaglini G. XVII. 1-9.

Die Pole aller Complexcurven eines Complexes zweiten Grades, deren Ebenen sich um eine feste Gerade (Polare) drehen, liegen auf der Polaren der letzteren; diese wird gleichzeitig umhüllt von allen Polarebenen der Geraden in Bezug auf die von ihren Punkten ausgehenden Complexkegel. Auf Grund dieser bekannten Eigenschaft wird hier ein synthetischer Beweis des von Plücker (Neue Geometrie des Raumes 327) analytisch bewiesenen Satzes gegeben: „Die Polaren der Seiten eines einer Complexcurve conjugirten Dreiecks und die Polargeraden seiner Ebene in Bezug auf die von den Ecken desselben ausgehenden Complexkegel sind zwei Tripel von Erzeugenden verschiedener Art eines Hyperboloids, dessen Pol in Bezug auf die Ebene der Complexcurve für alle dieser letzteren conjugirten Dreiecke derselbe und gleichzeitig Pol jener Ebene in Bezug auf die Singularitätenfläche des Complexes ist."

V.

F. Aschieri. Sui complessi tetraedrali. Rend. Ist. Lomb. (2) XII. 426-433.

Der Verfasser giebt eine zusammenhängende Darstellung der Haupteigenschaften dieses bereits häufig untersuchten Complexes auf Grund der folgenden Abbildung: Betrachtet man zwei Paare gegenüberliegender Seiten eines Tetraeders als einem linearen Complexe C_1 und einem Hyperboloide H angehörig, so kann man jedem Punkte P des Raumes die Durchschnittslinie p seiner Polarebenen in Bezug auf C_1 und H zuordnen; die Geraden p bilden einen tetraedralen Complex. V.

F. Aschieri. Sui sistemi di rette. Rend. Ist. Lomb. (2) XII. 409-412.

Synthetischer Beweis zweier bekannter Sätze über das Büschel linearer Complexe. V.

Weiler. Die Involution auf einer Raumcurve dritter Ordnung und der daraus entstehende Complex. Schlömilch Z. XXIV. 159-168.

Legt man durch irgend eine Sekante einer cubischen Raumcurve ein involutorisches Ebenenbüschel, so schneiden dessen Ebenenpaare die Raumcurve in Punkten einer Involution. In je zwei durch die Involution zusammengehörigen Punkten ziehe man die beiden Tangenten und alle Geraden, welche sie beide schneiden. Dadurch wird ein einstufiges System von linearen Congruenzen erzeugt, dessen ∞^3 Strahlen einen Complex bilden. Dieser Complex zerfällt in die beiden speciellen linearen Complexe, deren Träger in den Doppelpunkten der Involution berühren, und in einen besonderen Complex dritten Grades. Den letztgenannten Complex untersucht der Verfasser sehr eingehend hinsichtlich seiner Singularitäten und seiner Lage zu der gegebenen Raumcurve. Scht.

Weiler. Einfacher Beweis des Satzes von Desargues. Schlömilch Z. XXIV. 248.

Die drei Strahlenpaare, welche von einem Punkte an die dreimal zwei Schnittpunkte von vier Strahlen gezogen werden können, bilden eine Involution, und ebenderselben Involution gehören auch die beiden Tangenten an, welche von dem Punkte an einen die vier Strahlen berührenden Kegelschnitt gezogen werden können. Diesen bekannten Satz und den ihm dual entsprechenden Satz beweist der Verfasser auf synthetischem Wege. Scht.

F. Aschieri. Sulla rappresentazione dello spazio rigato con un sistema di coniche in un piano. Rend. Ist. Lomb. (2) XII. 265-269.

F. Aschieri. Immagine piana dei complessi e delle loro intersezioni. Rend. Ist. Lomb. (2) XII. 341-347.

Die interessante Bemerkung des Herrn Cremona, dass der Linienraum sich durch das System der Kegelschnitte Σ, welche den einem festen Kegelschnitt C umgeschriebenen Dreiecken umschrieben sind, auf die Ebene abbilden lässt, wird hier näher verfolgt. Einem Geradenbündel (stella) entsprechen dabei Kegelschnitte Σ mit einem gemeinsamen Punkte, einem Geradenfeld (piano rigato) solche durch die Ecken eines jener Dreiecke. Den zerfallenden Curven Σ entspricht ein Complex 3^{ten} Grades; es ist der zu einer Raumcurve dritter Ordnung gehörige, deren Tangenten zu Bildern die Tangenten von C (doppelt gezählt) haben. So gelangt der Verfasser zu folgender synthetischer Darstellung obiger Abbildung: Man beziehe eindeutig die Punkte einer Ebene π und die Sehnen einer R_3 dadurch aufeinander, dass man den Ecken des in π liegenden Sehnendreiecks in den erzeugenden projectiven Geradenbündeln der R_3 die Ebenen entsprechen lässt, welche durch das Centrum eines derselben und die bezüglich gegenüberliegende Seite jenes Dreiecks gehen. Dann entsprechen den Tangenten der R_3 die Punkte eines Kegelschnittes C in π und den Punkten eines Kegelschnittes aus dem System Σ Sehnen der R_3, welche eine feste Gerade schneiden.

In der zweiten Note wendet der Verfasser die eben erläuterte Abbildung auf den linearen Complex an.

V.

W. Fiedler. Geometrische Mittheilungen. II. Zur projectivischen Verbindung der Gebilde höherer Stufen. Wolf Z. XXIV. 180-189.

Der Verfasser erläutert zunächst, was man unter linearen Gebilden der verschiedenen Stufen zu verstehen hat, und wendet sich dann zu der Frage nach der Anzahl der Variablen und der Stufenzahl, welche eine geometrische Construirbarkeit des Erzeugnisses zulassen.

O.

Capitel 5.

Verwandtschaft, eindeutige Transformationen, Abbildungen.

A. Verwandtschaft, eindeutige Transformation und Abbildung.

C. Andréeff. Ueber die geometrische Verwandtschaft. Mosk. Math. Samml. IX. 361-432.

P.

Emil Weyr. Ueber die Abbildung einer rationalen ebenen Curve dritter Ordnung auf einen Kegelschnitt. Wien. Ber. LXXXI.

Bei der Ableitung der Beziehungen zwischen den auf der Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt gelegenen Punktgruppen und deren Bildern auf einem Kegelschnitt wird hauptsächlich der bekannte Satz benutzt, dass die beiden Linien, welche den Doppelpunkt der C_3 mit zwei conjugirten Punkten (d. h. zwei Punkten, die denselben Tangentialpunkt haben) verbinden, harmonisch liegen zu den beiden Tangenten im Doppelpunkte.

Nr.

E. Amigues. Recherches sur deux modes de transformation des figures solides. Nouv. Ann. (2) XVIII. 548-564.

Der Verfasser kennt nichts von der Literatur über den Gegenstand, so dass er von der falschen Voraussetzung ausgeht, die durch drei lineo-lineare Gleichungen gegebene Beziehung zwischen zwei ebenen Räumen sei die allgemeinste rationale. Hiernach glaubt er auch durch Behandlung der speciellen Transformation

$$x:y:z:t = \frac{1}{x'}:\frac{1}{y'}:\frac{1}{z'}:\frac{1}{t'}$$

einen grossen Schritt im Flächenstudium zu thun, während er nur die ersten Elemente eines längst ausgeführten Studiums vorführt. Nr.

L. BIANCHI. Sulla trasformazione per raggi vettori reciproci nel piano e nello spazio. Battaglini G. XVII. 40-42.

Nach Liouville (Monge, Application de l'Analyse à la Géométrie) giebt es im Raume (die Aehnlichkeitstransformationen ausgeschlossen) nur eine Transformation, bei welcher die Aehnlichkeit in den kleinsten Theilen erhalten bleibt, nämlich die durch reciproke Radienvectoren. Die vorliegende Note enthält den Beweis, dass man auch in der Ebene ein analoges Theorem hat, wenn man sich nämlich auf die eindeutig umkehrbaren rationalen Transformationen beschränkt. Denn den Strahlen aus den beiden Kreispunkten der einen Ebene müssen die Strahlen aus den beiden Kreispunkten der andern Ebene entsprechen, wie man leicht durch projectivische Definition des Winkels einsieht. Aehnlich einfach würde auch der Beweis für den Raum, wenn man sich auch hier auf die rationalen Raumtransformationen beschränken wollte. Nr.

CREMONA und BELTRAMI. Relazione intorno ad una memoria di geometria pura del sig. ingeg. Fr. Chizzoni: „Sulla superficie e sulle linee che si ottengono come inviluppo delle rette congiungenti i punti corrispondenti di due curve omografiche piane.“ Acc. R. d. L. (3) III 67-79.

Die Verbindungslinien entsprechender Punkte zweier linear auf einander bezogener Ebenen bilden ein System von Geraden, durch welche je drei Tangentenebenen an eine gewisse abwickelbare Fläche vierter Ordnung Σ gehen. Auf die Untersuchung dieser Fläche Σ gründet sich die Abhandlung von Chizzoni, welche in dem vorliegenden Bericht eingehend skizzirt wird und

welche in den Atti erscheinen soll. Dem Berichte seien noch einige Angaben über den Inhalt entnommen.

Es tritt unter anderm eine bemerkenswerthe Transformation von Raum in Ebene auf: Den Punkten des Raumes entsprechen die Scheitel der Dreiecke, die einem festen Kegelschnitte umschrieben sind; den Geraden des Raumes die solchen Dreiecken umschriebenen Kegelschnitte; und die Transformation ist auch als Projection, mittels der oben genannten Geraden als projicirenden Strahlen, aufzufassen. Es ergeben sich Sätze wie: In eine ebene Curve der Ordnung μ kann man $\frac{1}{3}\mu(\mu-1)(\mu-2)$ Dreiecke einschreiben, die einem gegebenen Kegelschnitt umschrieben sind etc.

Nr.

E. Caporali. Sulle trasformazioni univoche piane involutorie, nebst Bericht von N. Trudi, E. Fergola, G. Battaglini. Rend. di Nap. XVIII. 211-218.

Em. Weyr. Ueber Involutionen n^{ten} Grades und k^{ter} Stufe. Wien. Ber. LXXIX.

Wenn die Elemente einer rationalen ebenen oder Raum-Curve in einer solchen Wechselbeziehung stehen, dass durch Annahme von k Elementen weitere $n-k$ Elemente $(n>k)$ so bestimmt erscheinen, dass diese mit jenen eine Gruppe von n Elementen bilden, von denen je k beliebige die übrigen $n-k$ Elemente bestimmen, so nennt der Verfasser diese Art von Verwandtschaft eine Involution n^{ten} Grades und k^{ter} Stufe (I_n^k). Hält man in einer I_n^k $p(<k)$ Elemente fest, so bilden die variablen Elemente eine I_{n-p}^{k-p}; der Verfasser nennt sie der p-elementigen Gruppe adjungirt. Von den k Elementen, die eine Gruppe einer I_n^k bestimmen, kann man beliebig viele in ein k'-faches $(k'\leqq k)$ Element zusammenfallen lassen. Mit Hülfe des Chasles'schen Correspondenzprincips ergeben sich die Sätze: Beliebige $(k-l)$ Elemente kommen in $(l+1)(n-k)$ Gruppen mit je einem $(l+1)$-fachen Elemente vor. Jedes Element kommt in $k(n-k)$ Gruppen mit je einem k-fachen

Elemente vor. Die Zahl der $(k+1)$-fachen Elemente einer I_n^k ist $(k+1)(n-k)$. Eine rationale ebene Curve n^{ter} Ordnung C_n wird von einer Geraden in n Punkten getroffen, die eine „gerade Gruppe“ der C_n bilden. Alle geraden Gruppen der C_n bilden eine I_n^2. Eine rationale Raumcurve n^{ter} Ordnung wird von einer Ebene in n Punkten getroffen, die eine „ebene Gruppe“ der Curve bilden. Alle ebenen Gruppen derselben bilden eine I_n^3. Die Anwendung der obigen Sätze auf diese Fälle ergiebt die Classenzahl, die Zahl der Wendepunkte resp. Wendeschmiegungsebenen der rationalen ebenen und Raum-Curven, ferner die Zahl der durch eine gegebene Anzahl von Punkten gehenden eine rationale Curve mehrpunktig berührenden Curven resp. Flächen zweiter Ordnung. Die Gleichung einer I_n^k ist

$$f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_n f_n = 0,$$

wo $\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_k$ lineare Parameter, $f_0, f_1 \ldots, f_k$ Polynome des n^{ten} Grades darstellen. Sie zeigt, dass eine I_n^k unendlich viele Involutionen desselben Grades und aller niedrigeren Stufen enthält und dass sie durch $(k+1)$ beliebige Gruppen, die keiner Involution niederer Stufe angehören, bestimmt ist. In einer I_n^k kommen Gruppen von k Elementen von der Art vor, dass erst durch Hinzunahme noch eines Elements eine Gruppe von n Elementen der I_n^k bestimmt ist. Solche k Elemente, die also in unendlich vielen Gruppen der I_n^k vorkommen, nennt der Verfasser eine „neutrale Gruppe“ der Involution. Es gilt der Satz: Je $(k-2)$ beliebige Elemente einer I_n^k kommen in $\frac{(n-k)(n-k+1)}{2}$ neutralen Gruppen vor. Diese Zahlbestimmung, sowie diejenige der Gruppen einer I_n^k, deren jede k Doppelelemente enthält, findet ihre Anwendung in der Bestimmung der Zahl der mehrfachen Punkte, Tangenten und Tangentialebenen der rationalen Curven, sowie der Zahl der zwei- und dreipunktigen Sekanten der rationalen Raumcurven. Schliesslich wird die Frage behandelt, wie man zu den k beliebig gewählten Elementen einer Gruppe einer I_n^k die übrigen $n-k$ Elemente finden kann. B. K.

B. Conforme Abbildung.

V. Nachreiner. Abbildung krummer Flächen auf einander mit besonderer Berücksichtigung der conformen Projection. Pr. Speier.

Der Verfasser behandelt auf elementarem Wege mittels Darstellung der beiden Flächen in Polarcoordinaten, ihre conforme Beziehung, insbesondere die Möglichkeit der perspectivisch conformen Abbildung. Er leitet dabei Sätze der Art ab: Von den krummen Flächen lässt sich nur die Kugelfläche perspectivisch conform auf eine Ebene abbilden. Nr.

C. S. Peirce. A quincuncial projection of the sphere. Am J. II. 394-397.

Bedeutet ϑ die geographische Länge, l die Breite eines Punktes, und setzt man

$$\cos\varphi^2 = \frac{\sqrt{1-\cos l^2 \cos\vartheta^2} - \sin l}{1+\sqrt{1-\cos l^2 \cos\vartheta^2}},$$

dann ist $\frac{1}{2}F(\varphi)$ der Werth einer der rechtwinkligen Coordinaten des abgebildeten Punktes, oder einfacher: Ist p die Polardistanz und setzt man

$$\cos \operatorname{am} z = \operatorname{tg}\frac{p}{2} e^{i\vartheta},$$

wo der Winkel des Modulus $= \frac{\pi}{4}$ ist, so stellt der Punkt $z = x+iy$ die Abbildung dar. Die Kugel bildet sich ab als ein Quadrat, in dessen Mittelpunkt etwa der Nordpol liegt, während der Südpol nach jeder der vier Ecken fällt, der Aequator aber in dasjenige Quadrat abgebildet wird, dessen Seiten die Mitten des grösseren Quadrates verbinden. Die Abbildung ist überall endlich und conform bis auf die vier auf dem Aequator liegenden Verzweigungspunkte; sie setzt sich doppelt periodisch durch die Bildebene fort. Als besonderen Vortheil hebt der Verfasser hervor, dass diejenigen Theile, deren linearer Massstab grösser ist als das Doppelte des Massstabs im Centrum, nur 9 Procent der Oberfläche ausmachen, während es bei der stereographischen 50 Pro-

cent, bei der Mercator-Projection 13 Procent sind, und dass die grössten Kreise sich durchschnittlich in schwach gekrümmte Curven abbilden. Das letztere ist aber insofern zu beschränken, als dieselben in der Nähe der Verzweigungspunkte eine scharfe Umbiegung erfahren.

Ob die Abbildung für die Praxis sich besonders eignen wird, ist wohl zu bezweifeln, dagegen giebt sie, bezogen auf die stereographische, eine sehr einfache Darstellung der Verlaufes eines elliptischen Integrals erster Gattung. Dem Aufsatze ist eine Karte und die zur Construction dienenden Tabellen beigefügt.

A.

A. Tissot. Mémoire sur la représentation des surfaces et les projections des cartes géographiques. Nouv. Ann. (2) XVIII. 327-356, 385-398, 532-548.

Das Referat erfolgt im nächsten Jahrgang nach Vollendung der Arbeit.

Wn.

H. Wiechel. Rationelle Gradnetzprojectionen. Civiling. XXV. 401-422.

Der Verfasser stellt zunächst die Forderungen auf, welche an eine Karte gemacht werden können. Sie sind 1) Wiedergabe der Form der Erdkugel als Körper (Erdbild), 2) Formenähnlichkeit zwischen Erdoberfläche und Zeichnung (conforme Projection), 3) Flächengleichheit zwischen Erdoberfläche und Zeichnung mit Rücksicht auf das Verjüngungsverhältnis der Zeichnung (äquivalente Projection), 4) Coordinaten im richtigen Längenverhältnis, 5) loxodromische Curve eine Gerade. Punkt 1) führt zur Parallelprojection, 5) zur Mercatorprojection. Dagegen kann durch die Parallelprojection nicht zugleich die eine oder die andere der Bedingungen 2) bis 4) erfüllt werden. Der Verfasser untersucht, welche der drei Bedingungen 2) bis 4) am wesentlichsten seien, um daraus folgern zu können, welche von ihnen am ehesten geopfert werden könne, da allen dreien gleichzeitig zu genügen nicht möglich ist. Er findet, dass es für die Praxis ankomme auf

2) Congruenz in der Mitte der Karte, 3) Flächengleichheit, 4) geographische Coordinaten in einheitlichem Massstabe, dagegen auf Conformität im ganzen Umfange der Karte am leichtesten verzichtet werden könne. Er untersucht nun zunächst die hauptsächlichsten Transversalabwickelungen, bei denen die Hauptcoordinaten längs der Breitenkreise gehen, und sodann die Longitudinalabwickelungen, bei denen die Hauptcoordinaten längs der Längenkreise gehen. Die letztere, welche die vom Verfasser vorgeschlagene ist, wird eingehend besprochen, und speciell die Polarprojection, für welche sich diese Art besonders günstig erweist. Dem folgt dann eine Vergleichung derselben mit anderen bekannten Projectionen. Den Schluss bildet eine Besprechung des Einflusses der ellipsoidischen Gestalt auf die Projection.

O.

Zehnter Abschnitt.

Mechanik.

Capitel 1.

Allgemeines. (Lehrbücher etc.).

W. Schell. Theorie der Bewegung und Kräfte. Ein Lehrbuch der theoretischen Mechanik. I. Bd. 2te Aufl. Leipzig. Teubner.

Die erste Auflage dieses Buches ist bereits im 2ten Bande der F. d. M. 1870. p. 645 besprochen worden. In der neuen Auflage hat der Verfasser verschiedene Aenderungen vorgenommen. Die Geometrie der Strecken und Werthpunktsysteme ist zu einem Ganzen vereinigt, und als erster Theil dem Ganzen vorausgeschickt, während sie vorher, nach Bedürfnis, an verschiedenen Stellen vertheilt war. Sodann ist die Geometrie der Bewegung mit der Theorie der Bewegungszustände zu einem Theile der Kinematik vereinigt worden. Ferner hat namentlich die Lehre von der Beschleunigung im unveränderlichen Systeme eine wesentliche Erweiterung erfahren, der auch ein Abschnitt über den Geschwindigkeits- und Beschleunigungszustand veränderlicher Systeme neu angefügt ist. Endlich sind manche Punkte, wie die Anwendung des Imaginären, das Princip der kleinsten Wirkung, das Princip des letzten Multiplicators u. a. ausgeschieden und in den zweiten Theil verwiesen worden. Die Literaturangabe ist überall bis in die neueste Zeit fortgeführt worden. O.

J. Somoff. Theoretische Mechanik. Aus dem Russischen übersetzt von A. Ziwet. II. Einleitung in die Statik und Dynamik. Statik. Leipzig. Teubner.

Von dem vorliegenden zweiten Bande waren bei Lebzeiten des Verfassers nur die Einleitung und die beiden ersten Capitel erschienen. Jedoch lag das Manuscript zu dem übrigen Theile druckfertig vor, und ist auf Veranlassung der Petersburger Akademie herausgegeben worden. Aenderungen sind in der Uebersetzung nicht vorgenommen. In der Einleitung giebt der Verfasser, indem er die Cauchy'sche Definition und dessen Formeln zu Grunde legt, eine Theorie der Momente ersten und zweiten Grades, in welchem Abschnitt namentlich die Bestimmung von Massenmittelpunkten eingehend behandelt wird. Dem schliesst sich ein Abschnitt über Variationen von Massen- und Raumgrössen an, durch welche der Verfasser zur Continuitätsbedingung der Masse gelangt. Eingehend wird dann der Differentialparameter zweiter Ordnung einer Punktfunction behandelt, dem die Lamé'sche thermometrische Function folgt. Auf p. 154 beginnt die eigentliche Statik. Capitel 1 behandelt die nöthigen Definitionen, die Zusammensetzung der Kräfte, den Trägheitsmittelpunkt und das Gesetz von der Erhaltung der Bewegung der Trägheitsmittelpunkte. Capitel 2 ist der Potentialtheorie gewidmet. Im dritten Capitel werden dann die verschiedenen Formen der Gleichgewichtsbedingungen von Kräftesystemen aufgestellt, indem Vector und Moment als geometrische Grösse behandelt werden. Dann folgt im 4ten Capitel das Gleichgewicht an einem unveränderlichen Punktsystem und im 5ten die Theorie der Aequivalenz der Kräfte. Das 6te und letzte Capitel endlich giebt Untersuchungen über Centralpunkt, Centralebene, Gleichgewichtsaxen etc. Auf den reichen Inhalt des Buches näher einzugehen, verbietet der hier gestattete Raum. Hinzugefügt mag nur noch werden, dass überall Literaturnachweise gegeben sind. O.

W. Garnett. Treatise on elementary dynamics. London. Bell.

E. Wrobel. Die Physik in elementar-mathematischer Behandlung. Rostock. Werth.

Das vorliegende Buch enthält die Statik und Dynamik fester Körper in elementarer Behandlung und ist für den Gebrauch an höheren Lehranstalten bestimmt. Es bietet den gewöhnlichen Stoff solcher Bücher.

O.

A. Fuhrmann. Aufgaben aus der analytischen Mechanik. Erster Theil: Aufgaben aus der analytischen Statik fester Körper. Zweite Auflage. Leipzig. Teubner.

Der vorliegende erste Theil dieser Aufgaben enthält in der Einleitung Uebungen in der Bestimmung der Masse und der Gewichte ungleichförmig dichter Körper. Dann folgen im ersten Capitel Aufgaben über Gleichgewicht eines unvollkommen freien Punktes, also eines Punktes auf ebener und doppelt gekrümmter Linie, und auf einer Fläche. Capitel III. giebt Schwerpunktsbestimmungen von Linien, Flächen und Körpern unter Benutzung sowohl von Parallelcoordinaten als Polarcoordinaten. Unter den Flächen sind es namentlich die Cylinder- und Rotationsflächen, die Berücksichtigung finden, ebenso unter den Körpern die cylindrisch und von Rotationsflächen begrenzten. Capitel IV. behandelt das Gleichgewicht eines Systems, und zwar finden sich im ersten Abschnitt Probleme über die Standfähigkeit der Körper und im zweiten über das Gleichgewicht von Ketten und biegsamen Fäden. Im Capitel V. folgen dann Anwendungen des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten, und im sechsten Aufgaben über Anziehung. Den Aufgaben ist überall die Lösung beigefügt; vorauf geht jedem Capitel und Abschnitt eine Zusammenstellung dessen, was zur Lösung der folgenden Probleme erforderlich ist.

O.

H. Grassmann. Die Mechanik nach den Principien der Ausdehnungslehre. Clebsch Ann. XII. 1877. 222-240.

Die elementaren Begriffe und Methoden der Ausdehnungs-

lehre verdanken ihre Ausbildung hauptsächlich den Untersuchungen, welche Grassmann auf dem Gebiete der Mechanik anstellte, angeregt durch die ausserordentliche Einfachheit der Rechnungen in seiner 1840 verfassten Prüfungsarbeit über die Theorie der Ebbe und Fluth. Gleichwohl finden sich von diesen Untersuchungen in Grassmann's Werken nur vereinzelte Proben, nämlich Anwendungen auf die Mechanik in der „Ausdehnungslehre von 1844“, und eine zusammenhängende Darstellung der mechanischen Grundgesetze unter dem Titel „Grundriss der Mechanik (für den Unterricht in Prima)“ als Programm des Stettiner Marienstift-Gymnasiums 1867. Es war jedoch noch in seinen letzten Lebensjahren ein Lieblingsgedanke des verstorbenen Verfassers, in einer umfassenden und mehr in's Detail eingehenden Arbeit die Mechanik nach den Principien der Ausdehnungslehre darzustellen, und als zunehmende Kränklichkeit die Ausführung dieses Planes verhinderte, fand er wenigstens noch Zeit, in der vorstehend genannten Abhandlung die wichtigsten der für jene Arbeit nothwendigen Begriffe und Methoden in einer freilich mehr andeutenden als ausführenden Weise bekannt zu machen und dem Leser bei dieser Gelegenheit einen Einblick in den Gedankengang jener interessanten, bisher noch völlig unbekannten Arbeit über Ebbe und Fluth zu geben.

Nachdem in § 1 die für die folgenden Rechnungen nöthigen Begriffe der Ausdehnungslehre gegeben sind, wird in § 2 als Grundgleichung der Mechanik die Formel $d^2x = p$ aufgestellt, worin x die Verbindungsstrecke eines festen und eines beweglichen Punktes bedeutet, und p eine Strecke, durch welche die Wirkung der bewegenden Ursache dargestellt wird. (Von vornherein ist zu bemerken, dass die Interpretation der Gleichungen noch einfacher wird, wenn statt der Strecke x der bewegliche Punkt X selbst in die Rechnung eingeführt wird. Im Interesse des Lesers, welchem das Rechnen mit Zahlen resp. Strecken geläufiger ist, als das mit Punkten, hat Grassmann hier von der Einführung der Punkte Abstand genommen. Ein späterer Aufsatz, in welchem diese Betrachtungsweise nachgeholt werden sollte, ist nicht mehr erschienen.) Die in einem materiellen

Punkte liegende Ursache der Bewegung eines anderen materiellen Punktes wird „einfache Kraft" genannt, wenn ihre Wirkung nur von der gegenseitigen Lage beider Punkte abhängt. Die Grösse dieser Wirkung ist dann eine Function der Entfernung. Zwei Punkte A und B haben gleiche Masse, wenn A auf B dieselbe Wirkung übt, wie B auf A. In § 3 wird die Bewegung eines freibeweglichen Vereins von m materiellen Punkten betrachtet. Die Kräfte, mit welchen die Punkte des Vereins aufeinander wirken, werden als „innere" von den anderen „äusseren" unterschieden. Dann ist, wenn s die von dem festen nach dem Schwerpunkte des Vereins gezogene Strecke und p die Summe aller äusseren Kräfte bedeutet, $\delta^2 s = \frac{1}{m} \cdot p$ die Gleichung der Bewegung des Schwerpunktes. Die Gleichung

$$\delta \Sigma \tfrac{1}{2} (\delta x)^2 = \Sigma [p \mid \delta x]$$

sagt, dass die Zunahme der lebendigen Kraft während irgend einer Zeit gleich ist der Arbeit aller Kräfte während dieser Zeit. Darauf wird die Kraft p als partieller Differentialquotient des Potentials U nach der dem Punkte X_1 entsprechenden Strecke x_1 dargestellt und hierdurch die rechte Seite der letzten Gleichung auf die Form

$$V + \int \Sigma \left(\frac{\partial}{\partial x} U \mid \delta x \right)$$

gebracht, wo V das vollständige innere, U das vollständige äussere Potential ist. Im § 4 wird die Bewegung eines beschränkt beweglichen Vereins betrachtet. Die Beschränkung erfolgt erstens durch Bedingungsgleichungen ($L = 0$, $M = 0, \ldots$), welchen die gegenseitige Lage der Punkte unterworfen ist, zweitens durch Kräfte, welche die Punkte, sobald sie sich aus diesen Lagen entfernen, in dieselben zurücktreiben. Als Gleichung der Bewegung ergiebt sich dann

$$\Sigma [(\delta^2 x - p) \mid dx] = 0.$$

Die Bedingungsgleichungen $L = 0, \ldots$ nebst der eben aufgestellten Bewegungsgleichung umfassen auch, wie in § 5 auseinandergesetzt wird, den Fall des Gleichgewichts der Kräfte, sobald dieselben nur von der Lage der Punkte, nicht aber von der Zeit

abhängig sind. Um alsdann die Bedingungen des Gleichgewichts zu finden, hat man nur die Beschleunigungen und Geschwindigkeiten aller Punkte des Vereins gleich Null zu setzen. Umgekehrt jedoch constituiren diese Specialgleichungen kein Gleichgewicht, sondern nur eine schwingende Bewegung der Punkte um einen Gleichgewichtszustand, sobald die Kräfte mit der Zeit variiren. Diese schwingende Bewegung wird dann genauer bestimmt durch die Forderung, dass die Summe der während einer hinreichend grossen Zeit thätigen lebendigen Kräfte ein Minimum sei, wodurch gleichzeitig die kleinste Beweglichkeit des Vereins bedingt ist. Diese Art der Bewegung wird „mittlere“ genannt. Analytisch wird sie bestimmt durch die sogenannte „mittlere Integration“ einer Differentialgleichung. Der Begriff dieser Integration wird zuerst an dem Beispiel einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung klar gemacht. Es mögen n unabhängige Variable $u_1, \dots u_n$ mit einer unabhängigen Variablen t durch n Gleichungen von der Form

$$\delta^2 u_r + a_{r,1}\,\delta u_1 + \cdots + a_{r,n}\delta u_n + b_{r,1}\,u_1 + \cdots + b_{r,n}u_n = f_r t$$

verbunden sein, wo r von 1 bis n variirt und die Differentiale nach t genommen sind. Dann werden die rechten Seiten auf die Form $g_r e^{kt}$ gebracht und die Grössen u in Gliedern von der Form ce^{ht} dargestellt. Dann liefern die Glieder mit dem Factor e^{kt} das mittlere Integral, und man erhält die n Gleichungen

$$u_r = y_r e^{kt},$$

worin die Grössen y durch die n Gleichungen

$$k^2 y_r + ka_{r,1}y_1 + \cdots + ka_{r,n}y_n + b_{r,1}y_1 + \cdots + b_{r,n}y_n = g_r$$

bestimmt sind. (Setzt man $u_r = z_r e^{ht}$, wo $h \gtrless k$ ist, so sind die rechten Seiten der zwischen den z bestehenden Gleichungen gleich Null, und diese Gleichungen liefern eine Gleichung $2n^{\text{ten}}$ Grades in h, wodurch h bestimmt und die allgemeine Integration vollendet ist.) Für den vorliegenden Fall wird nun die oben angenommene Differentialgleichung noch in der Weise verändert, dass

$$ge^{kt} = c.\cos kt + c' \sin kt$$

gesetzt wird. Ein Glied von dieser Form wird „elliptisches

Glied" und k sein „Zeiger" genannt. Es wird dann bewiesen, dass die durch mittlere Integration erhaltenen Gleichungen gleichzeitig die Bedingungsgleichungen der mittleren Bewegung sind, und das Gesetz aufgestellt: „Wenn die Bewegung eines Vereins von Punkten durch lineare Differentialgleichungen dargestellt wird, so entsprechen den elliptischen Gliedern, welche in dem Ausdruck der Kraft vorkommen, elliptische Glieder von denselben Zeigern in allen Strecken, welche von einem festen Punkte nach den beweglichen Punkten gezogen sind, und zwar sind die Coefficienten dieser Glieder durch die gegebenen Gleichungen vollkommen bestimmt, und ausser diesen Gliedern treten bei der mittleren Bewegung keine anderen hervor."

Zum Schluss wird diese ganze Theorie auf das Problem der Ebbe und Fluth angewendet, und der Satz abgeleitet: „Die Bewegung, welche jeder Punkt des Meeres bei der Ebbe und Fluth vollendet, ergiebt sich durch die Interferenz von vier elliptischen Bewegungen, von denen zwei dieselbe Umlaufszeit haben, wie die scheinbare Umlaufszeit der Sonne und des Mondes beträgt, und die zwei anderen eine halb so grosse Umlaufszeit." Es zeigt sich dann, dass, wenn nur die senkrechte Bewegung eines Punktes der Meeresfläche bestimmt werden soll, die vierundzwanzig Constanten der vier elliptischen Glieder sich auf acht reduciren, in Uebereinstimmung mit Laplace Méc. cél. IV. 3. Am Schlusse ist angedeutet, wie dadurch, dass statt der Punkte $X_1 \dots X_m$ eine stetige räumliche Masse angenommen wird, die Oberfläche des Meeres zur Zeit t analytisch dargestellt werden kann. Die Form dieser Gleichung ist $y^2 = x^2 + 2xz$, wo z aus fünf elliptischen Gliedern besteht. Schg.

Rachmaninoff. Das Princip der kleinsten Arbeit der verlorenen Kräfte als ein allgemeines Princip der Mechanik. Schlömilch Z. XXIV. 206-220.

Der Verfasser[*] spricht das Princip mit folgenden Worten aus: „Bei der Bewegung eines Systems materieller Punkte hat die Arbeit, welche die verlorenen Kräfte bei freier Bewegung

[*] Fortschr. d. Math. XI. 3.

desselben Systems erzeugt hätten, den kleinsten Werth; der unendlich kleine Zuwachs jener Arbeit bleibt bei jeder Verschiebung, die in Verbindung mit der wirklichen eine mögliche Verschiebung zur Folge haben würde, positiv." In der Arbeit wird das Princip erläutert und sein Zusammenhang mit dem Gauss'schen Princip und anderen erörtert. O.

G. van der Mensbrugghe. Rapport sur un mémoire intitulé: De l'influence de la forme des masses sur leur attraction dans le cas d'une loi quelconque d'attraction pourvu toutefois que l'attraction diminue indéfiniment quand la distance augmente. Par C. Lagrange. Bull. de Belg. (2) XLVIII. 453-454.

Mn.

H. W. Watson and S. H. Barbury. Treatise on the application of generalised coordinates to the kinetics of a material system. London. Macmillan.

F. Neesen. Ueber die Anwendung der Methode der Dimensionen zum Beweise physikalischer Sätze. Pogg. Ann. (2) VII. 329-335.

Eine häufigere Benutzung der Methode, die Art der Abhängigkeit einer Grösse von Raum, Masse, Zeit aus den Dimensionen der zur Definition jener Grösse dienenden Fundamentalquantitäten zu bestimmen, wird empfohlen. Zwei Arten von Beispielen werden gegeben, um die Brauchbarkeit zu demonstriren. Zur ersten Art gehören die Bestimmung des Weges, welche ein gleichmässig beschleunigter Körper während der Zeit t zurücklegt, die Schwingungsdauer eines Pendels, die Grösse der Centrifugalkraft. Diese wird als jene Kraft definirt, „mit welcher sich nach dem Trägheitsprincip ein Körper allein seiner Richtungsänderung widersetzt, oder die Kraft, welche nöthig ist, um nur die Richtung um ein Bestimmtes zu ändern". Doch ferner glaubt der Ver-

fasser, dass man durch Anwendung der Methode der Dimensionen Integrationen wird ersparen können. Dabei weist er darauf hin, dass die Methode natürlich vorsichtig zu gebrauchen sei. Es werden wieder drei Beispiele gegeben durch Lösung der Aufgaben. Welcher Zusammenhang besteht zwischen Weg und Zeit, wenn 1) auf die Masse eine constante Kraft wirkt, 2) die Kraft mit einer Potenz der Zeit sich ändert, 3) die Kraft proportional mit einer Potenz des zurückgelegten Weges wächst. Rs.

Capitel 2.

Kinematik.

C. Formenti. Movimento delle figure che si mantengono simili a se stesse. Battaglini G. XVII. 232-243. —

Mit Hülfe complexer Grössen wird eine Reihe von Sätzen über die im Titel genannte Bewegung hergeleitet. O.

H. Résal. Note sur les différentes branches de la cinématique. C. R. LXXXIX. 1090-1092.

Der Verfasser reproducirt Ampère's Erklärung der Kinematik: „Diese Wissenschaft, sagt Ampère, muss alles das umfassen, was es an verschiedenen Arten der Bewegung giebt, unabhängig von den Kräften, welche sie hervorbringen. Sie muss sich also an erster Stelle mit allen den Untersuchungen beschäftigen, welche sich beziehen auf die in den verschiedenen Bewegungen durchlaufenen Räume, auf die dazu gebrauchten Zeiten und auf die Bestimmung der Geschwindigkeiten nach den verschiedenen Beziehungen, welche zwischen diesen Räumen und diesen Zeiten bestehen können. Sodann muss die Kinematik die verschiedenen Instrumente studiren, mit deren Hülfe man eine Bewegung in eine andere transformiren kann. Fasst man diese Instrumente, wie gebräuchlich, unter dem Namen „Maschine“ zusammen, so muss man die Maschine nicht, wie es gewöhnlich geschieht, als ein Instrument definiren, mit dessen Hülfe man die

Richtung und die Intensität einer gegebenen Kraft verändern kann, sondern als ein Instrument, mit dessen Hülfe man die Richtung und die Geschwindigkeit einer gegebenen Bewegung ändern kann.“ Später ist dieser allgemeine Begriff der Kinematik durch den Verfasser selbst und durch Bour in die beiden Theile reine und angewandte Kinematik geschieden worden, gemäss den beiden Aufgaben, die Ampère der Kinematik gestellt hatte. Jetzt ist durch Herrn Mannheim's Buch noch der Name „Kinematische Geometrie“ eingeführt worden, unter dem die Theorie der Bewegung, unabhängig von Kraft und Zeit, zu verstehen ist. O.

L. Geisenheimer. Untersuchung der Bewegung ähnlich-veränderlicher Systeme. Schlömilch Z. XXIV. 129-159.

Die Natur der Bewegung ähnlich-veränderlicher Systeme ist kürzlich von Herrn Burmester nach verschiedenen Richtungen hin untersucht worden. (Schlömilch Z. XXIII., siehe F. d. M. X. p. 587—590. 1878). Herr Geisenheimer entwickelt von anderen Gesichtspunkten ausgehend die wesentlichsten Gesetze für die Bewegung dieser Systeme und wendet sich alsdann besonders zu folgenden Fragen. Bewegt sich in dem ähnlich-veränderlichen System eine Curve C, deren Dimensionen und Lage sich nach Massgabe des Bewegungsgesetzes ändern, so bilden die auf einander folgenden Lagen eine Enveloppe. Diese Enveloppe berührt die Curve C in einem Punkte. Wie hängen die Elemente für den Berührungspunkt von C mit den Elementen des entsprechenden Punkts der Enveloppe zusammen? Die Gesetze für den einfachsten Fall, bei welchem die veränderliche Curve in einen Punkt zusammenschrumpft, also die Hüllbahn in die von diesem Punkte beschriebene Trajectorie übergeht, sind früher von Herrn Grouard (L'Institut 1869, p. 84, s. F. d. M. II. p. 371) entwickelt worden; es werden also hier die Fragen in allgemeinerer Form gestellt und beantwortet. Schn.

L. Geisenheimer. Die Bildung affiner Figuren durch ähnlich-veränderliche Systeme. Schlömilch Z. XXIV. 345-381.

Die Bewegung eines ähnlich-veränderlichen Systems ist durch die Bewegung zweier Systempunkte bestimmt. Werden dieselben so geleitet, dass sie affine Punktreihen durchlaufen, so beschreiben alle Systempunkte affine Punktreihen. Dieses Gesetz ist zuerst von Herrn Burmester (Schlömilch Z. XXIV. s. F. d. M. X. 1878. p. 587) bemerkt worden. Der Verfasser gelangt hierzu, indem er von der Untersuchung zweier affiner Systeme ausgeht. Zwei solche Systeme haben einen selbstentsprechenden Punkt, den Affinitätspol, und zwei in ihm sich schneidende selbstentsprechende Gerade. Bestimmt man zwei affine Systeme dadurch, dass man einem Dreieck ein anderes Dreieck als affines Gebilde entsprechen lässt, so hat der Affinitätspol zu den drei ähnlichen Systemen, für welche die Verbindungsstrecken der homologen Ecken der Dreiecke entsprechende Gerade sind, eine besondere Beziehung. Er fällt nämlich mit dem Wendepol dieser drei Systeme zusammen, so dass sich der Affinitätspol als Wendepol dreier ähnlicher Systeme construiren lässt. Nachdem der Verfasser noch andere Relationen zwischen diesen Systemen und jenen affinen Gebilden hergestellt hat, führt er zwei Punkte so, dass sie affine Punktreihen durchlaufen, und untersucht die durch jene Punkte bestimmte Bewegung eines ähnlichen Systems. Es zeigt sich, dass der Wendekreis in den verschiedenen Phasen der Bewegung des ähnlichen Systems aus denselben Punkten sich zusammensetzt, dass also der Wendekreis ein Systemkreis des ähnlich-veränderlichen Systems ist. Die Polcurve fällt mit dem Wendekreise zusammen, die Polbahn aber steht zu der Fusspunktcurve, welche der vom Wendekreismittelpunkt beschriebenen Trajectorie in Bezug auf den Affinitätspol angehört, in der Beziehung, dass sie mit ihr nach dem Verhältnis von 2:1 ähnlich ist und mit ihr den Affinitätspol als Aehnlichkeitspol besitzt. Weiter ergiebt sich, dass, wenn zwei Punkte eines ähnlich-veränderlichen Systems gerade Linien oder affine Punktreihen durchschreiten, die Bahnen aller Punkte affin sind. Der Affinitätspol zweier beliebiger Bahnen ist der gemeinschaftliche Schnittpunkt aller Wendekreise, und die selbstentsprechenden Geraden dieser Bahnen und die Verbindungslinie der in ihnen

bewegten Punkte schneiden sich auf dem Wendekreise. Nachdem auf Grund der entwickelten Sätze einige Relationen zwischen den Krümmungen in entsprechenden Punkten affiner Curven gegeben sind, werden die Eigenschaften solcher ähnlichen Systeme untersucht, in welchen die Trajectorien affine Gerade oder Kegelschnitte sind. In Betreff der Sätze, die sich bei dieser besonderen Leitungsform des Systems ergeben, muss auf die Arbeit selbst verwiesen werden. Schn.

R. Müller.*) Ueber Selbsthüllcurven und Selbsthüllflächen in ähnlich-veränderlichen Systemen. Schlömilch Z. XXII. 1877. 369-376.

In jedem einförmig bewegten ähnlich-veränderlichen System bleibt ein im Endlichen gelegener Punkt, der Aehnlichkeitspol, und eine durch ihn gehende Gerade, die Aehnlichkeitsgerade, während der ganzen Bewegung fest. Bei diesem Bewegungsvorgang gehen gewisse Flächen des ähnlich-veränderlichen Systems in sich selbst über, wie Burmester gezeigt hat (Schlömilch Z. XX. p. 381 s. F. d. M. VII. 1875. p. 535). Er nennt dieselben Selbsthüllflächen. Um zu ihren Gleichungen zu gelangen, schlägt der Verfasser folgenden Weg ein. Er nimmt den Aehnlichkeitspol zum Anfangspunkt, wählt die Aehnlichkeitsgerade zur zweiten Axe und stellt eine Systemfläche in Cylindercoordinaten in der Form $f(r, \omega\, z) = 0$ dar. Dreht sich das System um $d\omega$, und wachsen die Dimensionen gleichzeitig im Verhältnis von $1:1+dz$, so sind die Veränderungen von r und z bezüglich $rd\omega$ und zdz. Da die Gleichung einer Systemfläche gemäss ihrer Begriffsbestimmung ungeändert bleiben muss, so gelangt man zu der Bedingung

$$\frac{\partial f}{\partial r} rd\alpha + \frac{\partial f}{\partial \omega} d\omega + \frac{\partial f}{\partial z} zd\alpha = 0,$$

und aus dieser Gleichung ergiebt sich als partielle Differential-

*) Die vorstehende Arbeit ist durch einen von der Redaction nicht verschuldeten Zufall im Jahrgang 1877 nicht berücksichtigt worden. Das Referat wird daher hier nachgeholt. O.

gleichung der Selbsthüllflächen, wenn man $\frac{d\omega}{d\alpha} = \frac{1}{k}$ setzt,

$$r\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{k}\frac{\partial z}{\partial \omega} = z.$$

Durch Integration stellen sich die genannten Flächen in der Form dar

$$\log z - k\omega = f(\log r - k\omega);$$

in der That bleibt diese Gleichung ungeändert, wenn man z durch $e^{\lambda}z$, r durch $e^{\lambda}r$ und ω durch $\omega + \frac{\lambda}{k}$ ersetzt. Zwei Selbsthüllflächen werden repräsentirt durch

$$\log z - k\omega = f_1(\log r - k\omega) \quad \text{und} \quad \log z - k\omega = f_2(\log r - k\omega);$$

aus ihnen ergiebt sich für die Durchdringungscurve

$$F_1(\log r - k\omega) = 0 \quad \text{und} \quad F_2(\log z - k\omega) = 0.$$

Ihre Gleichungen lassen sich demnach auch in der Form ausdrücken:

$$\log r - k\omega = \log a \quad \text{und} \quad \log z - k\omega = \log b.$$

Diese Gleichungen bleiben ungeändert, wenn r durch $e^{\lambda}r$, z durch $e^{\lambda}z$ und ω durch $\omega + \frac{\lambda}{k}$ ersetzt werden; sie stellen also Selbsthüllcurven dar. Aus ihren Darstellungsformen werden nunmehr einige Eigenschaften dieser Curven hergeleitet. In einem folgenden Paragraphen wird gezeigt, dass die Differentialgleichungen der Krümmungslinien auf den Selbsthüllflächen sich integriren lassen, und endlich werden im letzten Paragraphen einige Betrachtungen speciellen Selbsthüllflächen gewidmet. Schn.

L. Burmester. Ueber das bifocal-veränderliche System. Clebsch Ann. XVI. 89-111.

Wenn in einem ebenen System S_1 zwei Punkte P_1 und Q_1, in einem Systeme S_2 zwei Punkte P_2 und Q_2 beliebig gewählt sind, so kann man die Punkte x_1 des einen Systems mit den Punkten x_2 des anderen Systems durch die Gleichungen in Beziehung setzen $P_1x_1 = P_2x_2$ und $Q_1x_1 = Q_2x_2$. Hierdurch sind die beiden ebenen Systeme S_1 und S_2 verwandtschaftlich auf einander bezogen. Herr Burmester nennt solche Systeme bifocale Systeme, die Punkte P_1Q_1 und P_2Q_2 aber die Focalpunkte der Systeme. Eine solche Verwandtschaft zeigt Grundriss und Auf-

riss eines einschaligen Hyperboloids, von dem zwei Axen senkrecht zu den Projectionsebenen stehen, und andrerseits lässt sich zu zwei bifocalen Systemen S_1 und S_2 stets ein mit S_1 ähnliches System S_1' finden, welches mit S_2 als Grundriss und Aufriss eines einschaligen Hyperboloids aufgefasst werden kann, dessen Axen senkrecht gegen die Projectionsebenen gestellt sind. Aus dieser Beziehung zu einem Hyperboloid folgt, dass einer Curve n^{ten} Grades in S_1 eine Curve $2n^{ten}$ Grades in S_2 entspricht, welche zur Focalgeraden symmetrisch liegt, dass also im Besonderen einer Geraden ein Kegelschnitt zugehört, dessen Axe in der Focalgeraden liegt et vice versa. Nachdem die Natur dieser Verwandtschaft nach anderen Richtungen hin verfolgt ist, wendet sich der Verfasser zu bifocal-veränderlichen Systemen. Indem die Focalpunkte P_1 und Q_1 ganz beliebige Bahnen beschreiben, wird das auf sie bezogene System S_1 stets in biconfocaler Verwandtschaft mit seiner Anfangslage gedacht. Der Geschwindigkeitszustand der Systempunkte wird untersucht und es werden geometrische Relationen zwischen solchen Systempunkten ermittelt, deren Geschwindigkeitszustände in irgend einer Beziehung etwas Gemeinsames haben. So wird unter Anderm gefunden, dass der geometrische Ort der Systempunkte, welche parallele Geschwindigkeiten haben, eine Hyperbel und der Ort derjenigen Punkte, welche gleiche Geschwindigkeiten besitzen, eine Curve vierten Grades ist, dass die Punkte, deren Bahnelemente nach demselben Punkt convergiren, auf einer cyklischen Curve dritten Grades, die Punkte aber, für welche die Normalen der Bahnelemente durch einen festen Punkt gehen, auf einem Kegelschnitt gelegen sind, etc. Schn.

L. Burmester. Ueber die Festlegung projectiv-veränderlicher ebener Systeme. Clebsch Ann. XIV. 472-497.

Im VI. Bande von Clebsch Ann. p. 205 erwähnt Clebsch die Aufgabe: Auf acht in einer Ebene gegebenen Geraden acht Punkte so zu bestimmen, dass sie acht gegebenen Punkten eines ebenen Systems collinear entsprechen. Mit dieser Aufgabe, von der Clebsch

weder die Lösung gegeben noch die Möglichkeit oder Bestimmtheit ihrer Lösung dargethan hatte, beschäftigt sich Herr Burmester von folgenden Gesichtspunkten ausgehend. Er betrachtet ein collinear-veränderliches System, d. h. ein System, welches sich so bewegt und in sich so verändert, dass es mit einem bestimmten ebenen System, z. B. dem System im Anfangszustand, stets die Collineationsverwandtschaft bewahrt, und stellt sich die Frage: „Ist noch eine Bewegung eines collinear-veränderlichen Systems möglich, wenn acht Systempunkte auf acht gegebenen Geraden gleiten sollen, oder kann das System nur in einer bestimmten Lage der Bedingung genügen, dass acht seiner Systempunkte auf acht gegebenen Geraden liegen?“ Bei der Untersuchung dieser Frage geht er von folgendem Satze aus, der in Schlömilch Z. XX. p. 381f. (s. F. d. M. VII. 1875. p. 535f.) von ihm hergeleitet worden ist: „Sind drei Punkte eines collinear-beweglichen Systems fest, so sind alle Bahncurven der beweglichen Systempunkte entsprechende Curven in collinearen ebenen Systemen, welche die drei festen Punkte als selbstentsprechende Punkte besitzen.“ Im Besonderen ergiebt sich aus diesem Satz: „Sind drei Systempunkte eines collinear-veränderlichen Systems fest und bewegt sich ein Systempunkt auf einer Geraden, so erzeugen alle beweglichen Systempunkte collineare gerade Punktreihen, von denen entsprechende Punkte auf den drei durch die drei festen Punkte bestimmten festen Systemgeraden liegen, und alle beweglichen Systempunkte umhüllen Kegelschnitte, welche die festen Systemgeraden berühren. Eine andere Grundlage gewinnt er für die Untersuchung durch folgendes Gesetz: Wenn vier Systempunkte sich auf vier Geraden so bewegen, dass sie vier collineare Punktreihen erzeugen, welche vier entsprechende Punkte auf einer sich selbst entsprechenden Geraden zweier Systemphasen haben, so bleiben drei Systempunkte fest. Nunmehr steigt Herr Burmester zur Lösung der oben gestellten Frage auf durch Entwickelung einer Reihe von Sätzen, die, um seinen Gedankengang zu kennzeichnen, hier Platz finden mögen:

Ein collinear-veränderliches ebenes System ist im Allgemeinen unbeweglich, 1) wenn drei Systempunkte fest und zwei

Systempunkte gezwungen sind, auf zwei festen Geraden zu bleiben, 2) wenn zwei Systempunkte fest und vier Systempunkte gezwungen sind auf vier festen Geraden zu bleiben, 3) wenn ein Systempunkt fest und sechs Systempunkte gezwungen sind, auf sechs festen Geraden zu bleiben, und endlich 4) wenn acht Systempunkte genöthigt sind, auf acht gegebenen Geraden zu bleiben.

In allen vier angeführten Fällen ist also eine Bewegung des collinear-veränderlichen Systems nicht mehr möglich, sondern es giebt eine bestimmte Lage, in der das System den betreffenden Bedingungen genügt. Diese Lage ist eindeutig bestimmt und wird durch lineare Construction gewonnen.

Die nach dem Principe der Reciprocität zu bildenden Gesetze finden in der Arbeit gleichfalls Berücksichtigung; es wird also unter Anderem auch dargethan, dass ein collinear-veränderliches ebenes System unbeweglich ist, wenn acht Systemgerade gezwungen sind, durch acht feste Punkte zu gehen. Dieser Forderung kann also ein System nur in einer bestimmten Lage genügen, und auch diese Lage ist durch lineare Construction anzugeben.

Da Herr Burmester auch die besonderen Ergebnisse für analoge Fragen, die sich für affin-veränderliche und ähnlich-veränderliche Systeme stellen, in Betracht zieht, so hat er diesen drei Arten von Systemen die gemeinsame Bezeichnung „projectiv-veränderliche ebene Systeme“ gegeben und demgemäss die Abhandlung betitelt „über die Festlegung projectiv-veränderlicher ebener Systeme“.

Endlich sei noch bemerkt, dass Herr Burmester bei Gelegenheit der Veröffentlichung einer Arbeit: „Ueber das bifocal-veränderliche System“ (Clebsch Ann. XVI. S. 90 siehe oben) in einer Anmerkung (S. 110) selbst bemerkt, dass die in obiger Abhandlung enthaltenen Fragen theilweise von Seidewitz in Grunert's Archiv Bd. IX. p. 206 und ausführlich von Herrn Schröter in Borchardt J. LXII. p. 215 behandelt worden sind.

Schn.

A. Cayley. Mechanical construction of conformable figures. Am. J. II. 186-187.

Es wird die Frage aufgeworfen: Ist es möglich, zwei Punkte durch eine mechanische Construction so zu verknüpfen, dass, wenn der eine irgend ein Stück einer ebenen Fläche beschreibt, der zweite ein dadurch bedingtes geometrisches Gebilde verzeichnet, welches mit jenem conform ist? Die besondere Art der Conformität, welche sich in der Aehnlichkeit der Gebilde ausprägt, ist dabei auszuschliessen. Schn.

Ed. Habich. Observations relatives à une note de M. l'abbé Aoust sur le mouvement d'une droite dans un plan. C. R. LXXXIX. 405-407.

Wenn ein constanter Winkel sich so bewegt, dass seine Spitze eine Curve durchläuft, während einer seiner Schenkel auf einer Curve gleitet, so beschreibt der andere eine Enveloppe. Eine Formel, welche sich auf diese Umhüllungscurve bezieht, hatte einen Prioritätsstreit hervorgerufen; auf diesen beziehen sich die Bemerkungen des Herrn Habich. Schn.

G. Bardelli. Sull' area descritta da una linea invariabile, che si move in un piano con determinata legge. Rend. Ist. Lomb. (2) XII. 290-298.

Die Arbeit beschäftigt sich mit dem Flächenstück, welches von irgend einem unveränderlichen Bogen einer ebenen Curve beschrieben wird, wenn derselbe sich in der Ebene bewegt, und der im einfachsten Falle (nämlich wenn er keine Enveloppe hat) durch seine Sehne ersetzt werden kann, während dies im allgemeineren Falle nur richtig ist, wenn man gewisse Flächenstücke als negativ zählt, wie hier geschehen soll. Unter den verschiedenen Ausdrücken, welche der Verfasser für den Flächeninhalt aufstellt, heben wir folgenden hervor. Bedeutet l die unveränderliche Länge der Sehne, w den Winkel, um den sich die Linie während der Bewegung dreht, S den Bogen, welchen ein End-

punkt beschreibt, und φ den Winkel, welchen die Sehne l mit der Normale von S bildet, so ist das Flächenelement

$$dA = \tfrac{1}{2} l^2 dw + l \cos\varphi dS.$$

Ist nun φ constant, so ergiebt sich

$$A = \tfrac{1}{2} l^2 w + l \cos\varphi . S.,$$

eine Formel, die mannigfache Anwendungen gestattet. A.

T. Rittershaus. Construction der Beschleunigung am Kurbelgetriebe. Civiling. XXV. 461-467.

Eine graphische Construction auf Grundlage der Rechnung, welche die Beschleunigung als Differenz zweier Strecken ergiebt, die sich in einfacher Weise construiren lassen. O.

Mohr. Die geometrische Construction der Beschleunigungen der ebenen Bewegung. Civiling. XXV. 613-620.

Trägt man von jedem Punkt eines Systems nach Grösse, Richtung und Sinn in einem beliebigen Massstab die Beschleunigung der betreffenden Punkte auf, so bilden bekanntlich (s. F. d. M. X. 1878. p. 587 u. 595) die Anfangs- und Endpunkte dieser Beschleunigungen ähnliche Systeme. Sobald man daher die Beschleunigung für zwei Punkte kennt, ist die Construction der Beschleunigung jedes anderen Punktes sehr einfach. Es kommt daher darauf an, für jede Lage der Figur die Beschleunigung zweier Punkte festzustellen. Der Verfasser behandelt daher in der vorliegenden Arbeit die geometrische Lösung der Fälle, wo die Endpunkte einer Strecke von unveränderlicher Länge auf Bahncurven geführt werden, welche für die betreffende Lage durch ihre Krümmungsradien gegeben sind, und wo die Beschleunigung des einen Endpunktes bekannt ist. Auf diesen Fall wird dann auch der zurückgeführt, dass der eine Endpunkt der Strecke auf einer Curve geführt wird und die Gerade eine gegebene Curve zu berühren gezwungen wird. Beide Aufgaben sind übrigens auch in der obigen Arbeit von Rittershaus gelöst. O.

J. Neuberg. Sur la cycloïde. N. C. M. V. 341-355.

Eine Cykloïde kann auf folgende Weise erzeugt werden: Ein Punkt A bewegt sich mit einer gewissen Geschwindigkeit v auf einer Geraden D. Um diesen Punkt A dreht sich eine Gerade E mit einer Winkelgeschwindigkeit v'. Der Punkt B auf E in einer Entfernung $AB = R$ gelegen, so dass $v'R = v$, erzeugt eine Cykloïde; die anderen Punkte von E erzeugen verlängerte und verkürzte Cykloïden. Die Bewegung von E nennt man cykloïdal. Auf jeder Geraden mit cykloïdaler Bewegung giebt es einen Punkt, der eine Cykloïde beschreibt, während alle anderen verlängerte oder verkürzte Cykloïden beschreiben. Es ergiebt sich leicht, dass die Normale, die Tangente an die Cykloïde, eine Gerade, die einen constanten Winkel mit diesen macht, cykloïdale Bewegung haben. Daraus folgen ohne Rechnung verschiedene Sätze. Kinematische Betrachtungen ergeben ferner leicht die bekannten Eigenschaften der Cykloïden. Mn. (O.)

G. Darboux. Recherches sur un système articulé. Darboux Bull. (2) III. 151-192.

Im Anschluss an die Arbeit des Herrn Kempe, über welche F. d. M. X. 1878. p. 593 berichtet worden ist, betrachtet der Verfasser zwei Gliedervierecke $MNPQ$ und $M_1N_1P_1Q_1$, welche in den Punkten $ABCD$ durch Stäbe von unveränderlicher Länge verbunden sind. Bei der Deformation des Vierecks $MNPQ$ disponirt man dann nur über eine willkürliche Grösse, einen der Winkel. Damit dann die Figur deformabel sei, müssen die vier Gleichungen, auf die man geführt wird, Identitäten sein. Der Weg, den der Verfasser bei der Untersuchung der Bewegung dieser Figur eingeschlagen hat, beruht auf der Anwendung der geometrischen Grössen, die er in seiner Arbeit: „De l'emploi des fonctions elliptiques dans la théorie du quadrilatère plan" (Darboux Bull. (2) III. 109—128, siehe diesen Band Absch. VII. Cap. 2 p. 504) auseinander gesetzt hat. Speciell hat er dort den Zusammenhang eines Gliedervierecks mit einer Curve dritter Ordnung gezeigt, die er „cubique associée au quadrilatère"

nennt. In der Einleitung der vorliegenden Arbeit giebt er einen kurzen Ueberblick über die Principien seiner Betrachtungsart, welche dieselbe ist, auf der die Methode der Aequipollenzen von Bellavitis beruht. Im ersten Abschnitt leitet der Verfasser einige Eigenschaften und Relationen über das Vierseit und die ihm associirte Curve ab. Im zweiten Abschnitt wendet er sich zu seiner eigentlichen Aufgabe, einer verallgemeinerten Betrachtung des Kempe'schen Gliederwerkes. Im folgenden Abschnitt III. werden dann die Bedingungen aufgesucht, die nöthig sind, damit den vier aufgestellten Gleichungen des Systems unzählig viele Werthsysteme der beiden associirten Curven genügen. Es wird dann die Aufgabe in den folgenden Abschnitten IV., V. u. VI. weiter behandelt unter der Voraussetzung, dass zwischen den Punkten der den beiden Vierseiten associirten Curven eine einfache Correspondenz besteht. Im siebenten und letzten Abschnitt endlich wird gezeigt, dass sich alle Fälle vielfacher Correspondenz auf die behandelten Fälle zurückführen lassen. In Bezug auf den näheren Gang und die speciellen Resultate muss auf die Arbeit selbst verwiesen werden. O

G. Darboux. Sur un nouvel appareil à ligne droite de M. Hart. Darboux Bull. (2) III. 144-151.

Im Anschluss an die Arbeit des Herrn Hart, über die F. d. M. IX. 1877. p. 605 berichtet worden ist, betrachtet der Verfasser ein Gliederfünfeck *ABCDP*, das in den beiden Punkten *A* und *B* befestigt ist. Die Bewegung dieser Figur hängt von zwei Parametern ab. Der Verfasser bestimmt dieselben nun so, dass die beiden variabeln Winkel in *C* und *D* immer gleich sind, und zeigt, dass die Bedingung ersetzt werden kann dadurch, dass zwei passend auf *AD* und *BC* gewählte Punkte in constanter Entfernung von einander bleiben, was sich auch mechanisch leicht herstellen lässt. Er leitet dazu eine Relation zwischen den Entfernungen der Punkte *P* von *A* und *B* ab und zeigt, wie die Resultate von Hart und einige der von Kempe (s. F. d. M. X. 1878. p. 593) gefundenen mit derselben zusammenhängen. Mit Hülfe

eines solchen Apparats kann man Ellipsen und Pascal'sche Schneckenlinien beschreiben. Im Weiteren untersucht er dann, wie man durch Combination zweier solcher Apparate parallele Bewegung herstellen kann. O.

P. Tchebicheff. Ueber die einfachsten Articulationen. Mosk. Math. Samml. IX. 2. Lief.

Eine Beschreibung und Berechnung der Bestandtheile verschiedener Articulationen, deren einzelne Punkte möglichst lange, nahezu gerade Strecken beschreiben. P.

A. B. Kempe. Note on the theorem in kinematics (Messenger VII. p. 190.). Messenger (2) VIII. 130.

Betrifft eine Bemerkung von Prof. Liguine, die sich auf des Verfassers kinematischen Satz in Messenger (2) VII. 190, VIII. 42 bezieht. (Siehe F. d. M. X. 1878. p. 570-572). Glr. (O.).

Haag. Relation entre les éléments caractéristiques d'une courbe gauche et les accélérations du point qui la décrit. Bull. S. M. F. VII. 140-143.

Der Verfasser hatte in einem autographirten Cours de géométrie (am Polytechnikum zu Bordeaux 1870) Relationen zwischen den charakteristischen Elementen einer Curve und den Beschleunigungen eines sie beschreibenden Punktes für ebene Curven aufgestellt. 1874 hat dann Herr Bouquet solche Untersuchungen für Raumcurven publicirt (Ann. de l'Ec. N. (2) III. p. 147—150 s. F. d. M. VI. p. 554). Herr Haag hat nun seine Methode ebenfalls auf Raumcurven angewandt und giebt hier die Beschleunigungen zweiter und dritter Ordnung. Im Weiteren leitet er noch einige Relationen zwischen den Beschleunigungen, Krümmungsradien etc. ab. Er gelangt dabei schliesslich zu folgendem Satz: „Wenn ein beweglicher Punkt eine Raumcurve beschreibt und seine Geschwindigkeit, sowie die n ersten Beschleunigungen gegeben sind, so hat die Beschleunigung $(n+1)^{\text{ter}}$

Ordnung ihren Endpunkt auf einer Geraden, parallel der Tangente, und die der $(n+2)^{\text{ten}}$ Ordnung auf einer Ebene, parallel der osculirenden Ebene." O.

G. Fouret. Sur le mouvement d'un corps qui se déplace et se déforme en restant homothétique à lui-même. C. R. LXXXVIII. 227-230.

Ein Körper erleidet während der Bewegung eine solche Aenderung, dass zwei auf einander folgende Nachbarlagen mit einander nicht nur ähnlich, sondern auch ähnlich gelegen sind. Unter diesen besonderen Bedingungen ergeben sich einige Relationen über die Trajectorien der Systempunkte. Die bemerkenswertheste ist die, dass, wenn ein Systempunkt eine ebene Curve beschreibt, alle Systempunkte ebene Trajectorien durchlaufen.

Schn.

A. Cayley. On the correspondence of homographics and rotations. Clebsch Ann. XV. 238-241.

Aus zwei Homographien

$$A+Bp+Cq+Dpq=0 \quad \text{und} \quad A_1+B_1q+C_1r+D_1qr=0$$

lässt sich durch Elimination von q eine Homographie

$$A_2+B_2p+C_2r+D_2pr=0$$

bilden, worin

$$A_2,\ B_2,\ C_2,\ D_2 = B_1A-A_1C,\ B_1B-A_1D,\ D_1A-C_1C,\ D_1B-C_1D.$$

Mit jeder von diesen Homographien kann man eine Rotation (eines starren Körpers um einen festen Punkt) mit den Rotationsparametern (λ, μ, ν), $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$, $(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$ in Verbindung bringen der Art, dass die dritte Rotation sich aus den beiden ersten zusammensetzt.

Bildet eine Drehaxe gegen die Coordinatenaxen die Winkel f, g, h und bedeutet ϑ den Drehungswinkel um jene Axe, so lassen sich die Rotationsparameter λ, μ, ν bezüglich darstellen durch $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\vartheta\cos f$, $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\vartheta\cos g$, $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\vartheta\cos h$, und in entsprechender Form die Grössen λ_1, μ_1, ν_1 und λ_2, μ_2, ν_2. Fasst

man die dritte Rotation als zusammengesetzt aus den beiden ersten auf, so drücken gewisse Gleichungen diesen Gedanken aus. Diese Gleichungen erscheinen, wenn man λ, μ, ν bezüglich durch $\frac{x}{w}, \frac{y}{w}, \frac{z}{w}$ darstellt und λ_1, μ_1, ν_1 und λ_2, μ_2, ν_2 in gleicher Art ausdrückt, in der Form:

$$\begin{aligned}
x_2 &= xw_1+x_1w+yz_1-y_1z,\\
y_2 &= yw_1+y_1w+zx_1-z_1x,\\
z_2 &= zw_1+z_1w+xy_1-x_1y,\\
w_2 &= ww_1-xx_1-yy_1-zz_1.
\end{aligned}$$

Herr Cayley stellt sich nunmehr die Aufgabe, A, B, C, D so als Functionen von x, y, z, w darzustellen, dass, wenn A_1, B_1, C_1, D_1 dieselben Functionen von x_1, y_1, z_1, w_1 bedeuten, A_2 B_2, C_2, D_2 die gleichen Functionen von x_2, y_2, z_2, w_2 sind.

Diese Forderung wird erfüllt durch

$$A, B, C, D = ix-y,\ \ -iz+w,\ \ -iz-w,\ \ -ix-y,$$

so dass die Homographie, welche der Drehung $\left(\frac{x}{w}, \frac{y}{w}, \frac{z}{w}\right)$ entspricht, sich in der Form darstellt

$$(ix-y)+(-iz+w)p+(-iz-w)q+(-ix-y)pq=0.$$

Schn.

A. Mannheim. Sur un mode de transformation des surfaces réglées. C. R. LXXXVIII. 1128-1131.

Es sei G eine Gerade einer geradlinigen Fläche (G) und o ein fester Punkt. Die durch G und o bestimmte Ebene drehe man in sich um einen rechten Winkel und führe auf diese Weise G in eine Lage G_1 über; die Geraden G_1, welche den Erzeugenden der Fläche (G) entsprechen, bilden eine geradlinige Fläche (G_1), welche als die transformirte Fläche von (G) aufzufassen ist. Vermittels der Gesetze der Kimenatik wird leicht erkannt, dass die Berührungspunkte der Ebene (GG_1) mit den Flächen (G) und (G_1) auf einer Geraden liegen, welche durch o geht, und dass die Punkte, in denen jene Ebene normal gegen (G)

und (G_1) gerichtet ist, einander correspondiren, d. h. dass der eine bei der Transformation in den anderen übergeführt wird. Stellt man die Natur der geradlinigen Fläche (G) längs der Erzeugenden G durch eine Hülfsgerade dar, wie sie Herr Mannheim schon oft bei seinen Studien verwendet hat, so lässt sich die Hülfsgerade für die Fläche (G_1) längs der Erzeugenden G_1 ermitteln. Durch die geometrische Beziehung dieser Hülfsgeraden erkennt man, dass, wenn die Fläche (G) abwickelbar ist, jede durch G und o bestimmte Ebene die transformirte Fläche in einem Punkte berührt und in einem Punkte zu ihr normal ist, welche von o aus gesehen unter einem rechten Winkel erscheinen. Der weitere Verlauf der Untersuchung führt zu dem Ergebnis, dass den Punkten einer orthogonalen Trajectorie einer beliebigen geradlinigen Fläche (G) die Punkte einer orthogonalen Trajectorie auf (G_1) entsprechen. Die Transformationsmethode lässt sich auf beliebige Systeme von Geraden ausdehnen, und man erkennt, dass einem Bündel Normalen einer Fläche als Transformationsgebilde wieder ein Normalenbündel entspricht.

Schn.

A. Mannheim. Transformation d'un pinceau de normales. C. R. LXXXVIII. 1179-1183.

A. Mannheim. Sur la surface de l'onde et sur la transformation d'un pinceau. C. R. LXXXVIII. 1248-1252.

Die in dem vorigen Bericht mitgetheilte Transformationsmethode wird auf ein Normalenbündel eines Ellipsoides angewendet; dasselbe geht in ein Normalenbündel einer Wellenfläche über. Durch Anwendung der Hülfsgeraden auf die Normalenflächen beider Bündel (les normalies) gewinnt Herr Mannheim Darstellungen in der Ebene für die Normalenbündel, und aus den Beziehungen dieser die Natur der Normalenbündel veranschaulichenden ebenen Gebilde ermittelt er die Lage der Hauptkrümmungscentren und die Hauptschnitte der Wellenfläche, wenn die entsprechenden Elemente des correspondirenden Punktes des Ellipsoides bekannt sind. So wird er unter anderem wieder auf

die Theoreme geführt, die er in dem Bulletin de l'Association française 1875 bereits mitgetheilt hatte, und die hier, da sie in dem Bericht über die damalige Arbeit übergangen sind, eine Stelle finden mögen. Wenn G Normale eines Ellipsoides ist und o sein Mittelpunkt, so ist das Transformationsgebilde G_1 eine Normale der Wellenfläche; die Hauptkrümmungscentren auf G und die Hauptkrümmungscentren auf G_1 bestimmen beiderseits mit o Kreise, welche sich gegenseitig in o berühren. Strahlen, welche von o aus nach dem einen Krümmungscentrum des Ellipsoides und dem einen Krümmungscentrum der Wellenfläche gehen, schliessen einen Winkel ein, der das Complement zu demjenigen Winkel ist, den die von o nach den anderen beiden Krümmungscentren gehenden Strahlen bilden. Relationen ähnlicher Art über die Lage der Krümmungscentren und der zu ihnen gehörigen Hauptebenen des Ellipsoides und der aus ihm abgeleiteten Wellenfläche sind Ergebnisse der Mannheim'schen Betrachtungsweise. Schn.

H. Léauté. Méthode d'approximation graphique applicable à un grand nombre de questions de mécanique pratique. J. de l'Éc. Pol. XLVI. 167-225.

Ueber den Inhalt dieser Arbeit ist nach den in den C. R. gegebenen Auszügen bereits mit hinreichender Ausführlichkeit in Bd. IX. 1877. p. 420 und X. 1878. p. 595--596 der F. d. M. berichtet worden. O.

E. Mercadier. Sur la détermination des éléments d'un mouvement vibratoire. 1) Mesure des amplitudes. 2) Mesure des périodes, 3) Mesure de la phase. C. R. LXXXIX. 736-737, 1071-1074, 1110-1112.

Der Verfasser hat einen Apparat construirt, mittels dessen man Vibrationsbewegungen genau mit einander vergleichen kann. Er nennt denselben „micromètre vibrant“. In den drei Noten setzt er die Benutzung desselben zur Messung der Amplituden,

Perioden und Phasen auseinander und giebt die mathematische Begründung der zu benutzenden sehr einfachen Formeln.

O.

A. Terquem. Sur les courbes dues à la combinaison de deux mouvements vibratoires perpendiculaires. Mém. de Lille 1879.

Capitel 3.

Statik.

A. Statik fester Körper.

J. Solin. Ueber Curven dritter Ordnung, welche eine unendlich ferne Rückkehrtangente haben, und deren Auftreten in der geometrischen Statik. Prag. Abh. (6) IX.

Siehe Abschn. VIII. Cap. 5. A. p. 406.

A. Seydler. Neue Ableitung des Kräfteparallelogramms. Casopis VIII. 175-180. (Böhmisch).

Enthält einen auf drei Axiome gegründeten Beweis des bekannten Satzes.

Std.

C. Saviotti. Sopra un nuovo metodo generale di composizione delle forze e sua estensione al calcolo delle travature reticolari. Acc. R. d. L. (3) III. 176-177.

Nach dem vorliegenden kurzen Bericht der Herren Cremona und Battaglini bezieht sich die vorliegende Arbeit, die in extenso später erscheinen wird, auf die Methode von Eddy (s. F. d. M. X. 1878 p. 603) und giebt die Herleitung einer anderen gra-

phischen Methode, die jene als speciellen Fall enthält. Zu eingehenderem Bericht muss die Arbeit selbst abgewartet werden. O.

P. G. Tait. Quaternion investigations connected with Minding's theorem. Proc. of Edinb. 1879. 200, Proc. L. M. S. X. 101.

Minding's Satz beschäftigt sich mit dem, was man nach Analogie „Focallinien des Systems einzelner Resultanten einer Anzahl gegebener Kräfte, welche an gegebenen Punkten eines gegebenen Körpers angebracht sind", nennen könnte, wenn diese Kräfte so gedreht werden, dass ihre Neigungen gegeneinander unverändert bleiben. Nachdem der Verfasser mit Hülfe von Quaternionen einen äusserst einfachen Beweis erhalten, sucht er den Ort der Fusspunkte der Lothe zu finden, die auf jede dieser Resultanten von dem „Mittelpunkt der Centrenebene" gefällt sind. Die resultirende Gleichung ist sehr complicirt; wenn aber die Data so ausgedehnt werden, dass sie jede Lage der centralen Axe enthalten, so hat der Ort eine äusserst einfache Gleichung in Quaternionen, die aber nicht eine Fläche, sondern ein Volumen darstellt. Cly. (O.)

J. J. Walker. Quaternion proof of Minding's theorem. Proc. L. M. S. X. 100.

Der Minding'sche Satz, um den es sich hier handelt, sagt aus, dass, wenn der Körper in eine Lage geführt ist, wo das Kräftesystem eine einzige Resultante hat, diese Resultante zwei Curven, eine Ellipse und Hyperbel mit denselben Brennpunkten, schneidet, welche eine feste Lage zum Körper haben. Siehe auch F. d. M. IX. 1877. pag. 616. O.

G. Bardelli. Sul centro delle forze nel piano. Rend. Ist. Lomb. (2) XII. 456-463.

Herleitung mehrerer Sätze, von denen wir den folgenden zur Charakterisirung derselben anführen: Wenn die Geraden, welche die Kräfte eines Systems darstellen, in ihrer Ebene um denselben Winkel und in demselben Sinn so gedreht werden können, dass jede an einem besonderen gegebenen Kreise Tangente bleibt, so dreht sich auch die Gerade, welche die Resultante darstellt, um denselben Winkel und bleibt Tangente an einem Kreise, dessen Mittelpunkt mit dem Centrum des Systems zusammenfällt, das sich aus den gegebenen Kräften ergiebt, wenn sie, parallel mit sich selbst verschoben, an den Mittelpunkten der betreffenden Kreise angebracht sind. O.

G. Darboux. Note relative à deux théorèmes de Lagrange sur le centre de gravité. Bull. S. M. F. VII. 7-12.

G. Jung. Note relative à deux théorèmes de Lagrange sur le centre de gravité. Bull. S. M. F. VII. 132-138.

Die beiden Sätze von Lagrange, um welche es sich in dieser Arbeit handelt, sind diejenigen, über welche im vorigen Bande dieses Jahrbuchs p. 600 nach einer Arbeit von Laisant berichtet worden ist. Herr Darboux geht von folgendem Satze von Leibniz aus: „Wenn n an einem System wirkende Kräfte im Gleichgewicht sind, so ist ihr gemeinsamer Angriffspunkt der Schwerpunkt von mit gleichen Massen belegten Punkten an ihren Endpunkten“ und gelangt zu folgendem Satze: „Man betrachte p Punkte A_1, A_2, ... A_p, welche mit positiven oder negativen Coefficienten m_1, m_2, ... m_p versehen sind, deren Summe nicht Null ist. Bezeichnet O dann einen beliebigen Punkt im Raume, so geht die Resultante der Kräfte $m_1.\overline{OA}_1$, $m_2.\overline{OA}_2, \dots m_p.\overline{OA}_p$ durch einen festen Punkt C und ist gleich $M.\overline{OC}$, wo M die Summe $m_1+m_2+\cdots m_p$ ist. In dem besonderen Falle, wo die Summe M Null ist, bleibt die Resultante in Grösse und Richtung unveränderlich, wenn der Punkt O seine Lage verändert; ist sie für eine specielle Lage des Punktes O Null, so ist sie es auch für alle übrigen.“ Aus diesem Satz ergiebt sich dann leicht der

Satz von Lagrange. Herr Darboux beschäftigt sich speciell noch mit dem Falle, wo $M \lesseqgtr 0$ ist und gelangt dabei zu folgendem weiteren Satze: „Man betrachte ein System von Punkten, deren Gesammtmasse Null ist, und ersetze eine oder mehrere Gruppen dieser Punkte durch ihre Schwerpunkte, indem man diesen die Gesammtmassen der Punkte giebt, an deren Stelle sie treten. Für jedes System solcher Punkte wird die Summe $\Sigma\Sigma m_i m_k \overline{A_i A_k}^2$ constant, negativ oder null bleiben."

Die Arbeit des Herrn Jung ist durch die Arbeiten von Laisant und Darboux hervorgerufen. Er gelangt zu einer Reihe von ähnlichen Sätzen, von denen wir den mit B) bezeichneten herausnehmen: „Die Summe der Producte der Massen, combinirt zu je zwei und multiplicirt mit dem Quadrate ihrer respectiven Entfernung, ist gleich dem Trägheitsmoment des Systems in Bezug auf den Schwerpunkt, multiplicirt mit der Gesammtmasse." Zum Schluss zeigt Herr Jung den Zusammenhang seiner Untersuchungen mit denen des Herrn Darboux. O.

M. W. Crofton. Extension of Leibniz's theorem in statics. Messenger (2) IX. 121, Am. J. II. 191-192.

Wenn ein System von Kräften Aa, Bb, Cc, ... in Gleichgewicht ist, wo a, b, c, ... die Angriffspunkte sind, so fällt der Schwerpunkt von A, B, C, ... zusammen mit dem Schwerpunkt von a, b, c, ... Glr. (O).

G. Dostor. Centre de gravité du périmètre d'un quadrilatère quelconque et centre de gravité du volume d'un tronc de pyramide polygonale. Grunert Arch. LXIII. 431-433.

No. 1. An Stelle des Vierecks werden in den Halbirungspunkten der Seiten vier parallele Kräfte angebracht, proportional den Seiten des Vierecks. No. 2. Mit Hülfe der Momente der vollständigen und der ergänzenden Pyramide wird der Schwerpunkt des Pyramidenstumpfes bestimmt. O.

W. J. C. Sharp, Townsend. Solutions of a question (5851). Educ. Times XXXI. 59-61.

Ein materielles Theilchen werde in einem freien Raum als im Gleichgewicht vorausgesetzt unter der (attractiven oder repulsiven) Wirkung eines Systems von Massen, die in irgend einer Weise im Raume vertheilt sind. Dann ist das Gleichgewicht, wenn nicht absolut neutral, immer völlig stabil für attractive, völlig unstabil für repulsive Wirkung, oder ist im Gegensatz immer intermediär, je nachdem das Wirkungsgesetz einer directen oder einer umgekehrten Potenz der Entfernung folgt.

O.

A. Martin. Solution of a question (4651). Educ. Times XXXII. 62-63.

Ein cylindrischer Stab von der Länge $2a$ und dem Radius r bleibt mit dem einen Ende in Berührung mit der concaven Seite eines festen halbkugelförmigen Körpers vom Radius R und liegt auf dem Rand auf. Bezeichnet dann θ die Neigung des Stabes gegen den Horizont, so ergiebt sich zur Bestimmung derselben die biquadratische Gleichung

$$16R^2\sin^4\theta-8Rr\sin^3\theta-(16R^2-r^2-a^2)\sin^2\theta+4Rr\sin\theta = -(4R^2-a^2).$$

O.

Lösungen weiterer Aufgaben über Gleichgewicht starrer Systeme von G. H. Hopkins, R. E. Riley, Townsend, T. R. Terry, H. R. Robson, F. D. Thomson, J. S. Jenkins, J. Hammond, W. J. Macdonald, D. Edwardes, R. Tucker, Moret-Blanc finden sich Educ. Times XXXI. 23, 87-88, XXXII. 66-67, 96, 97; Nouv. Ann. (2) XVIII. 115-118.

O.

A. Kurz. Zur Berechnung von Trägheitsmomenten. Hoffmann Z. X. 409.

Mittheilung des folgenden Satzes ohne Beweis: „Das Trägheitsmoment eines ebenen Gebildes in Bezug auf eine zur Ebene senkrechte Axe ist gleich der Summe der beiden Trägheitsmomente in Bezug auf irgend zwei in der Ebene durch die Spur der ersten Axe gelegte zu einander senkrechte Axen.“

O.

G. Dostor. Moments d'inertie des surfaces et solides de révolution appartenant à la sphère. GrunertArch. LXIV. 46-56.

§ 1 enthält Anwendungen der Formel

$$J = 2\pi\varrho\varepsilon\int y^3 ds$$

zur Bestimmung der Trägheitsmomente in Bezug auf die Axe, wo ϱ die constante Dichtigkeit, ε die unendlich klein vorausgesetzte Dicke der Schicht bezeichnet, für folgende Flächen: 1) Mantel des Kegels und Kegelstumpfes, 2) Kalotte, 3) Zone. § 2 giebt ebenso Anwendungen der Formel

$$J = \tfrac{1}{2}\pi\varrho\int_a^b y^4 dx$$

für Körper, nämlich 1) Cylinder, 2) Kegel und Kegelstumpf, 3) Segment, 4) Sector und andere Kugeltheile.

O.

R. Townsend. On the moments of inertia of solid circular rings generated by the revolution of closed central curves. Quart. J. XVI. 278-279.

Eine geschlossene Curve mit Mittelpunkt, von sonst beliebiger Form und Grösse, drehe sich um eine willkürliche Axe in ihrer Ebene, die sie aber nicht schneidet. Die Trägheitsmomente I und J des Körpers, der durch ihre Fläche erzeugt wird, in Bezug auf die Umdrehungsaxe und die senkrechte Ebene durch den Trägheitsmittelpunkt, werden dann gegeben durch:

$$I = m(a^2+3h^2),$$

$$J = m\left(k^2-\frac{l^4}{a^2}\right),$$

wo m die Masse des Körpers ist, a die Entfernung des Mittelpunktes der erzeugenden Fläche von der Umdrehungsaxe und h, k und b Grössen sind, welche mit den Trägheitsmomenten der Fläche in Bezug auf verschiedene Axen zusammenhängen.

O.

E. Cesaro. Solution d'une question (446). N. C. M. V. 23-30.

Das Trägheitsmoment eines Dreiecks in Bezug auf irgend eine in der Ebene der Figur gelegene Axe ist gleich dem Inhalt des Dreiecks multiplicirt mit dem arithmetischen Mittel aus den Entfernungen der Mitten der Seiten von der Axe.

Mn. (O.)

T. C. Lewis. Application of geometry of four dimensions to determine moments of inertia of bodies without integration. Quart. J. XVI. 152-158.

Anwendung der Methode, die der Verfasser in einer Arbeit Messenger (2) VIII. 114 (siehe F. d. M. X. 1878. p. 610) benutzt hatte, auf das Tetraeder, Parallelepipedon und Ellipsoid.

O.

L. Lewicki. Graphische Bestimmung höherer Momente. Civiling. XXV. 527-542.

Zur graphischen Bestimmung von Momenten werden gewöhnlich die Methoden von Culmann, Mohr oder die der sogenannten reducirten Querschnitte von Vojacek angewendet. In der vorliegenden Arbeit giebt der Verfasser eine Modification der letzteren Methode, ebenfalls auf Benutzung des Planimeters beruhend, die eine Vereinfachung derselben ergiebt. Ihre Anwendbarkeit wird an Beispielen erläutert. Mathematisch neue Gesichtspunkte ergeben sich nicht.

O.

Lösungen weiterer Aufgaben über Bestimmung von Momenten von G. TURRIFF, W. J. MACDONALD, J. J. WALKER, R. KNOWLES, T. A. TERRY finden sich Educ. Times XXXI. 91, XXXII. 39-40, 50.

O.

J. SCHMIDT. Ueber ein neues Momentenplanimeter. Civiling. XXV. 423-442.

Der Verfasser beschreibt zunächst ein Instrument, das aus dem Wetli'schen Planimeter zu einem Momenten-Planimeter umgewandelt ist, und giebt alsdann eine Theorie des Apparates.

O.

K. v. OTT. Das graphische Rechnen und die graphische Statik. 4te Aufl. Prag. Calve.

Siehe F. d. M. VI. 1874. p. 542. O.

A. FAVARO. Sopra alcuni esercizii di statica grafica proposti dal Prof. H. G. Zeuthen. Atti Ist. Ven. (5) V. 719-749.

Italienische Bearbeitung der Abhandlung, über die F. d. M. IX. 1877. p. 618-619 berichtet worden ist. O.

D. PADELETTI. Studi sui diagrammi reciproci. Battaglini G. XVI. 339-359.

Nach einer historischen Einleitung giebt der Verfasser in den ersten beiden Paragraphen seiner Abhandlung die Principien der Kinematik eines starren Systems. Dem folgt in § 3 der Satz über die Orthogonalität entsprechender Geraden in der Chasles'schen Transformation, dem sich in § 4 die Behandlung der Pole und Polarebenen, sowie der correlativen Figuren anschliesst. § 5 bespricht die Transformationen von Möbius und Chasles. § 6-9 endlich enthalten Anwendungen auf die Dynamik, Centralbewegung, graphische Statik und die Theorie der reciproken Polaren.

O.

L. Cremona. Le figure reciproche nella statica grafica. Terza edizione con 5 tavole litografiche preceduta da un' introduzione del G. Jung. Milano. Höpli. 8°.

N. Joukowsky. Die Analogie der Aufgaben über das Gleichgewicht einer biegsamen und unausdehnbaren Schnur mit den kinematischen Aufgaben über die Bewegung eines materiellen Punktes. Mosk. Math. Samml. IX. 530-535.

Bw.

H. G. Zeuthen. Om Konstruktion af Tovpolygoner til givne Kräfter i Rummet. Zeuthen Tidsskr. (4) III. 46-57, 96-101.

Den Gegenstand dieser Arbeit bildet die Construction von Seilpolygonen, welche gegebenen räumlichen Kräften entsprechen. Da jede gegebene Kraft eine Bedingung sowohl für den vorhergehenden Theil des Polygones als für den dem Kräftepolygon entsprechenden Pol nach sich zieht, kommt es bei der Construction wesentlich auf die Untersuchung dieser Bedingungen an. Es ergiebt sich für den Fall von drei Kräften, dass der Ort der Pole ein windschiefes Hyperboloid wird, während jede Seite des Seilpolygons zwei feste Gerade schneidet. Für vier Kräfte wird der Ort der Pole ein ebener Kegelschnitt, die Seiten des Polygons liegen auf Hyperboloiden. Fünf Kräfte geben im Allgemeinen nur zwei Polygone. Im letzten Theil der Abhandlung beschäftigt der Verfasser sich mit dem Falle, wo Momente von den Spannungen gewisser Seiten entweder in Bezug auf feste Gerade oder auf feste Punkte gegeben sind, sowie mit Constructionen, wenn zwischen solchen Momenten gegebene Relationen stattfinden sollen.

Gm.

F. P. Ruffini. Sul equilibrio dei poligoni piani di forma variabile. Mem. di Bol. (3) X. 3-23.

H. Léauté. Détermination de la figure de repos apparent d'une corde inextensible en mouvement dans l'espace; conditions nécessaires pour qu'elle se produise. C. R. LXXXIX. 778-781.

Im Anschluss an die Arbeit von Résal, die im Jahrbuch VI. 1874. p. 610 besprochen worden ist, gelangt der Verfasser zu folgenden Resultaten: „Wenn ein unausdehnbares im Raum in Bewegung begriffenes Seil eine permanente Gestalt bewahrt, so ist die Grösse der Bewegung in jedem Augenblick in allen Punkten dieselbe. Wenn ferner die äusseren Kräfte unabhängig von der Zeit sind, so ist es auch die allen Punkten gemeinsame Geschwindigkeit. Ebenso ist es mit der Spannung, die indess in den verschiedenen Punkten verschieden ist. Unter dieser letzten Voraussetzung ist die permanente Gestalt des in Bewegung begriffenen Seils dieselbe, wie die Gleichgewichtsform des Seiles in Ruhe unter Wirkung derselben Kräfte und hängt endlich nicht von der Grösse der Zuggeschwindigkeit ab.“ O.

A. Picard. Voutes biaises. Simplification pratique de l'appareil orthogonal convergent. Ann. d. P. et d. Ch. XVIII. 339-370.

Für Materialien von einheitlicher Form (z. B. Mauersteine) ist die schraubenlinige Anordnung der Lagerfugen wohl anwendbar, dagegen nicht diejenige, bei welcher ein Mittelstück als gerades Gewölbe construirt wird, an welches sich auf jeder Seite schiefe Theile anschliessen, deren Querfugen fächerförmig nach derselben Verticalen convergiren, da hier die Lagerfugen nicht parallel laufen. Im Vorliegenden ist eine vereinfachte Anordnung erklärt, welche in der Praxis angewandt und von M. Frécot angegeben wurde.

Das Mittelstück ist ebenfalls als gerades Gewölbe angeordnet. Die Seitentheile haben Querfugen, welche auf der abgewickelten Gewölbefläche als gerade Linien erscheinen, die nach einem Punkte convergiren; die Lagerfugen müssen also auf der abgewickelten Fläche als concentrische Kreise um diesen

Punkt erscheinen. Nur die an der Stirnmauer liegenden Gewölbsteine haben, um diese eben zu machen, Fugen nach dem Schraubensystem.

Es wird die Gleichung der Lagerfugenlinien gegeben und sowohl analytisch wie geometrisch die Eigenthümlichkeit derselben erwiesen, dass die Normalen aller in derselben erzeugenden Geraden liegenden Curvenpunkte sich in einem Punkte der Grenzebene schneiden (dem Focus). Diese Eigenschaft ist für die Zeichnung sehr werthvoll.

Den Schluss der Abhandlung bilden Angaben über die praktische Ausführung einer solchen Brücke durch den Verfasser.

Bn.

Y. Villarceau. Sur l'établissement des arches de pont, réalisant le maximum de stabilité. C. R. LXXXVIII. 45-60.

Begleitschreiben für eine Abhandlung über obiges Thema, welche zur Publikation im Recueil des Savants étrangers bestimmt ist. Sie bildet die Fortsetzung zweier ebenda (1853) veröffentlichten Arbeiten. (Die darin entwickelte Bogenform hat seither vielfach Anwendung gefunden und trägt den Namen des Verfassers). Die schon in den alten Arbeiten gestellten Bedingungen sind: Bei Abwesenheit der zufälligen Last soll die Stützlinie fast genau durch die Mitten der Wölb-Fugen gehen, senkrecht zu denselben sein und höchstens $\frac{1}{10}$ des Widerstandes gegen Zerdrücken betragen. Schon die älteren Arbeiten waren von Tafeln begleitet; für diese Arbeit sind sehr ausführliche Tafeln mit doppeltem Eingange beigegeben, deren Argumente der Modul der elliptischen Functionen und der Winkel der Gewölbfugen mit der Verticalen bilden. Auf die gewaltige Arbeit der Berechnung und die grossen Kosten hinweisend, spricht der Verfasser am Schluss den sehr berechtigten Wunsch aus, es möchten auf Staatskosten Tafeln der elliptischen Functionen berechnet werden, wodurch ihre Verwendung für das praktische Rechnen erst ermöglicht würde.

Bn.

L. Cunq. Note sur la construction graphique des moments fléchissants sur les appuis d'une poutre droite, reposant sur des appuis de niveau. Ann. d. P. et d. Ch. XVII. 131-134.

Sinnreiche Construction, deren Darlegung aber nur durch eine vollständige Wiedergabe der obigen Notiz möglich wäre.

Bn.

Josef Šolin. Ueber einige Eigenschaften der Clapeyron'schen Zahlen Prag. Ber. 1878. 146.

Indem das Verhältnis

$$\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_1} = (-1)^{r+1}\alpha_r\beta_r$$

gesetzt wird, und für α_0, α_1, α_2, β_0, β_1, β_2 passende Werthe gewählt werden, ergeben sich für diese α und β eine Reihe von sehr einfachen Relationen:

$$\alpha_{2k} = 2\alpha_{2k-1} + \alpha_{2k-2}; \quad \beta_{2k} = \beta_{2k-1} + \beta_{2k-2},$$
$$\alpha_{2k+1} = \alpha_{2k} + \alpha_{2k-1}; \quad \beta_{2k+1} = 2\beta_k + \beta_{2k-1},$$

dann

$$\alpha_3 - 4\alpha_5 + \alpha_7 = 0; \quad \alpha_4 - 4\alpha_6 + \alpha_8 = 0 \text{ u. s. w.}$$

Für die Summe $\sigma_{nr} = \varepsilon_r + \varepsilon_{n-r}$ ergiebt sich der gemeinsame Theiler $\alpha_n\varepsilon_1$, und der übrigbleibende Factor findet sich $= \pm\beta_{n-2r}$, je nachdem r ungrade oder grade ist. Für die Stützenmomente des continuirlichen Trägers mit gleichen Oeffnungen $A_r = \gamma_{nr}\cdot\frac{9^n}{12}$ wird der Coefficient γ dargestellt als ein Bruch, dessen Zähler und Nenner dieselben Beziehungen zeigen, wie die α und β. Aehnliches gilt für die Pfeilerreaktionen. Die einschlagenden Rechnungen erfahren durch die hier gegebenen Beziehungen eine wesentliche Vereinfachung. Bn.

B. Hydrostatik.

TOWNSEND. Solution of a question (5627). Educ. Times XXXI. 74-75.

Ein Rotationscylinder von gleichförmiger Dichtigkeit schwimme in einer schweren Flüssigkeit von grösserer Dichtigkeit und zwar derart, dass er sich oben in der Grenzlage des stabilen Gleichgewichts befindet. Beschreibt man dann ein Rotationsellipsoid, dessen Rotationsaxe die Cylinderaxe ist, während der Aequatorialdurchmesser gleich dieser Axe mal $\sqrt{2}$ ist, so schneidet das Ellipsoid den Cylinder in demjenigen Kreise, in welchem er von der Flüssigkeit benetzt wird. Wn.

J. HAGEN. Zur Theorie der drei ellipsoidischen Gleichgewichtsfiguren frei rotirender homogener Flüssigkeiten. Schlömilch Z. XXIV. 104-116.

Anschliessend an eine Arbeit von Giesen (F. d. M. VIII. 1876. p. 577) leitet der Verfasser Näherungsformeln ab zur Bestimmung der ellipsoidischen Gleichgewichtsfiguren rotirender Flüssigkeiten bei kleinen Winkelgeschwindigkeiten. Zu dem Zwecke werden folgende Annahmen gemacht: 1) Bei dem schwach abgeplatteten Rotationsellipsoid soll die lineare Excentricität eine kleine Grösse erster Ordnung sein; 2) beim stark abgeplatteten Rotationsellipsoid soll dasselbe von der Rotationsaxe, 3) beim dreiaxigen Ellipsoid von dem reciproken Werthe der längsten Axe gelten, während die Masse des Ellipsoids in Bezug auf die kleinen Grössen stets von der nullten Ordnung ist. Unter diesen Voraussetzungen wird in jedem der drei Fälle der bekannte Ausdruck für das Potential des Ellipsoids in eine Reihe entwickelt, die nach Potenzen der oben genannten kleinen Grösse fortschreitet, und es werden die Glieder der dritten und höheren Ordnung vernachlässigt. Im zweiten und dritten Falle wird allerdings die Reihenentwickelung nur für Punkte durchgeführt, die der Oberfläche des Ellipsoids sehr nahe sind. Setzt man

mit Hülfe der so erlangten Werthe von V die Bedingungen dafür an, dass das betreffende Ellipsoid Gleichgewichtsfigur einer rotirenden Flüssigkeit sei, so ergeben sich folgende Resultate:

$$1)\qquad \theta^2 = \tfrac{4}{5}Mf\frac{e^2}{c^3},$$

$$2)\qquad \theta^2 = \varrho\pi^2 f\frac{c}{a},$$

$$3)\qquad \theta^2 = \tfrac{3}{2}Mf\frac{L}{a^2}.$$

Darin ist θ die Winkelgeschwindigkeit, f die Constante der Anziehung, M die Masse, ϱ die Dichtigkeit des Ellipsoids, c die Länge der Rotationsaxe, a die längste Axe, e die kleine Excentricität des wenig abgeplatteten Ellipsoids, während

$$L = \frac{2}{a}\lg\left(\frac{2a}{c}\right).$$

Zugleich ergiebt sich, dass ein dreiaxiges Ellipsoid (No. 3) mit kleiner Winkelgeschwindigkeit nur dann Gleichgewichtsfigur ist, wenn die Rotationsaxe bis auf Glieder zweiter Ordnung (incl.) gleich der kleineren Aequatorialaxe ist. Wn.

Capitel 4.

Dynamik.

A. Dynamik fester Körper.

G. F. W. Baehr. Sur le principe de la moindre action.

Versl. en Mededeel. XIV. 232-250, Arch. Néerl. XIV. 163-179.

Zuerst wird das Princip der kleinsten Wirkung für die Bahn eines Punktes im Raume aus der Variation eines Integrales abgeleitet und auf diesem Wege einige einfache Beispiele gelöst. Das Princip wird dann auf die Bewegung mehrerer Punkte, zwischen welchen Verbindungen bestehen, angewendet.

G.

Th. Sloudsky. Note sur le principe de la moindre action. Nouv. Ann. (2) XVIII. 193-200.

Der Verfasser bespricht die Form, in der Lagrange das Princip der kleinsten Wirkung ausgedrückt hat. Er sucht dieselbe dahin zu präcisiren, dass hinzugefügt werden müsse: Alle verglichenen Bewegungen des Systems müssten ausser den Verbindungen noch folgenden zwei Bedingungen unterworfen sein: 1) Die Anfangs- und Endlagen des Systems müssen in allen verglichenen Bewegungen dieselben sein, 2) die Coordinaten der Punkte des Systems müssen der Gleichung

$$S\left(\frac{u^2}{2}+\Pi\right)m = H$$

genügen, wo Π eine gewisse Function der Coordinaten und H eine gegebene Constante ist. Unter diesen Bedingungen sei dann

$$\delta . Sm\int uds = 0$$

für diejenige der Bewegungen, die Π zur Kräftefunction hat. Er bespricht sodann eine Arbeit von Rodrigues: „De la manière d'employer le principe de la moindre action, pour obtenir les équations du mouvement rapportées aux variables indépendantes.“ (Correspondance sur l'École Polytechnique III. 1814) und wendet sich zu Jacobi's Aufstellung in den Vorlesungen über Dynamik, der er ebenfalls Unklarheit vorwirft, dann zu Mayer's Geschichte dieses Princips und endlich zu Ostrogradsky's Angriffen.

O.

N. Joukowsky. Ueber das Princip der kleinsten Wirkung. Mosk. Math. Samml. IX. 574-581.

Bw.

J. A. Serret. Addition à mon mémoire sur le principe de la moindre action. C. R. LXXXIX. 57-63.

Enthält Transformationen einiger Formeln der Arbeit, über welche bereits F. d. M. III. 1871. pag. 174—175 berichtet worden

ist. An den damaligen Bemerkungen wird durch diesen Zusatz nichts geändert. O.

J. W. Gibbs. On the fundamental formulae of dynamics. Am. J. II. 49-64.

Der Verfasser ersetzt die Gleichung

$$\Sigma\left[\left(X-m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+\left(Y-m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y+\left(Z-m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right]=0$$

durch

$$\Sigma\left[\left(X-m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta\frac{d^2x}{dt^2}+\left(Y-m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta\frac{d^2y}{dt^2}+\left(Z-m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta\frac{d^2z}{dt^2}\right]\leqq 0$$

und bespricht dieselbe in ihrem Verhältnis zu den sonstigen Fundamentalgleichungen der Dynamik, sowie ihre Transformationen und Anwendbarkeit. O.

Ed. Weyr. Bemerkungen in Betreff zweier Sätze der Dynamik. Prag. Ber. 1878. 133-146.

Die beiden Sätze, um die es sich in der vorliegenden Arbeit handelt, sind der Satz von der Bewegung des Schwerpunkts eines mechanischen Systems und das Princip der Flächenräume. Der Verfasser stellt sich nämlich die Aufgabe, alle diejenigen Systeme zu bestimmen, bei deren durch eine beliebige Kraft erzeugten Bewegung der Satz von der Bewegung des Schwerpunkts statt hat. Sodann wird dieselbe Aufgabe für den Flächensatz behandelt, und endlich werden auch diejenigen Systeme bestimmt, bei deren Bewegung beide Sätze bezüglich aller drei Coordinatenaxen gelten. Auf den Inhalt specieller einzugehen ist ohne zu grosse Raumerfordernis nicht wohl möglich, weshalb Referent auf die Arbeit selbst verweisen muss. O.

F. Hočevar. Ueber die Lösung von dynamischen Problemen mittels der Hamilton'schen partiellen Differentialgleichung. Wien. Ber. LXXIX., Wien. Anz. 1879. 92-93.

Der erste Abschnitt der Arbeit beschäftigt sich mit der Begründung der Formel

$$[\alpha, \beta]' = [\alpha, \beta] + \mu_1 [\alpha, f_1] + \cdots + \mu_{2r} \cdot [\alpha, f_{2r}],$$

durch welche die aus der Störungstheorie bekannten Ausdrücke $[\alpha, \beta]'$, in denen die Differentialquotienten nach den Variabeln der Bewegungsgleichungen in der canonischen Form gebildet sind, durch die ursprünglichen Variabeln ausgedrückt werden, für welche die Bedingungsgleichungen $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $\cdots f_{2r} = 0$ existiren. Die Herleitung dieser Formel war bereits von Jacobi (Crelle J. LX. 67—105) und Mathieu (C. R. LXVI 1193) gegeben worden. Sie geschieht hier durch eine verhältnismässig einfache Transformation der Differentialgleichungen, bezüglich derer Referent auf die Arbeit selbst verweisen muss. Der zweite Theil behandelt die Jacobi'sche Integrationsmethode der Hamilton'schen partiellen Differentialgleichung für den Fall, dass mehrere Integrale der Bewegungsgleichungen gegeben sind. Es ist dabei aber nicht auf die allmählige Erniedrigung der Differentiationsordnung abgesehen, sondern auf die Untersuchung, wieweit die Jacobi'schen H-Functionen sich aus den gegebenen Integralen der Bewegungsgleichungen bestimmen lassen, und wie dies zu geschehen habe. O.

J. Carbonnelle. Deux théorèmes de dynamique. Ann. Soc. scient. Brux. III. A. 53-55.

Wenn man in den Gleichungen eines dynamischen Problems, in dem die Kräfte nicht Functionen der Zeit sind, entweder das Zeichen der Anfangsgeschwindigkeiten oder das Zeichen der Zeit, betrachtet als unabhängige Variable, verändert, so erhält man dasselbe Resultat. Die durch die so transformirten Gleichungen definirte Bewegung ist die umgekehrte (réverti) derjenigen, die durch die ursprünglichen Gleichungen definirt war. Dies vor-

ausgesetzt gelten folgende Sätze: 1) Wenn es in der Bewegung eines Systems einen Augenblick giebt, in dem alle Geschwindigkeiten Null sind, so theilt dieser Augenblick die Bewegung in zwei völlig symmetrische Theile, deren einer genau der umgekehrte des andern ist. 2) Wenn es zwei Augenblicke giebt, wo alle Geschwindigkeiten Null sind, so ist die Bewegung periodisch und die ganze Periode setzt sich aus zwei völlig symmetrischen Theilen zusammen, deren einer der umgekehrte des andern ist.

Mn. (O.)

P. Gilbert. Recherches sur les mouvements relatifs.
Ann. Soc. scient. Brux. III. A. 58-65, 70-77, 81-90.

Der Verfasser stellt die Gleichungen der relativen Bewegung in einer Weise auf, dass die verschiedenen Grössen, die in dieselben eingehen, einfache geometrische Deutungen haben. In Folge dessen kann er, vollständiger als seine Vorgänger, die Frage hinsichtlich der Bewegung eines materiellen schweren Systems an der Oberfläche eines Planeten, der mit einer Rotationsgeschwindigkeit ω um seine Axe begabt ist, behandeln. Wenn der Anfangspunkt mit dem Schwerpunkt zusammenfällt, erhält er das folgende allgemeine Theorem: „Man kann die Lagrange'schen Gleichungen in voller Strenge anwenden auf die scheinbare Bewegung eines schweren Systems S, dessen Schwerpunkt auf dem Planeten fest ist, wie wenn der Planet in Ruhe wäre, vorausgesetzt, dass man der scheinbaren halben lebendigen Kraft T des Systems S die Projection des Moments der Bewegungsgrössen von S auf die Rotationsaxe des Planeten hinzufügt, multiplicirt mit der Winkelgeschwindigkeit ω dieser Rotation." Mit Hülfe dieses Satzes führt Herr Gilbert die Integration der Bewegungsgleichungen des vollständigen Gyroscops auf elliptische Integrale zurück, ohne wie Lottner das Quadrat von ω zu vernachlässigen. Wenn die Axe des Torus auf einer festen Ebene oder auf einem festen Kegel liegt, ist die strenge Lösung einfacher, als Bour und Lottner sie gegeben. Liegt speciell die Axe des Torus in einer festen Ebene, so ist seine Bewegung die eines

gewissen Pendels, dessen Ebene sich gleichförmig um die Verticale dreht. Weitere Anwendungen.

Mn. (O.)

C. H. C. Grinwis. Sur une détermination simple de la fonction caractéristique. Arch. Néerl. XIV. 130-142.

Siehe F. d. M. X. 1878. p. 615. G.

Th. Sludsky. Zur Aufgabe über die Bewegung eines Systems freier materieller Punkte. Mosk. Math. Samml. IX. 536-545.

Bw.

Gascheau. Étude sur un cas singulier de mouvement dû à une force centrale. Mém. de Toul. (8) I. 115-128.

Das Anziehungsgesetz, das der Verfasser der Bewegung zu Grunde legt, ist das, dass die Kraft umgekehrt proportional ist dem Cubus der Entfernung. Der Verfasser reproducirt zunächst die von Poisson in seiner Mécanique (Ausg. von 1833, Bd. I. p. 450) gegebene Lösung. Diese führt auf die Gleichung:

$$\frac{dr^2}{dt^2}+(a^2\sin^2\alpha-k\gamma)\frac{\gamma^2}{r^2}=a^2-k\gamma.$$

Für die weitere Lösung sind die drei Fälle zu unterscheiden:

$$a^2\sin^2\alpha-k\gamma \gtreqless 0.$$

Poisson hat nur die beiden ersten Fälle durchgeführt. Der Verfasser will nun den dritten $a^2\sin^2\alpha-k\gamma=0$ behandeln. Er führt auf eine hyperbolische Spirale und es werden die Haupteigenschaften der Curve, sowie die Eigenthümlichkeiten der Bewegung vom Verfasser in der Arbeit abgeleitet. Die Resultate desselben sind übrigens nicht neu. Sie finden sich schon bei Euler (Mechanik von Wolfers 1848, Bd. I. p. 227 u. f.).

O.

G. Battaglini. Sul movimento per una linea di 2° ordine. Battaglini G. XVI. 43-52.

Siehe F. d. M. IX. 1877. p. 641—642. O.

F. Siacci. Del moto per una linea piana. Atti di Torino XIV. 759-760, C. R. LXXXVIII. 909-911.

Der Verfasser hat die früher von den Herren Bertrand Darboux, Halphén und Battaglini behandelte Frage (s. F. d. M. IX. 1877, p. 639—642, X. 1878, p. 618—619) noch verallgemeinert und ist dadurch zu folgendem Satz gekommen: „Wenn ein Punkt eine ebene Linie durchläuft, unter Wirkung einer Kraft, die sich in zwei Componenten zerlegt, von denen die eine stets durch einen festen Punkt geht, während die andere die Richtung der Tangente an die Curve hat, so ist die erste Kraft proportional dem Radiusvector, umgekehrt proportional dem Cubus der Entfernung des festen Punktes von der Tangente und einer willkürlichen Function, während die zweite umgekehrt proportional ist dem Quadrate der Entfernung des festen Punktes von der Tangente und einer anderen willkürlichen Function, welche die Derivirte des Products der ersten Function in den Krümmungsradius nach dem Bogen ist.“ Dieser Satz wird bewiesen. Es wird ferner die Bedingung aufgestellt, damit zwei Kräfte, welche durch verschiedene Punkte gehen, denselben Punkt auch dieselbe Curve beschreiben lassen. O.

G. Helm. Elementare Ableitung des Newton'schen Gravitationsgesetzes aus den drei Kepler'schen Gesetzen. Grunert Arch. LXIII. 326-328.

Der Verfasser geht dabei von dem Satz aus, dass sich ein Punkt auf einer Ellipse bewegt, wenn auf ihr eine Beschleunigung P gleich $\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R$ nach dem Mittelpunkt wirkt, wo T die Umlaufszeit, R die Entfernung des Punktes vom Mittelpunkte be-

zeichnen. Er leitet dann daraus her, dass die Beschleunigung nach dem Brennpunkt constant sein muss. O.

C. TAYLOR. On the geometrical proof of Lambert's theorem. Proc. of Cambr. III. 261-266.

Der Verfasser giebt Lambert's eignen Beweis dieses Satzes über die Zeit zur Zurücklegung von Theilen einer elliptischen Bahn, aber in rein geometrischer Form ohne die Rechnungen und Reductionen, mit denen der ursprüngliche Beweis überhäuft ist. Daran knüpfen sich Variationen des Beweises mit Bemerkungen und Corollarien. Glr. (O).

FR. KOLÁČEK. Elementare Deduction der Gravitationsgesetze. Casopis VIII. 27-32. (Böhmisch).

Unter entsprechender Verwendung des Begriffes der lebendigen Kraft wird mit elementaren Mitteln die Ableitung der zwei Hauptgesetze vollführt. Std.

H. GYLDÉN. Sur une nouvelle forme des coordonnées dans le problème des deux corps. C. R. LXXXVIII. 850-852, 963-964.

Die Gleichungen, von denen das Problem der zwei Körper abhängt, sind:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\mu\frac{x}{r^3}=0,\quad \frac{d^2y}{dt^2}+\mu\frac{y}{r^3}=0.$$

Führt man hierin eine andere unabhängige Variable als die Zeit ein durch die Gleichung $t=f(u)$, so nehmen sie die Form an:

$$\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{f''(u)}{f'(u)}\frac{dx}{du}+\mu f'^2(u)\frac{x}{r^3}=0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{f''(u)}{f'(u)}\frac{dy}{du}+\mu f'^2(u)\frac{y}{r^3}=0.$$

Da hier auch der Radiusvector r eine Function von u ist, so kann man zwischen r und $f(u)$ eine directe Relation als be-

stehend annehmen, die verschieden gewählt werden kann. Der Verfasser nimmt nun $f'(u) = \beta r$ und $f'(u) = \beta r^2$, d. h. gleich der excentrischen und der wahren Anomalie an. Er wendet sich nach kurzer Besprechung dieser Fälle zu $f'(u) = \beta r^{\frac{3}{2}}$, wo β constant. Man erhält sodann:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{du} \frac{dx}{du} + \mu\beta^2 x = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{du} \frac{dy}{du} + \mu\beta^2 y = 0.$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich zur Bestimmung von $f(u)$ die Gleichung

$$\frac{dt}{du} = f'(u) = (1+e)\frac{2a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}}\left(\frac{k'}{dnu}\right)^3.$$

Die Coordinaten des bewegten Punktes ergeben sich ausgedrückt in elliptischen Functionen der Variabeln u. Dieselben Formeln gelten auch noch, wie der Verfasser in der zweiten Note zeigt, wenn die Excentricität grösser ist als die Einheit und im Falle einer repulsiven Kraft. O.

Ptaszycki. Sur un problème de mécanique. Nouv. Ann. (2) XVIII. 279-283.

Ein System dreier materieller Punkte, deren Massen sämmtlich gleich 1 sind, bewegt sich in der Ebene der rechtwinkligen Coordinaten so, dass während der ganzen Dauer der Bewegung der Schwerpunkt des Systems im Coordinatenanfangspunkt bleibt. Die Trägheitsmomente des Systems in Bezug auf die X- und Y-Axen sind constante Grössen a und b, und die Hauptträgheitsaxen fallen mit den Coordinatenaxen zusammen. Dann bewegen sich die Punkte des Systems auf einer Ellipse mit der Gleichung

$$\frac{x^2}{\frac{2a}{3}} + \frac{y^2}{\frac{2b}{3}} = 1,$$

und der Flächeninhalt des von den drei Punkten gebildeten Dreiecks ist in allen Lagen gleich $\frac{\sqrt{3ab}}{2}$. O.

R. Hoppe. Erweiterung der bekannten Speciallösung des Dreikörperproblems. Grunert Arch. LXIV. 218-223.

Drei Punkte mit gleichen Massen können sich unter gegenseitiger Anziehung geradlinig nach einem Centrum so bewegen, dass sie beständig die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks bilden. Diese analytisch darstellbare Bewegung wird nach verschiedenen Richtungen hin erweitert. In der Ebene werden statt dreier beliebig viele Punkte genommen, welche die Ecken eines regelmässigen Vielecks sind. Zwischen je zwei auf einander folgenden Hauptpunkten wird eine periodisch umkehrbare Reihe anderer Punkte von verschiedenen Radiivectores eingeschaltet etc. Im Raum endlich werden die regelmässigen Körper in Betracht gezogen. O.

R. Hoppe. Freier Fall aus einem Punkte der Erdoberfläche. Grunert Arch. LXIV. 96-105.

Betrachtet man die Erde als ein homogenes Rotationsellipsoid, so sind die Componenten ihrer Anziehung auf die Masseneinheit auf der Oberfläche oder im Innern proportional den Coordinaten des angezogenen Punktes. Der Verfasser leitet nun zunächst die Bewegungsgleichungen eines Punktes mit der Breite β ab, der zur Zeit $t = 0$ der Anziehung überlassen wird. Die absolute Bahn ergiebt sich dabei im Allgemeinen als eine doppelt gekrümmte transcendente Linie, die einen elliptischen Cylinder mit dem Axenverhältnis $k : \mu$ (k Anziehungsconstante, μ Rotationsgeschwindigkeit der Erde) umwindet, während sie periodisch in axialer Richtung zwischen zwei Grenzen auf- und abgeht. Sodann leitet der Verfasser die Gleichungen der Fallbewegung, relativ zum Horizont, ab, wie sie sich der Beobachtung darstellt. Das wird angewendet auf Fallhöhen, die sehr klein sind im Vergleich zum Erdradius. Der Verfasser betrachtet dann die absolute Bahn in ihrem ganzen Verlauf. Es zeigt sich, dass sich die Bahn selbst periodisch schneiden muss. Nach der Bestimmung der Coordinaten dieser Knotenpunkte bestimmt der Verfasser den Abstand,

in dem die Bahn am Mittelpunkt vorbeigeht, und unterzieht diese absolute Bahn noch einer näheren Discussion. O.

E. Dubois. Sur le mouvement d'un point matériel qu'on laisserait tomber (sans vitesse initiale) dans un tube transversant, suivant un diamètre, la terre entière. Mondes (2) XLIX. 272-274.

O.

H. T. Eddy. On the lateral deviation of spherical projectiles. Am. J. II. 85-88.

O. Stone. On the dynamics of a „curved ball.“ Am. J. II. 211-213.

Beide Arbeiten beschäftigen sich mit der Grösse und Erklärung der Deviation der Geschosse. O.

Th. J. van Buuren. Bydrage tot de leer der Ballistica. Diss. Leiden.

Diese Dissertation handelt von der Ballistik. In der ersten Abtheilung wird ein geschichtlicher Ueberblick des Problems gegeben; er beginnt mit den Gesetzen der Bewegung von Galilei und führt uns bis zu den neuesten Untersuchungen von Paul de St. Robert und Majewski. Die zweite Abtheilung enthält die Formeln und Sätze; zuerst werden die gewöhnlichen Gleichungen abgeleitet, bei welchen der Luftwiderstand allgemein als Function der Geschwindigkeit angenommen wird; sodann werden die Annäherungsmethode von Didion, welche den Widerstand durch die Formel av^2+bv^3 ausdrückt, und die von St. Robert, der kein bestimmtes Gesetz des Widerstandes annimmt, sondern nur eine experimentell gefundene Tafel von Geschwindigkeiten und dazu gehörenden Widerständen giebt, auseinandergesetzt; diese Methode ist nach dem Verfasser die genaueste von allen, trotz der Unvollständigkeit der Tafeln. Zum Beweise wird zuletzt ein

Beispiel in Zahlen völlig berechnet, welches Beispiel auch von Majewski nach der Didion'schen Methode behandelt worden ist, ohne jedoch genaue Resultate zu liefern. Der Verfasser ist der Ansicht, dass es für die weitere Entwickelung der äusseren Ballistik nothwendig ist, dass die analytische Mechanik und die Artilleriewissenschaft zusammen arbeiten, um Reihen von genauen Resultaten zu bekommen, durch welche sich eine numerische Tafel oder graphische Curve construiren liesse, welche den Widerstand der Luft unter verschiedenen Umständen kennen lehrt.

G.

A. Hill Curtis. On the condition which must be fulfilled by any number of forces directed towards fixed or movable centres in order that any given curve should be described freely by acted on by these forces simultaneously. Rep. Brit. Ass. 1879.

Es seien F_1, F_2, F_3 ... die Kräfte, welche längs $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \cdots$ wirken und diese zu verkleinern streben. Ferner seien c_1, c_2, c_3 ... die Sehnen der Curve, welche in der Richtung mit diesen Linien zusammenfallen. Sind weiter $Q_1, Q_2, Q_3 \ldots$ die mit F_1, F_2, F_3 ... gleich gerichteten Kräfte, unter deren alleiniger Wirkung die Curve beschrieben werden würde, so ist die gesuchte Bedingung

$$\Sigma\left(cQd\left(\frac{F}{Q}\right)\right) = 0.$$

Eine mit dieser identische Bedingung existirt in dem Falle eines Stosses, ausgeübt von einer Reihe von Kräften, welche in einer gegebenen Form im Gleichgewicht sind.

Specielle Anwendungen werden gemacht auf den Fall einer Ellipse, wenn die Kräfte gegen den Mittelpunkt und den Brennpunkt gerichtet sind.

Csy. (O.)

G. Schouten. Prysvraag No. 3. Nieuw Arch. V. 198-202.

Lösung der Preisaufgabe: „Die Zeit zu finden, welche ein schwerer Körper braucht um längs einer Kettenlinie von einem

der Befestigungspunkte zum niedrigsten Punkte zu fallen unter Berücksichtigung der Reibung des Körpers längs der Curve und des Widerstands der Luft proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit.“ G.

J. G. Ringeling. Gedwongen beweging van een punt langs een voorgeschreven vaste kromme lijn. Diss. Leiden.

Die Dissertation behandelt die Bewegung eines Punktes, welcher gezwungen ist, eine feste Curve zu durchlaufen. Zuerst werden die allgemeinen Gleichungen entwickelt, dann die Bewegung eines Punktes auf einer Curve ohne Reibung untersucht und hierbei auch die Tautochronen, Synchronen und Brachistochronen besprochen. Weiter wird auch der Widerstand des Mittels, in welchem die Bewegung stattfindet, berücksichtigt und endlich der besondere Fall betrachtet, dass die Resultante aller Kräfte durch einen festen Punkt geht. G.

G. Darboux. Sur le tautochronisme quand on a égard au frottement. Darboux Bull. (2) III. 484-488.

Herr Darboux nimmt die Wirkung von Kräften an, welche von der Lage des materiellen Punktes abhängen, der gezwungen ist auf einer Curve zu bleiben, und stellt sich die Aufgabe, die Differentialgleichung der Curve unter Berücksichtigung der Reibung zu finden, für welche Tautochronismus stattfindet. Dem Vorgange Puiseux' (Liouville J. (1) IX. p. 400—421) folgend gelangt der Verfasser zu folgender Gleichung

$$\frac{\varrho}{a^2} = f(fN-T)+\frac{d}{dw}(fN-T),$$

wo T und N die tangentiale und normale Componente der Kraft, f der Reibungscoefficient, ϱ der Krümmungsradius und a der Winkel der Tangente mit der X-Axe sind. Das Resultat wird angewandt auf den Fall der Wirkung der Schwere und auf den Fall einer centralen Kraft, wobei der Verfasser auf die be-

kannten Resultate der Cykloide im ersten Fall und der Epicykloide im zweiten Fall, wenn die Centralkraft proportional der Entfernung ist, gelangt. O.

F. Siacci. Del moto per una linea gobba. Atti di Torino XIV. 946-952.

Beweis des folgenden Satzes: Wenn ein Punkt eine Raumcurve durchläuft, so lässt sich die Beschleunigung in zwei zerlegen, die eine längs des Radius vectors von der Projection eines festen Punktes auf die osculirende Ebene, die andere längs der Tangente. Die erste wird dargestellt durch

$$F = \frac{r}{p^3} \cdot \frac{T^2}{\varrho},$$

die zweite durch

$$R = \frac{TdT}{p^2 ds} + \frac{T^2}{p^4} \frac{qdq}{ds}.$$

Dabei sind ϱ der Krümmungsradius, q die Entfernung des festen Punktes von seiner Projection auf die osculirende Ebene, r und p die Entfernungen dieser Projection von dem beweglichen Punkt und der Tangente, T eine willkürliche Function, welche das Product von p in die Geschwindigkeit darstellt, s endlich der Bogen. O.

F. Siacci e A. Dorna. Relazione su di una memoria di E. Sang. Atti di Torino XIV. 464-467.

Die Arbeit hat den Titel: „Nouveau calcul des mouvements elliptiques“ und stellt eine Formel auf, welche die mittlere Anomalie darstellt als Function eines Winkels, dessen Tangente sich zur Tangente der wahren Anomalie verhält, wie die mittlere Entfernung zur Halbaxe der Bahn. Der Arbeit ist eine Tabelle zur Berechnung beigefügt. O.

Yvon Villarceau. Théorie du pendule simple, à oscillations coniques, en ayant égard à la rotation de la terre. C. R. LXXXIX. 113-119.

Herr D. de Fonroque hatte ein konisches Pendel oscilliren lassen, demselben aber einen Ausschlag von 45° gegeben. Die Oscillationsebene war dabei ursprünglich rechtwinklig gegen den Meridian gerichtet gewesen. Sie hatte sich im Laufe der Zeit der Meridianebene, wie bei den Versuchen von Foucault, genähert, dann die Meridianebene überschritten bis zu einer gewissen Grenze, von wo sie, nachdem sie eine Weile constant geblieben, umgekehrt war, so dass also die Oscillationsebene um eine nur wenig vom Meridian abweichende Ebene oscillirte. Dieser Versuch des Herrn Fonroque hat den Verfasser vorliegender Arbeit zur Wiederaufnahme einer Untersuchung veranlasst, die er schon vor mehr als 20 Jahren angestellt hatte. Er betrachtet die Bewegung der Oscillationsebene eines Pendels, welches nur der Wirkung der Schwere und dem Einfluss der Rotation der Erde unterworfen ist, unter Voraussetzung beliebiger Amplituden. Das Problem ist schon von Gauss und Tissot, aber ohne Berücksichtigung der Rotation der Erde, behandelt worden. Serret hat dann eine allgemeine Lösung des Problems gegeben. Der Verfasser bezieht die Bewegung des Pendels auf ein System rechtwinkliger beweglicher Axen, die ihren Anfangspunkt im Aufhängepunkt des Pendels haben. Man erhält dann ein System von Gleichungen identisch mit dem, welches die Anwendung der Formeln von Coriolis auf die scheinbare Kraft in den relativen Bewegungen geben würde. Diesem System schliesst sich natürlich die Gleichung an, welche die Constanz der Entfernung des oscillirenden Punktes vom Anfangspunkte der Coordinaten ausdrückt. Bezeichnet man die Breite des Ortes mit L, die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation mit ω und mit x den Winkel der beweglichen X-Axe, so ergiebt sich für die Winkelgeschwindigkeit der Rotation der x um die Z-Axe

$$r = \omega \sin L + \frac{d\varphi}{dt}.$$

Bei der gewöhnlich gebräuchlichen Vernachlässigung der Grösse ω^2, die der Verfasser acceptirt, erhält man beim Uebergang zu Polarcoordinaten

$$\left(\frac{dx}{dt}+r\right)\sin^2\beta = A+\delta A,$$

$$\delta A = -2\omega\cos L\int\sin(\varphi+\alpha)\sin^2\beta\,\delta\beta,$$

$$\frac{d\beta^2}{dt^2} = C+\frac{2g}{l}\cos\beta z-\frac{(A+\delta A)^2}{\sin^2\beta}.$$

Wird hierin δA vernachlässigt, so erhält man die Resultate von Gauss und Tissot. Geschieht dies nicht, so erhält man eine weitere Annäherung, indem man δA mit Hülfe der erst erhaltenen Resultate berechnet. Wesentlich vereinfacht wird das Problem durch die Beschränkung auf den Fall, dass das Pendel von scheinbarer Ruhe ausgeht oder keinen horizontalen Impuls erhält, wie es bei den Versuchen des Herrn de Fonroque der Fall war. Diesen Fall behandelt der Verfasser nun weiter, indem er zuerst die Werthe der Coordinaten, bezogen auf die Axen, bestimmt, dann die Bewegung der Axen selbst untersucht. Es ergeben sich dabei Resultate, welche sich mit den Versuchen des Herrn Fonroque nicht vereinbaren lassen. Zum Schluss spricht der Verfasser Vermuthungen aus, wie es vielleicht möglich sei, dieselben zu erklären. O.

Faye. Théorie mathématique des oscillations d'un pendule double par M. Peirce. C. R. LXXXIX. 462-463.

Bei der Untersuchung der Gravitationsconstante mittels des Pendels haben sich neuerdings Fehler gezeigt, deren Beseitigung auf dem geodätischen Congresse in Stuttgart 1877 besprochen wurde. Dieselben wurden zurückgeführt auf die Wirkung der Oscillationen des Pendels auf den metallischen Fuss und den Steinpfeiler des Apparats. Herr Faye hatte zur Vermeidung vorgeschlagen, diesen Fehler durch Anbringung eines zweiten gleichen aber in entgegengesetztem Sinne schwingenden Pendels

zu beseitigen, ein Vorschlag, der jedoch von dem Congress nicht acceptirt wurde. Dies hat nun Herr Peirce in einer Arbeit theoretisch untersucht. Ueber den Inhalt derselben giebt die Notiz des Herrn Faye keinen Aufschluss. O.

P. de Saint-Robert. Du mouvement d'un pendule simple dans une voiture de chemin de fer. Acc. R. d. L. (3) III. 145.

Nach dieser ganz kurzen Notiz über die Arbeit des Verfassers handelt es sich um die Constanz der Schwingungsebene des Pendels. O.

A. Miller. Ueber die Schwingungsdauer des mathematischen Pendels bei kleinen Amplituden. Bair. Bl. XV. 120-122.

Durch Einschliessung in Grenzen wird gezeigt, dass die Schwingungsdauer etwas grösser als

$$3,12\sqrt{\frac{l}{g}}$$

ist, unter l die Pendellänge, unter g die Beschleunigung der Schwere verstanden. Da an Stelle der Zahl 3,12 die Zahl π stehen soll, so ist ein Fehler von ungefähr 7 Procent begangen. Gr.

L. G. Barbour. Les pendules de Foucault et de Tobin. Mondes (2) XLVIII. 111-112.

Herr Tobin hat einen Apparat construirt, den er Sine-pendulum genannt hat. Herr Barbour bemerkt, dass er im Wesentlichen mit dem Foucault'schen Pendel übereinstimme und auch denselben Gesetzen folge. O.

S. Günther. Der Euler'sche Zerlegungssatz und das Foucault'sche Pendel. Arch. Math. a Fis. II. 84-95.

Der Verfasser giebt zunächst einen Beweis der bekannten Sinusformel für die Drehung der Ebene eines Foucault'schen Pendels, der auf einem Satz von Euler über die Aequivalenz der Rotationen um sich schneidende Axen beruht (siehe N. Comm. Ac. Petr. XX., Schell, Theorie d. Bew. und Kräfte 1870 p. 54). Sodann unterzieht er eine Reihe anderer Beweise einer Kritik, in welcher er den gemeinsamen Fehler derselben nachzuweisen sucht. Danach liegt er in der Verwechselung eines speciellen Falles des oben citirten Theorems mit dem allgemeinen.

O.

P. de Saint-Robert. Poche parole intorno ad una memoria di Francesco Siacci sul pendolo di Leone Foucault. Atti di Torino XIV. 141-144.

Besprechung von Einwänden, die Herr Siacci in einer Arbeit (s. F. d. M. X. 1878, p. 623) gegen Entwickelungen des Verfassers erhoben hatte.

O.

H. Kamerlingh Onnes. Nieuwe bewijzen voor de aswenteling der aarde. Diss. Groningen.

H. Kamerlingh Onnes. Over de betrekkelijke beweging. Nieuw Arch. V. 58-121, 135-186.

Die interessante Dissertation, deren Titel zuerst genannt ist, behandelt auf 290 Seiten unter Beigabe von 4 schön gezeichneten Tafeln einige neue Beweise für die Rotation der Erde. Die Schrift sucht in erster Linie zu zeigen, dass der bekannte Pendelversuch von Foucault nur ein ganz besonderer Fall ist aus einer grossen Gruppe von Erscheinungen, welche für den Begriff der relativen Bewegung sehr lehrreich sind, da sie auf experimentellem Wege eben so leicht wie überzeugend die Rotation der Erde beweisen lassen. Die Anregung zu seiner Untersuchung gaben dem Verfasser einige Versuche, welche er mit dem Foucault'schen Pendel unter Leitung des Herrn Prof. G. Kirchhoff in Berlin anstellte.

Die Schrift besteht aus zwei vollkommen getrennten Abtheilungen, und zwar enthält die erste eine rein theoretische Untersuchung, die zweite einen experimentellen Theil. Der erste dieser Theile ist überdies unter dem zweiten der obengenannten Titel in der mathematischen Zeitschrift aufgenommen.

Die erste Abtheilung beginnt mit der Auseinandersetzung der Theorie der relativen Bewegung im allgemeinen Sinne. Ausgehend von den Hamilton-Jacobi'schen Grundgleichungen wird auch die Schering'sche Kräftefunction eingeführt, um von der ungestörten auf die gestörte Bewegung übergehen zu können. Auch wird gezeigt, dass das Princip des letzten Multiplicators auf die relative Bewegung anwendbar ist, wenn dieses, abgesehen von der Bewegung der Coordinatenaxen, ohne Hilfe der Integrale geschehen kann.

Sodann untersucht der Verfasser den besonderen Fall der relativen Bewegung, dass ein Punkt während seiner Bewegung in einer um einen festen Punkt sich drehenden Ebene bleiben muss und, hinsichtlich seiner augenblicklichen Lage in Beziehung auf ein rechtwinkliges fest mit der Ebene verbundenes Coordinatensystem mit dem Anfangspunkt im Drehungsmittelpunkte, der Wirkung der Kräftefunction

$$U = -\tfrac{1}{2}(p^2x^2 + q^2y^2)$$

unterworfen ist, wobei p^2 und q^2 positive Constanten bedeuten. Zuerst wird das Problem der ungestörten Bewegung, d. h. ohne Rotation der Axen mittels der charakteristischen Function gelöst und nachher die Störungsfunction eingeführt. Ohne Berücksichtigung der Störung giebt das Problem bekanntlich die Figuren von Lissajous; mit Berücksichtigung derselben kommt der Verfasser zu dem merkwürdigen Resultate, dass nur die Figuren, welche zu wenig verschiedenen Oscillationszeiten gehören, in zwei senkrechten Richtungen durch eine langsame constante Rotation der Coordinatenaxen und auch nur durch die Componente der Rotationsgeschwindigkeit, welche senkrecht auf der Ebene steht, modificirt werden; die Figuren dagegen, welche zu anderen Verhältnissen der Oscillationsdauer gehören, nicht. Der Einfluss dieser Rotationsgeschwindigkeit auf die Figuren von Lissajous wird genau

betrachtet; zuerst berechnet, dann construirt. Die wichtigsten Fälle, welche hierbei vorkommen, werden mit grosser Ausführlichkeit abgeleitet und durch eine Zeichnung veranschaulicht; auch die Figuren von Bravais werden behandelt, da sie einen besonderen Fall ausmachen. Der Einfluss der Erdrotation auf die Bahn des Punktes tritt hier deutlich hervor.

In einem weiteren Capitel behandelt der Verfasser ein verwandtes Problem, nämlich die Beobachtungen Foucault's über die Schwingungen eines Stabes, dessen eines Ende mit einer rotirenden Axe verbunden ist. Im Verlauf dieser Untersuchung kommt er zur Betrachtung der unendlich kleinen Bewegungen eines Körpers, welcher sich frei um einen Punkt bewegen kann, aber der Gravitation unterworfen ist, wobei von der Drehung der Erde abgesehen wird. Der Verfasser weist auf die Beziehung dieses Problems zu den Figuren von Lissajous hin. Alsdann berechnet er den Einfluss der Erdrotation auf diese Bewegung, wobei auf's Neue die Störungsfunction, welche zu diesem Falle gehört, auftritt. Es wird hier angedeutet, dass auf vier verschiedene Weisen von den Bahnen, welche durch den Körper beschrieben werden, auf diese Rotation zurückgeschlossen werden kann. Durch Betrachtung der besonderen Fälle findet der Verfasser einerseits Resultate, welche mit den früher von Bravais, Galbrought und Haughton erhaltenen übereinstimmen, andrerseits aber die Fälle, welche von Hansen in seiner bekannten Untersuchung über die Pendelversuche von Foucault behandelt sind. Die Uebereinstimmung wird eine vollkommene, wenn man einen Fehler vermeidet, den Hansen begangen, und der, nachdem er bisher unbemerkt geblieben, durch eine ausführliche Rechnung aufgedeckt wird. Dieser Fehler besteht aus einem unrichtig berechneten Zahlencoefficienten. Auch wird gezeigt, wie die Formeln von Bravais in den hier entwickelten enthalten sind.

Der zweite Theil der theoretischen Untersuchung beschäftigt sich mit der Bewegung eines cardanisch aufgehängten Pendels unter Berücksichtigung der Drehung der Erde und der Reibung. Zu diesem Zweck wird der Einfluss der Störung, welcher zuvor allgemein angegeben war, in Reihen entwickelt, wobei auf die

Ordnung der darin vorkommenden Grössen die grösste Achtsamkeit verwendet werden muss. Auch der Einfluss der Contraction des Pendels auf die ungestörte Bewegung wird der Berechnung unterworfen und gezeigt, wie auch die Form des Pendels berücksichtigt werden muss, um die Wirkung der Erdrotation zu erhalten.

Mit Rücksicht auf die Reibung wird bemerkt, dass die der Luft ausser Rechnung bleiben kann, weil das Pendel sich im luftleeren Raume bewegt, so dass nur die Reibung der beiden Messer auf den Lagerplatten zu betrachten ist. Die erhaltenen Resultate werden nun auf die nach des Verfassers Methode angestellten Pendelversuche und sodann auf jene von Foucault und Bravais angewendet. Endlich werden sie auf die interessanten Versuche, welche von van der Willigen in Harlem angestellt und in den „Archives du Musée Teyler" mitgetheilt worden sind, ausgedehnt.

Die zweite Abtheilung des Werkes behandelt die Beobachtungen. Jedoch lässt der Verfasser eine zweite theoretische Untersuchung vorangehen, deren Gegenstand eine mehr elementare Ableitung der Bewegungserscheinungen des sphärischen Pendels bildet. Er zeigt darin, wie ein solches Pendel, wenn es nicht ungefähr einen Rotationskörper darstellt, dessen Axe die den Schwerpunkt und den Aufhängepunkt verbindende Gerade ist, dieselben Figuren von Lissajous beschreibt, als wenn die Erde in Ruhe wäre und es so in ebene Schwingungen gebracht werden könnte, dass die Pendelebene mit der Erde nicht gedreht würde oder die Schwingungen merklich von ebenen Schwingungen abwichen.

Diesen Auseinandersetzungen folgt eine ausführliche Beschreibung der Apparate, mit welchen die Versuche im physikalischen Laboratorium freilich unter sehr erschwerenden Umständen angestellt worden sind. Das wichtigste derselben bestand aus einem sphärischen Pendel von 1,2 M. Länge, welches in einem luftleeren Raume an zwei sich senkrecht kreuzenden Messern aufgehängt war. Die Beobachtungen geschahen mittels eines Kathetometers, dessen Fernrohr mit einem Ocularmikrometer ver-

sehen war. Zur Beleuchtung diente das Licht einer aussen angebrachten Lampe, welches von zwei im Innern befindlichen Prismen gebrochen wurde. Die Schwingungen des Pendels, welche sehr klein sind, wurden durch Ringe beobachtet, welche unter dem Pendel angebracht und mit zwei Kreuzfaden versehen waren. Sehr interessant, aber ziemlich complicirt ist die Einrichtung, durch welche das Pendel in eine voraus bestimmte Bewegung gebracht wird, ohne dass Luft zudringen kann. Daneben hat der Verfasser noch eine zweite Einrichtung benutzt, bei welcher die Beobachtungen mittels eines kleinen Spiegels angestellt wurden, welcher oben am Pendel befestigt war. Die Versuche, welche während mehrerer Monate fortgesetzt sind, werden ausführlich beschrieben und discutirt. Das Mittel aller Versuche giebt für die Rotationsgeschwindigkeit 12°,04, während die Theorie hierfür 12°,03 berechnen lässt. Der Verfasser bemerkt jedoch, dass diese grosse Uebereinstimmung mehr zufällig sei, weil die Genauigkeit der Beobachtungen nur die vorletzte Decimale mit Bestimmtheit geben kann. Eine Vergleichung mit Beobachtungsreihen, welche mit dem Foucault'schen Pendel angestellt wurden, ergiebt jedoch, dass die Versuche mit dem vom Verfasser angewendeten Apparate eine grössere Genauigkeit geben, obgleich sie mit viel kürzerem Pendel und während viel kürzerer Zeiträume angestellt wurden. Auch beobachtete er nicht nur die Aenderung der Lage, sondern auch die Form der Bahn, so dass er eine grosse Mannigfaltigkeit der Bewegungserscheinungen erhielt. Endlich zeigt der Verfasser, wie mit seinem Apparate auch der gewöhnliche Pendelversuch von Foucault angestellt werden kann, wobei die Resultate viel genauer werden, wie mit einem grösseren Pendel, mit dem von van der Willigen und anderen.

Ohne Zweifel kann diese Arbeit sowohl in theoretischer als experimenteller Hinsicht die ausführlichste und eingehendste von allen genannt werden, welche bisher zum Zwecke hatten, sowohl in theoretischer als experimenteller Hinsicht mittels Pendelversuchen die Rotation der Erde zu beweisen. G.

H. Gyldén. Rotationslagarne för en fast kropp, hvars yta äv betäckt aff ett slytassde äume. Andra medde landet. Öfv. v. Stockh. 1879.

Zweiter Theil der Untersuchung, über welche der Verfasser schon im Jahre 1878 der Akademie eine Mittheilung gemacht hatte. Der Verfasser kommt zu folgendem Resultat: Ein in rotirende Bewegung versetzter fester Körper, dessen Oberfläche von einer Flüssigkeit bedeckt ist, strebt in Folge der Reibung der fliessenden Theilchen gegen die festen einer gewissen Gleichgewichtslage entgegen, in welcher die augenblickliche Rotationsaxe mit einer Hauptaxe zusammenfällt.

Er giebt auch approximative Ausdrücke für die Gesetze, nach welchen die Bewegung, so lange die Gleichgewichtslage noch nicht erreicht ist, stattfindet. M. L.

F. Siacci. Sulla rotazione dei corpi. Acc. R. d. L. (3) III. 146.

„Wenn ein Körper, der nicht mit Kraft begabt ist, um einen festen Punkt sich dreht, so wird ein mit ihm verbundenes Hyperboloid, dessen Axen mit den Hauptaxen des Körpers zusammenfallen, ohne zu streifen auf einem geraden Kreiscylinder rollen, dessen Axe durch den festen Punkt geht und normal zur unveränderlichen Ebene ist. O.

G. Schmidt. Einfache Ableitung der Euler'schen Bewegungsgleichungen. Prag. Ber. 1878. 79-81.

Der Verfasser erläutert die Bedeutung des Gliedes

$$(J_3-J_2)w_2w_3 \quad \text{u. s. w.}$$

in den Gleichungen

$$J_1\frac{dw_1}{dt}+(J_3-J_2)w_2w_3 = L_1 \quad \text{u. s. w.,}$$

wo J_1, J_2, J_3 die Trägheitsmomente in Bezug auf die orthogonalen Hauptaxen des Körpers, w_1, w_2, w_3 die momentanen Win-

kelgeschwindigkeiten in Beziehung auf diese Hauptaxen, L_1, L_2, L_3 die Momente der Kräfte in Bezug auf dieselben Axen sind.

O.

WEINMEISTER. Ueber die Drehung eines homogenen, rechtwinklig-parallelepipedischen Stabes um eine verticale Axe. Pr. Leipzig.

Der Verfasser setzt einen homogenen, rechtwinkelig parallelepipedischen Stab voraus, dessen Dimensionen und dessen Dichtigkeit bekannt sind. Derselbe dreht sich horizontal um eine verticale Axe. Von der Reibung wird abgesehen. Er beweist dann zunächst folgenden Satz: „Die in einem beliebigen Punkte geäusserte Wirkung eines um eine sonst beliebige verticale Axe sich horizontal drehenden homogenen Stabes lässt sich in jedem Augenblick ersetzen durch die einer unendlich kleinen Kugel, welche in demselben Abstand wie jener Punkt um dieselbe Axe rotirt, wenn das Trägheitsmoment der Kugel in Bezug auf die Rotationsaxe dem entsprechenden des Stabes gleich ist, und die Kugel in jedem Augenblick dieselbe Winkelgeschwindigkeit besitzt wie der Stab.“ Der Verfasser lässt sodann die Rotationsbewegung des Stabes durch eine in der Rotationsebene liegende unendlich kleine Kugel gehemmt werden und untersucht speciell die Geschwindigkeit, welche diese durch den Anprall erhält, sowie die Curve, welche sie nun unter dem Einfluss der Schwere beschreibt.

O.

P. HARZER. Movimento d'un ellissoide di rotazione rigido, schiacciato, composto di strati di densità costante che cresce verso il centro, e rotante intorno all' asse di rotazione sotto influenza d'un corpo che gira intorno al centro dell' ellissoide secondo le leggi di Kepler. Battaglini G. XVI. 53-68, 183-201.

Analytische Behandlung des Problems, das durch den Titel zur Genüge gekennzeichnet ist.

O.

J. J. Walker. Solution of a question (5802). Educ. Times XXXI. 58-59.

O sei ein fester Punkt in einem starren Körper; die Richtungscosinus der Linien OA, OB, OC mögen resp. l, m, n; l', m', n'; λ, μ, ν sein. Der Verfasser beweist, dass dann eine Rotation des Körpers um OA um einen Winkel 2θ, der eine Rotation um OB um einen Winkel $2\theta'$ folgt, äquivalent ist einer Rotation um die Axe OC um einen Winkel 2φ, wo

$$\frac{\cos\varphi}{\cos\theta'\cos\theta-\sin\theta'\sin\theta(ll'+mm'+nn')} = \frac{\lambda\sin\varphi}{X} = \frac{\mu\sin\varphi}{Y} = \frac{\nu\sin\varphi}{Z}$$

und

$$X = l\cos\theta'\sin\theta+l'\cos\theta\sin\theta'+\sin\theta\sin\theta'(m'n-mn') \text{ u. s. f.}$$

Dieser Satz ist eine der ersten Anwendungen der Quaternionen von Hamilton, siehe Proc. of Dublin. III. 1834. O.

A. G. Greenhill. Solution of a mechanical problem. Messenger (2) VIII. 151-155.

Discussion folgenden Problems: „Ein glatter Draht ist in die Form eines Kreises vom Radius a gebogen und rotirt mit gleichförmiger Geschwindigkeit ω um eine verticale durch den Mittelpunkt gehende Axe, welche einen Winkel α mit der Ebene des Kreises macht. Wenn nun ein glattes Kügelchen auf dem Drahte schleift, zu zeigen, dass die Bewegungsgleichung des Kügelchens längs des Drahtes heisst:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = a\omega^2\cos^2\alpha\cos\frac{s}{\alpha}\sin\frac{s}{\alpha} - g\cos\alpha\sin\frac{s}{\alpha},$$

wo s vom niedrigsten Punkt gemessen ist. Zu finden ferner die Gleichgewichtslage des Kügelchens und die Bewegung zu bestimmen.“ Die Lösung enthält elliptische Functionen.

Glr. (O.)

P. Gilbert. Sur la réduction des forces centrifuges composées dans le mouvement d'un corps solide. Ann. Soc. scient. Brux. III. B. 141-156.

Der Verfasser löst die im Titel angegebene Frage in einfacher Weise, indem er für die zusammengesetzte Centrifugalbeschleunigung die in seinem „Cours de Mécanique" vorgeschlagene geometrische Darstellung adoptirt. Er findet so auf naturgemässem Wege die Resultate, die die Herren Résal und Quet früher gefunden haben, sowie eine Anzahl neuer. Mn. (O.)

Holzmüller. Elementarer Beweis eines Satzes der Mechanik auf geometrischem Wege. Schlömilch Z. XXIV. 255-256.

Der Satz heisst: „Die Centrifugalkraft eines ebenen Systems von Massenpunkten, welches um eine senkrecht gegen die Ebene gerichtete Axe rotirt, ist der Grösse und Richtung nach gleich der Centrifugalkraft der im Schwerpunkt vereinigt gedachten Masse." Den Beweis gründet der Verfasser auf folgenden geometrischen Satz: „Theilt man zwei aneinander stossende Parallelogrammseiten vom Eckpunkte aus im Verhältnis $1:m$, resp. $1:m_1$, und verbindet man die Schnittpunkte, so wird die Verbindungslinie durch die Diagonalseite im Verhältnis $m_1:m$, die Diagonale selbst im Verhältnis $1:(m+m_1)$ getheilt." O.

A. Amthor. Fadenspannung und die Poggendorff'sche Fallmaschine. Isis 1879.

Poggendorff hat in Pogg. Ann. XCII. auf Grund von Versuchen mit seiner Fallmaschine den Satz ausgesprochen, „dass das Gewicht eines Körpers sich ändert, wenn sich derselbe vertical auf- oder abwärts bewegt, und zwar so, dass der Körper schwerer wird, wenn er sich vom Erdmittelpunkte entfernt, leichter, wenn er sich demselben nähert." Herr Barentin war durch Versuche, welche er im Jubelbande derselben Annalen veröffentlicht hatte,

zu denselben Resultaten und derselben Erklärung gelangt. Der Verfasser zeigt, dass die Beobachtungen allerdings richtig seien, dass aber die Erklärung der Versuche auf einem Uebersehen der Wirkung der Fadenspannung beruhe, dass also die Erscheinungen nicht mit der gewöhnlichen Ansicht in Widerspruch ständen.

O.

E. Walder. Der gerade und centrale Stoss elastischer und unelastischer Körper. Pr. Regensburg.

Darstellung des Problems für Schüler.

O.

H. P. J. Stenfert Kroese. De leer van de botsing van lichamen geschiedkundig otwikkeld en toegelicht. Diss. Leiden.

Die Lehre vom Stosse der Körper wird in dieser Dissertation hauptsächlich vom historischen Standpunkte entwickelt. Dieselbe ist in vier Abtheilungen getheilt. In der ersten wird die Zeit von Galilei bis zum Anfange des siebzehnten Jahrhunderts behandelt. Sie beschreibt ziemlich ausführlich und sehr klar die ersten Entdeckungen von Wallis, Wren und Huygens. Die zweite umfasst die Periode, in welcher Johannes Bernoulli seinen Streit über das Mass der Kräfte führte, welcher durch die Preisfrage der Pariser Akademie über den elastischen und nicht elastischen Stoss der Körper hervorgerufen worden war. Die dritte Abtheilung enthält die mehr umfassenden Resultate von d'Alembert, Lagrange und Carnot, während die vierte sich hauptsächlich mit den neueren Erörterungen von Sturm, Duhamel und Coriolis beschäftigt.

G.

Philipps. Du spiral réglant sphérique des chronomètres. C. R. LXXXVIII. 1147-1154, 1234-1237.

Fortsetzung der Arbeit, über die F. d. M. X. 1878. p. 634-635 berichtet ist. Der Verfasser betrachtet hier die sphärische Spi-

rale. Gang, Methode und Näherung der Untersuchung sind hier dieselben, wie dort. O.

H. Léauté. Sur un procédé permettant d'obtenir, d'un régulateur à boules quelconque, le degré d'isochronisme qu'on veut et de maintenir ce degré d'isochronisme pour toutes les vitesses de régime. 1) Théorie générale, 2) Règles pratiques. C. R. LXXXIX. 431-433, 473-475.

Die Aufgabe, die sich der Verfasser gestellt hat, ist aus dem Titel ersichtlich. Er betrachtet einen beliebigen Regulator mit Kugeln. Die Lage der Massen, aus denen ein solcher Regulator zusammengesetzt ist, hängt dann nur ab von der Lage des beweglichen Ringes. Bezeichnet daher z die Höhe desselben über einer festen horizontalen Ebene, ω die dieser Höhe entsprechende gleichförmige Winkelgeschwindigkeit, so ist ω eine Function von z, deren Form mit dem Regulator und den auf ihn wirkenden Kräften veränderlich ist. Der Verfasser ersetzt sie annäherungsweise durch eine lineare Function von z, welche dieselben Werthe ω' und ω'' für die Punkte z' und z'' hat, die um $\frac{7}{16}$ des Laufes des Ringes von der Mitte z_0 desselben abstehen. Man erhält dann

$$\omega = \Omega\left(1-\varepsilon\frac{z-z_0}{z'-z_0}\right) = \Omega\left(1+\varepsilon\frac{z-z_0}{z''-z_0}\right),$$

wo Ω die der mittleren Lage des Ringes entsprechende Winkelgeschwindigkeit ist, während ε ein Mass für den Grad des Isochronismus bedeutet. Der Verfasser beweist nun, dass zwischen einer auf den Ring ausgeübten verticalen Kraft F und ω eine Relation von der Form

$$F = A + B\omega^2$$

existiren muss, wo A und B Functionen von z sind, zeigt dann, wie man F mit Hülfe der Bedingung, dass z' und z'' dieser Gleichung genügen müssen, bestimmen kann und geht dann über zur Bestimmung des nöthigen Gegengewichts. Im zweiten Artikel giebt der Verfasser eine graphische und eine experimentelle

Methode zur Bestimmung des Punktes an, wo dasselbe angebracht werden muss. O.

C. PFISTERER. Ueber die Einwirkung der Gabellänge auf den Gang einer Pendeluhr. D. Uhrm. Z. III. 220-221.

Der Verfasser untersucht in der vorliegenden Notiz den Einfluss der Gabel auf die Schwingungsdauer des Pendels. Es ergiebt sich, dass das Gewicht einen Einfluss ausübt. Auch die Länge der Gabel wirkt ein und zwar so, dass die Schwingungsdauer mit wachsender Gabellänge abnimmt, so lange die Gabel kleiner ist als das halbe Pendel, dagegen zunimmt mit wachsender Gabellänge, sobald die Gabel länger als das halbe Pendel ist. Der theoretischen Untersuchung folgt ein Bericht über die angestellten Versuche. O.

Weitere Lehrsätze und Lösungen von Aufgaben aus der Dynamik fester Körper von MINCHIN, TOWNSEND, D. EDWARDES, A. TOURETTES finden sich Educ. Times XXXI. 17, 37-38; XXXII. 19-21, 24, 93-94; Nouv. Ann. (2) XVIII. 97-101, 118-122, 173-175, 175-179.

O.

N. UMOW. Ueber die scheinbare gegenseitige Einwirkung zwischen den in ein elastisches Medium eingetauchten Körpern. Mosk. Math. Samml. IX. 73-108. (Russisch).

Bw.

B. Hydrodynamik.

TOWNSEND, MINCHIN, SHARPE, STEGGALL, ALLMAN, HAUGHTON. Solutions of a question (5954). Educ. Times XXXI. 103-111.

Für die allgemeinen hydrodynamischen Gleichungen in räumlichen Polarcoordinaten werden verschiedene Ableitungen

mitgetheilt, theils directe, theils durch Transformation aus geradlinigen Coordinaten. Dabei wird neben beliebigen Anziehungskräften die Rotation um die Axe des Polarcoordinatensystems in Rechnung gezogen. Wn.

C. A. Bjerknes. Hydro-électricité et hydromagnétisme; résultats analytiques. C. R. LXXXVIII. 165-167.

C. A. Bjerknes. Expériences hydrodynamiques avec des corps vibrants, et imitation, dans un sens inverse, des forces d'électricité statique et du magnétisme. C. R. LXXXIX. 144-146.

In einer früheren Arbeit hatte der Verfasser die Druckkräfte ermittelt, die durch gleichzeitige, mit Contractionen und Dilatationen verbundene Bewegungen mehrerer kugelförmiger Körper in einer incompressiblen Flüssigkeit entstehen (cfr. F. d. M. VII. 1875. p. 587, VIII. 1876. p. 612). Hier werden einige weitere Folgerungen dieser Theorie (ohne Ableitung) mitgetheilt. Die in Rede stehenden Druckkräfte sind ganz von der Natur der Kräfte, welche Magnetpole, resp. elektrisirte Körper auf einander ausüben; nur mit dem wesentlichen Unterschiede, dass in dem hydrodynamischen Problem gleichartige Bewegungen der Kugeln eine scheinbare Anziehung, entgegengesetzte Bewegungen eine Abstossung ergeben, während sich gleichnamige Magnetpole abstossen. Die Analogie beider Arten von Kräften wird noch specieller ausgeführt.

Die zweite der oben genannten Arbeiten ist dem experimentellen Nachweis der in Rede stehenden Kräfte gewidmet.

Wn.

A. V. Bäcklund. Om en särskild art af rórelse i en obegränsad, osammantrykbar vätske, i hvilken sammantrykbare kroppar äro utspridda. Lund Arsskr. XV.

Der Verfasser beginnt mit einer Hinweisung auf die hydrodynamischen Arbeiten, die in den letzten zehn Jahren von

Herrn Bjerknes in Christiania publicirt worden sind. Er geht demnächst zu seinem Thema über, indem er sich die Aufgabe stellt, eine besondere Art von Bewegung in einer unbegrenzten unzusammendrückbaren Flüssigkeit zu untersuchen, in welcher zusammendrückbare Körper zerstreut sind.

Statt ein System von besonderen Körpern, wie Kugeln oder Ellipsoiden zu betrachten, die, indem sie mit ihren Schwerpunkten in der Flüssigkeit fortrücken, entweder starr bleiben oder zu jeder Zeit vorausgegebene Formänderungen erleiden, die dann nicht in Widerstreit mit dem Charakter der vorgeschriebenen Grundformen stehen dürfen, stellt der Verfasser sich hier in gewissen Beziehungen auf einen allgemeineren Standpunkt; in andern werden dann entsprechende Beschränkungen gemacht. Er geht von einer Anzahl von Körpern aus, die zu Anfang der Zeit eine beliebige Form besitzen, welche aber auch nur für diese Anfangszeit gegeben ist. Die Bestimmung der später sich entwickelnden Körpergestalten, wie vorzüglich der Schwerpunktsbewegungen soll dann an die Bedingungen geknüpft sein, dass die Flüssigkeitsbewegungen oder Störungen nur von den Bewegungen der Körper selbst bedingt sind, und dass sie ferner, was das charakteristische ist, immer gegen die Oberflächen senkrecht gerichtet sein sollen. Passend gewählte äussere Kräfte müssen ferner hinzugefügt werden.

Als Folge dieser Bedingungen ergiebt sich, dass die Formänderungen wenigstens für einen der Körper des Systems auch nothwendig mit Veränderungen des Volumens verbunden sein müssen. Zweitens wird die Geschwindigkeits-Function eine Function derselben Art werden wie die Potentiale elektrischer Massen, welche auf den Körpern verbreitet sein möchten; die letzten müssten dann als vollkommene Leiter betrachtet werden, und es müsste elektrisches Gleichgewicht bestehen.

Hiervon ausgehend kommt der Verfasser zu dem Resultate, dass alsdann scheinbare attractive und repulsive Kräfte entstehen, welche nach einem ähnlichen Gesetze wirken können, als ob auch sie von elektrischen über den Oberflächen ausgebreiteten Massen herrührten. Der Verfasser verweist, nachdem er später als ge-

meinschaftliche Anfangsform die Kugel angenommen hat, auf den Aufsatz von Bjerknes in den Verh. d. Gesellsch. d. Wissenschaft in Christiania für das Jahr 1875 pag. 389. Darin (s. F. d. M. VII. 1875. pag. 587) wird nämlich eine vorläufige Mittheilung über die Kräfte gegeben, die entstehen, wenn kugelförmige Körper, indem sie Dilatations- und Kontractionsschwingungen ausführen, sich in einer incompressiblen Flüssigkeit bewegen. Indem der Verfasser sodann, in einem modificirten Sinne, ein Theorem von Bjerknes über die Krafterscheinungen und die Bewegungen wieder herstellt, giebt er ferner an, wie auch die von ihm behandelten Körper, die also künftig nur näherungsweise als in Radialschwingungen begriffene Kugeln aufzufassen sind, ihre ursprüngliche Gestalt verändern müssen. Ebenso bespricht er einen Fall, in dem die neueren Aenderungen zu einem Minimum reducirt werden können.

Ein anderer Fall, den der Verfasser giebt, lässt sich in folgenden Worten ausdrücken. Wenn die Dimensionen der sämmtlichen Körper S sehr klein sind in Beziehung auf ihre Abstände unter einander, und wenn ebenso die Geschwindigkeit, mit welcher S_i sich bewegt, klein ist, so dass man die Grössen vernachlässigen kann, die umgekehrt proportional sind dem Verhältnisse zwischen dem Kubus des Abstandes von S_i nach S_k und dem Producte der genannten Geschwindigkeit mit dem Volumen von S_i; so wird S_i sich bewegen, als ob es sich allein in der Flüssigkeit befände; als ob es sich dort erweiterte und zusammenzöge in einer Weise, die durch die Derivirte der Geschwindigkeitsfunction nach der Normale bestimmt ist, und dabei Flüssigkeitstheile aufnähme oder abgäbe, so dass die Aenderung der Form und Lage in der umgebenden Flüssigkeit selbst keine Bewegung veranlassen würde; und endlich als ob es unter dem Einflusse von Kräften stände, die zwischen den Körpern wirkten.

Diesem Satze, der sich auf Körper einer beliebigen Anfangsform bezieht, entspricht in der Theorie des reinen Kugelsystems von Bjerknes der 1868 für die starren, später auch für die veränderlichen Kugeln aufgestellte Satz von der gegen-

seitigen Unabhängigkeit (innerhalb der unten angegebenen Grenzen) zwischen den durch die Bewegungen und Volumenänderungen entstehenden scheinbaren Fernkräften. Diese Unabhängigkeit oder diese „Isolirtheit“, die es möglich macht, jeden Körper für sich gegenüber den anderen zu betrachten und nachher eine Superposition zu benutzen, besteht in der That selbst für die drei ersten Reihen von Theilkräften; nicht allein für diejenigen, die umgekehrt wie die Quadrate der Abstände abnehmen, sondern auch für diejenigen, welche umgekehrt wie die Kuben und Biquadrate derselben Abstände abnehmen müssten. Hier hört aber diese Einfachheit des Gesetzes auf, was sich auch auf anderen Gebieten bemerken lässt.

Uebrigens soll hier zur besseren Orientirung und wohl auch zum volleren Verständnis der von dem Verfasser aufgestellten Resultate auf die schon in diesem Jahrbuch besprochenen fünf Artikel in den C. R. 1877: „Remarques historiques etc. (s. F. d. M. IX. p. 667)“ verwiesen werden.

Bg.

E. Gödecker. Die Bewegung eines kreisförmigen Ringes in einer unendlichen incompressiblen Flüssigkeit. Nach dem Vortrage von B. Riemann bearbeitet. Pr. Göttingen.

In seinen im Jahre 1861 gehaltenen Vorträgen über partielle Differentialgleichungen behandelte Riemann, nachdem er die Aufgabe der Bewegung einer Kugel in einer Flüssigkeit absolvirt, die Bewegung eines Ringes, ohne indes das letztere Problem zu beenden. Im vorliegenden Aufsatze wird zum ersten Mal der bezügliche Theil des Riemann'schen Vortrags veröffentlicht und zugleich der erste Theil der Aufgabe, nämlich die Bewegung der unendlichen und incompressiblen Flüssigkeit, in der sich ein fester Ring befindet, zum Abschluss gebracht. Nachdem die Aufgabe in derselben Weise und mit Benutzung derselben Bezeichnung präcisirt ist, wie bei dem Kugelproblem (vgl. Riemann's Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen, herausgegeben von Hattendorff, § 110), wird die Differential-

gleichung für das Geschwindigkeitspotential auf Ringcoordinaten transformirt. Zwischen diesen und den rechtwinkligen Coordinaten bestehen die Gleichungen:

$$x = r\cos\vartheta,\ y = r\sin\vartheta,\ r + zi = \frac{1-\varrho e^{i\psi}}{1+\varrho e^{i\psi}}\sqrt{a^2-c^2}.$$

Die transformirte Gleichung ergiebt eine Particularlösung von der Form:

$$\varphi = r^{-\frac{1}{2}}.R.\cos(m\psi)\cos(n\vartheta),$$

wobei an Stelle der Cosinus auch die Sinus treten können, während R der Gleichung

$$\left(\frac{\varrho-\frac{1}{\varrho}}{2}\right)\left\{\frac{d^2R}{(d\log\varrho)^2} - m^2R\right\} - n^2R + \tfrac{1}{4}R = 0$$

genügen muss. Diese Gleichung lässt sich bekanntlich auf mannigfache Art durch hypergeometrische Reihen integriren (vgl. Riemann's Mathematische Werke, herausgegeben von Weber p. 411—412). Hier wird die nach steigenden Potenzen von $\left(\varrho-\frac{1}{\varrho}\right)$ fortschreitende Entwickelung gewählt, und zwar diejenige particuläre Lösung, die im Unendlichen verschwindet. Das allgemeine Integral für φ ergiebt sich als unendliche Doppelsumme von particulären Integralen der obigen Form, jedes derselben mit einer willkürlichen Constanten multiplicirt. Durch die Grenzbedingungen an der Ringfläche reducirt sich die Doppelsumme auf eine einfache Summe, in der n nur die Werthe 0 und 1, m alle ganzzahligen Werthe annehmen kann. Zugleich ergeben die Grenzbedingungen durch die Gleichheit zweier nach Sinus und Cosinus der Vielfachen von ψ fortschreitenden Reihen die nöthigen Gleichungen zur Bestimmung der willkürlichen Constanten. Diese Bestimmung führt der Herausgeber durch und stellt zum Schluss die Reihen für die Geschwindigkeitscomponenten der Wassertheilchen auf. Wn.

Th. Craig. On the motion of a solid in a fluid. Am. J. II. 162-177.

Th. Craig. On the motion of an ellipsoid in a fluid. Am. J. II. 260-280.

Die Arbeit ist im Wesentlichen eine Reproduction von Bekanntem. Nachdem zuerst die allgemeinen Differentialgleichungen für die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit aufgestellt und einige specielle Fälle kurz erwähnt sind, wird untersucht, wann den Gleichungen genügt wird durch eine stationäre (von der Zeit unabhängige) Bewegung des festen Körpers. Die hier erlangten Resultate sind identisch mit den von Lamb gefundenen (cf. F. d. M. IX. 1877. 671), von dessen Arbeit der Verfasser keine Kenntnis zu haben scheint. Es folgt die Transformation der Gleichungen, von denen die Bewegung eines Flüssigkeitstheilchens abhängt, auf beliebige orthogonale, speciell elliptische Coordinaten. (Hierbei wird für den Zusammenhang zwischen den elliptischen und geradlinigen Coordinaten in dem Falle eines Raumes von n Dimensionen eine kurze Ableitung gegeben, die auf einfachen Determinantentransformationen beruht.) Mit Hülfe dieser Formeln wird dann die Bewegung eines Ellipsoides in einer Flüssigkeit behandelt, ohne dass sich auch hier irgendwie neue Resultate ergeben. Wn.

A. G. Greenhill. Fluid motion between confocal elliptic cylinders and confocal ellipsoids. Quart. J. XVI. 227-257.

Eine Flüssigkeit sei von zwei confocalen unendlichen elliptischen Cylindern begrenzt. Der eine der beiden Cylinder beginnt eben sich parallel einer Ellipsenaxe zu bewegen oder um die Cylinderaxe zu rotiren, während der andere fest bleibt. Für diesen Fall wird das Geschwindigkeitspotential der anfänglichen Bewegung der Flüssigkeit bestimmt. Die Lösung hat genau dieselbe Form, wie in dem bekannten Problem der Bewegung eines einzelnen Cylinders in einer unbegrenzten Flüssigkeit, nur dass die von der Länge der Ellipsenaxen abhängigen Constanten andere Werthe haben. Dasselbe Problem wird dann für die gleich-

zeitige Bewegung beider Cylinder behandelt und weiter auf den Fall ausgedehnt, dass an Stelle der elliptischen Cylinder dreiaxige Ellipsoide treten. Endlich wird im Anschluss an Kirchhoff's Mechanik das Problem der Bewegung eines verlängerten oder verkürzten Rotationsellipsoids in einer unbegrenzten Flüssigkeit mit Hülfe der elliptischen Functionen genauer discutirt.

Wn.

W. M. Hicks. On the motion of two cylinders in a fluid. Quart. J. XVI. 113-140, 193-219.

Ueber einige Resultate der vorliegenden Arbeit ist nach einem in den Rep. Brit. Ass. enthaltenen Auszuge schon im vorigen Jahre berichtet (cfr. F. d. M. X. 1878. 646). Was die Art der Behandlung betrifft, so wird vorausgesetzt, dass die Axen der beiden Cylinder unendlich lang sind und stets parallel bleiben, dass ferner die Bewegung in allen Ebenen senkrecht zu den Axen dieselbe ist, so dass das Problem nur von zwei Dimensionen abhängt und an Stelle der Cylinder Kreise treten. Es handelt sich dann um die Bestimmung des Geschwindigkeitspotentials der incompressiblen Flüssigkeit, in der sich die beiden Kreise befinden. Diese Bestimmung ergiebt sich aus der Bemerkung, dass die Differentialgleichung, der das Geschwindigkeitspotential genügen muss,

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$$

ungeändert bleibt, wenn man statt der geradlinigen Coordinaten x, y irgend welche andere isotherme orthogonale Coordinaten einführt. Es wird daher dieselbe Form von φ zu Grunde gelegt, wie bei geradliniger Begrenzung (der Verfasser verweist in dieser Beziehung auf eine frühere, F. d. M. X. 1878. p. 726 besprochene Arbeit), und es werden darin nur statt der geradlinigen Coordinaten die isothermen Parameter der bekannten orthogonalen Kreisschaaren eingeführt. Der einfachere Fall der sich berührenden Kreise wird zuerst für sich behandelt. Die ziemlich weitläufige Rechnung bietet keine besonders bemerkenswerthen Mo-

mente dar. In Bezug auf diese Rechnung, sowie auf die durch Discussion der Resultate sich ergebenden Folgerungen müssen wir auf die Arbeit selbst verweisen. Wn.

W. M. Hicks. The motion of two spheres in a fluid. (Abstract). Proc. of Lond. XXIX. 162-164, Proc. of Cambr. III. 227-228.

Die in der Arbeit benutzte Methode ist die der Spiegelung; sie beruht auf einem gewissen Hülfssatze, der abgeleitet wird, und aus dem sich der Begriff der Bilderpaare (images of „doublets") ergiebt. Es wird kein Versuch gemacht, das Geschwindigkeitspotential abzuleiten, sondern dasselbe wird als bekannt vorausgesetzt und daraus die kinetische Energie der beiden Kugeln ermittelt. Es wird dann die Bewegung der Kugeln längs ihrer Centrallinie betrachtet, wobei sich ergiebt, dass beide eine scheinbare Abstossung auf einander ausüben. Speciell wird dann der Fall der Bewegung einer einzelnen Kugel in einer unendlichen Flüssigkeit behandelt, die von einer Ebene begrenzt wird. Zum Schluss werden die bisherigen Resultate auf die Bewegung zweier Pendel angewandt, die längs ihrer Centrallinie oscilliren. Einige Angaben werden auch über den gegenseitigen Einfluss der beiden Pendel bei beliebiger Bewegung derselben mitgetheilt. Die Arbeit wird wahrscheinlich später in den Transactions in extenso veröffentlicht werden. Cly. (Wn.)

A. G. Greenhill. Notes on hydrodynamics. Messenger (2) IX. 113-120.

Die erste Note bezieht sich auf Lord Rayleigh's Arbeit über den unregelmässigen Flug eines Federballs (Mess. (2) VII. 14-16, cf. F. d. M. IX. 1877. p. 656), die zweite auf die Bewegung eines Cylinders in einer reibungslosen Flüssigkeit ohne Einwirkung einer äusseren beschleunigenden Kraft.

Glr. (Wn.)

A. G. Greenhill. On the rotation of a liquid ellipsoid about its mean axis. Proc. of Cambr. III. 233-276.

Discussion des im Titel genannten Gegenstandes, welche Beweise der Resultate enthält, die Jacobi, Ferrers, Kirchhoff, Lejeune-Dirichlet und Riemann erhielten. Glr. (O.)

J. J. Thomson. Vortex motion in a viscous incompressible fluid. Messenger (2) VIII. 174-181.

Die Gleichungen der Wirbelbewegung in einer zähen incompressiblen Flüssigkeit werden unter der üblichen Annahme abgeleitet, dass die durch die Viscosität hervorgerufenen tangentialen Kräfte der relativen Geschwindigkeit zweier benachbarten Flüssigkeitselemente proportional sind. Diese Gleichungen wendet der Verfasser auf zwei specielle Fälle von Bewegungen an, bei denen nur zwei Dimensionen in Betracht kommen. Im ersten Falle bewegt sich jedes Theilchen in einer Ebene parallel der Ebene x, y, während anfänglich ein einzelner unendlich langer Wirbelfaden vorhanden ist, dessen Axe mit der z-Axe zusammenfällt. Im zweiten Falle ist anfänglich ein einzelner kreisförmiger Wirbelfaden in einer unendlichen Flüssigkeitsmasse vorhanden; es soll die Vertheilung der Wirbelbewegung gefunden werden, falls die Bewegung so gering ist, dass man die Quadrate der Geschwindigkeit vernachlässigen kann. Glr. (Wn.)

L. Graetz. Einige Sätze über Wirbelbewegungen in reibenden Flüssigkeiten. Schlömilch Z. XXIV. 239-244.

Der Verfasser dehnt die Untersuchungen über Wirbelbewegung der Flüssigkeiten auf den Fall aus, dass die Reibung der Flüssigkeitstheilchen berücksichtigt wird. Von der Lagrange'schen Form der hydrodynamischen Gleichungen ausgehend, leitet er durch Einführung der Componenten der Drehungsgeschwindigkeit folgende Sätze ab:

Falls bei der Bewegung einer incompressiblen reibenden

Flüssigkeit $\Delta\pi = 0$, $\Delta\chi = 0$, $\Delta\varrho = 0$ ist (π, χ, ϱ sind die Componenten der Rotationsgeschwindigkeit, Δ das bekannte Symbol) so gelten für diese Flüssigkeit die Helmholtz'schen Gesetze der Wirbelbewegung.

Wenn bei einer Flüssigkeitsbewegung zwei Componenten der Drehungsgeschwindigkeit sich mit der Zeit nicht ändern, so bleibt auch die dritte mit der Zeit unverändert.

In einer incompressiblen Flüssigkeit ändert sich die Drehungsgeschwindigkeit an einem bestimmten Punkte mit der Zeit nach Grösse und Richtung so, dass ihre Projection auf die Normale einer gewissen Fläche (der Dilatationsfläche) in diesem Punkte constant bleibt. Wn.

C. V. Coates. On circular vortex rings. Quart. J. XVI. 170-178.

In Kirchhoff's Mechanik (Vorlesung 20, § 6) ist die Bewegung eines einzelnen kreisförmigen Wirbelfadens von unendlich kleinem Querschnitt behandelt. Zu den dort abgeleiteten Resultaten gelangt man durch Entwickelung der vollen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung, deren Modul nahe = 1 ist. Hier wird dieselbe Entwickelung für den Fall gegeben, dass der Querschnitt nicht mehr unendlich klein, aber noch klein ist. Zu dem Zwecke werden einfach in der genannten Entwickelung noch die Glieder, die dem Quadrate des complementären Moduls proportional sind, beibehalten. Die daraus sich ergebenden Resultate für die Bewegung des Wirbelringes werden mit bekannten Resultaten über die Bewegung geradliniger Wirbelfäden verglichen und der Grad der Näherung discutirt. Wn.

T. C. Lewis. On the images of vortices in a spherical vessel. Quart. J. XVI. 338-348.

Gegeben sei ein kreisförmiger Wirbelfaden und eine Kugel, deren Mittelpunkt auf der Axe des Wirbelfadens liegt. Es soll ein zweiter coaxialer Wirbelring derart bestimmt werden, dass

in Folge der Wirkung beider Ringe die Geschwindigkeit der Flüssigkeit an der Kugel zu dieser tangential ist. Dies ist der Fall, wenn beide Ringe demselben geraden Kegel angehören und das Product ihrer Entfernungen vom Scheitel gleich dem Quadrate des Radius ist. Dieselbe Frage wird untersucht, wenn statt eines einzelnen Wirbelringes ein System solcher gegeben ist, dann ist eine Lösung nur möglich, wenn alle Ringe auf einer der gegebenen concentrischen Kugel liegen. Daran schliesst sich die Discussion der Bewegung eines Wirbelringes innerhalb einer festen Kugel. In einem Anhange werden einige auf die Bewegung eines einzelnen Wirbelringes bezügliche Näherungsformeln mitgetheilt, die sich aus bekannten Formeln mittels Reihenentwickelungen ergeben (vgl. das vorige Referat). Wn.

H. T. Stearn. Vortex sheets. Quart. J. XVI. 271-278.

Eine Flüssigkeit rotire innerhalb eines unendlich langen Kreiscylinders vom Radius a derart, dass ein einziger gerader Wirbelfaden längs der Cylinderaxe vorhanden ist, während der Cylinder aussen von ruhender Flüssigkeit umgeben ist. Die ruhende und die bewegte Flüssigkeit sind anfänglich durch eine unendlich dünne feste Wand getrennt. Der Verfasser untersucht dann, welchen Effect die plötzliche Entfernung der Wand auf die ruhende Flüssigkeit hat. Damit die letztere auch jetzt noch in Ruhe bleibt, muss man die feste Wand durch eine unendlich dünne Schicht von Wirbelfäden ersetzen. Ist $2r$ die Dicke dieser Schicht, so muss sich die Cylinderfläche mit der Winkelgeschwindigkeit $\frac{K}{2a^2}$ um ihre Axe drehen, während die geraden Erzeugenden um sich selbst mit der Winkelgeschwindigkeit $\frac{-K}{2ar}$ rotiren. Eine solche Schicht von Wirbelfäden hat den Effect, dass sie jene feste Wand ersetzt, dass sie also für äussere Punkte die Wirkung des centralen Wirbelfadens aufhebt. Die Ausdehnung auf den Fall, dass der ursprüngliche Wirbelfaden nicht in der Cylinderaxe liegt, wird angedeutet. Wn.

A. G. Greenhill. Fluid motion in a rotating rectangle, formed by two concentric circular arcs and two radii. Messenger (2) IX. 35-39.

Untersuchung der Bewegung einer Flüssigkeit in dem rotirenden Ausschnitt eines Kreisringes, begrenzt von den beiden Bogen $r = a$ und $r = b$ und den beiden Radien $\theta = \alpha$ und $\theta = -\alpha$.

Glr. (O.)

T. C. Lewis. Some cases of vortex motion. Messenger (2) IX. 93-95.

Lösung folgender Aufgabe: In einem mit Flüssigkeit gefüllten Cylinder befinden sich $2n$ gerade Wirbelfäden mit abwechselnd positiver und negativer Rotation, und zwar seien dieselben längs der Erzeugenden eines coaxialen Cylinders regelmässig vertheilt. Es soll das Verhältnis der beiden Cylinderradien so bestimmt werden, dass die Wirbelfäden an ihren Stellen bleiben und dass die Flüssigkeitsbewegung rings um die Fäden eine stationäre ist.

Glr. (Wn.)

G. Kirchhoff. Ueber stehende Schwingungen einer schweren Flüssigkeit. Berl. Monatsber. 1879. 395-410.

Die unendlich kleinen Schwingungen einer schweren, nicht reibenden, incompressiblen Flüssigkeit hat man bisher nur in dem Falle theoretisch behandeln können, wo die Flüssigkeit in einem verticalen cylindrischen oder prismatischen Gefässe mit horizontalem Boden enthalten ist. Hier wird das Problem auch auf einige solche Fälle ausgedehnt, wo der Boden aus einer oder zwei schiefen Ebenen gebildet ist. Unter der Voraussetzung, dass die Bewegung nur von einer horizontalen Coordinate x abhängig ist, ergiebt sich (cf. des Verfassers Mechanik, Vorlesung 25, § 3) für das Geschwindigkeitspotential ein Ausdruck von der Form

$$\varphi = \{F(z+ix)+G(z-ix)\}\sin(n\pi t),$$

wobei die Functionen F und G wegen der Bedingung an der freien Oberfläche der Gleichung

$$(1.) \qquad \frac{d}{du}\{F(u)-G(-u)\} = -a\{F(u)+G(-u)\}, \quad a = \frac{n^2\pi^2}{g}$$

genügen müssen, während für die nicht freie Oberfläche

$$(2.) \qquad F(z+ix)-G(z-ix) = 0$$

ist. Ist nun die nicht freie Oberfläche die Ebene $z = x\operatorname{tg}\alpha$, und setzt man $e^{-2i\alpha} = \beta$, so geht nach Einführung von Polarcoordinaten die Gleichung (2.) über in

$$(2a.) \qquad G(u) = -F(-\beta u).$$

Für den Fall, dass $\alpha = \frac{m}{n}\pi$, wo m und n zwei ganze Zahlen sind, die keinen Factor gemein haben, und zwar n eine grade Zahl, werden die obigen Gleichungen erfüllt durch eine Reihe von der Form

$$(3.) \qquad F(u) = A_0 e^{\lambda a u}+A_1 e^{\beta\lambda a u}+A_2 e^{\beta^2\lambda a u}+\cdots+A_{n-1}e^{\beta^{n-1}\lambda a u},$$

wo λ und eine der Grössen A beliebig, die übrigen A durch diese bestimmt sind. Die Betrachtung des Falles $\lambda = -1$ ergiebt, dass φ innerhalb des von der Flüssigkeit erfüllten Raumes unendlich wird, ausser für $m = 1$. Für letzteren Fall allein ist also die obige Lösung zulässig.

Weiter bestimmt der Verfasser statt der Reihe (3.) eine ganze rationale Function $F(u)$, die den Bedingungen (1.) und (2a.) genügt, was ja möglich ist, da für λ auch unendlich kleine Werthe genommen werden können. Speciell wird hier der Fall untersucht, dass $F(u)$ vom zweiten Grade ist, was für $m = 1$, $n = 4$, also $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\beta = -i$ stattfindet. Dann wird

$$\varphi = \{1-a(z+x)+a^2zx\}\sin(n\pi t).$$

Aus φ ergeben sich sofort die Stromlinien, die gleichseitige Hyperbeln bilden mit Einschluss der beiden Geraden $z-x = 0$ und $z+x = \frac{2}{a}$. Die gedachte Bewegung kann daher auch bestehen, wenn die Flüssigkeit ausser durch die Wand $z = x$ noch durch die Wand $z+x = \frac{2}{a}$ begrenzt ist, wenn sie also in einem

prismatischen Gefäss sich befindet, dessen Kante nach unten gekehrt, dessen Winkel ein rechter ist, und dessen Seitenflächen gegen die Verticale gleich geneigt sind. $\frac{1}{a}$ ist die grösste Tiefe der Flüssigkeit. Die freie Oberfläche der Flüssigkeit bleibt bei der Bewegung stets eine Ebene, die Dauer einer einfachen Schwingung ist gleich der Schwingungsdauer eines einfachen Pendels, dessen Länge gleich der grössten Tiefe der Flüssigkeit ist.

Auf die andern (schnelleren) Schwingungen, deren die hier betrachtete Flüssigkeit ausserdem noch fähig ist, kommt man, wenn man in obiger Gleichung (3.) λ und a so zu bestimmen sucht, dass für $z+x=2c$ (c die grösste Tiefe) die obige Bedingung (2.) erfüllt wird. Die Reihe für F (Gl. 3.) besteht, da $\alpha=\frac{\pi}{4}$, aus vier Gliedern, und zwischen den sechs Constanten, nämlich λ, a und den vier Grössen A, bestehen jetzt fünf Gleichungen. Aus diesen folgt, dass, wenn $\lambda ac=p$ gesetzt wird, entweder

$$(4.)\qquad \lambda=\operatorname{tg}p,\quad e^{2p}=\operatorname{tg}\left(p+\frac{\pi}{4}\right)$$

oder

$$(4a.)\qquad \lambda=-\operatorname{cotg}p,\quad e^{2p}=\operatorname{cotg}\left(p+\frac{\pi}{4}\right)$$

sein muss. Die transcendente Gleichung (4.) giebt $ac=1$ für $p=0$, d. i. die obige Schwingung, bei der die Oberfläche eine Ebene bleibt. Die übrigen Wurzeln dieser Gleichung geben die Schwingungsarten ungrader Ordnungszahl, die Wurzeln der Gleichung (4a.) die Schwingungsarten grader Ordnungszahl, wenn man nach der Grösse der Schwingungszahlen ordnet. Für solche Schwingungen wird

$$(5.)\qquad \varphi=\left\{\sin(p\xi)+\sqrt{\cos(2p)}\,\frac{e^{p\xi}-e^{-p\xi}}{2}\right\}\sin(t\sqrt{ag}),$$

resp.

$$(5a.)\qquad \varphi=\left\{\cos(p\xi)+\sqrt{\cos(2p)}\,\frac{e^{p\xi}+e^{-p\xi}}{2}\right\}\sin(t\sqrt{ag}),$$

wo

$$\xi = 1 - \frac{x}{c}$$

ist. Und daraus ergeben sich sofort die zu jeder einzelnen Schwingungsart gehörigen Knoten und Bäuche. Wn.

F. Lechat. Des vibrations à la surface des liquides. C. R. LXXXIX. 299-301.

Der Verfasser hat die Schwingungen in einem mit Flüssigkeit gefüllten rechteckigen, resp. quadratischen Gefässe theoretisch und experimentell untersucht. Näheres über die der Theorie zu Grunde liegenden Voraussetzungen, sowie über die Ableitung und die Resultate ist aus dem vorliegenden kurzen Auszuge nicht zu ersehen. Wn.

A. Giesen. Oscillationen einer homogenen Flüssigkeitsmasse in Folge ihrer Oberflächenspannung. Schlömilch Z. XXIV. 230-238.

Eine Flüssigkeitsmasse, die der Wirkung der Schwere entzogen ist, steht nur unter dem Einfluss der Oberflächenspannung Q, deren bekannter Werth

$$Q = K + \alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

ist. Es habe ein Punkt, dessen ursprüngliche Coordinaten im Ruhezustande x_0, y_0, z_0 sind, zur Zeit t die Coordinaten

$$x = x_0 + \xi, \quad y = y_0 + \eta, \quad z = z_0 + \zeta.$$

Das Princip der virtuellen Arbeit giebt dann, wenn δx, δy, δz die virtuellen Verschiebungen eines Flüssigkeitstheilchens dk sind, während δn die normale Verschiebung des Oberflächenelements ds, ϱ die Dichtigkeit ist:

$$-\varrho \int \left\{ \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}\, \delta x + \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}\, \delta y + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}\, \delta z \right\} dk - \int Q\, \delta n\, ds = 0.$$

Zugleich erfordert die Bedingung der Incompressibilität, dass

$$\int \delta n\, ds = 0.$$

Der Verfasser nimmt nun an, dass

$$\xi = \mu_1 x_0 \sin\frac{2\pi t}{T}, \quad \eta = \mu_2 y_0 \sin\frac{2\pi t}{T}$$

$$\zeta = -(\mu_1+\mu_2) z_0 \sin\frac{2\pi t}{T}$$

und betrachtet μ_1 und μ_2 als kleine Grössen, deren Quadrate vernachlässigt werden, so dass bei dieser Näherung zugleich $x\delta x$ an Stelle von $x_0\delta x$ gesetzt werden kann etc. Dadurch und durch Reduction des Raumintegrals auf ein Flächenintegral folgt, dass in jedem Punkte der Oberfläche sein muss:

$$\text{(A.)} \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{2}\varrho\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \sin\frac{2\pi t}{T}\,[\mu_1 x^2+\mu_2 y^2-(\mu_1+\mu_2)z^2] \\ &\qquad -\alpha\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) = \text{Const.} \end{aligned} \right.$$

Weiter wird für das Ellipsoid, das bei der obigen Annahme über ξ, η, ζ zur Zeit t die Oberfläche der ursprünglich kugelförmigen Flüssigkeit bildet, $\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$ berechnet. Die Erfüllung der Bedingungsgleichung (A.) erfordert dann:

$$\text{(B.)} \qquad T = \pi R \sqrt{\frac{\varrho R}{2\alpha}},$$

wenn R der Radius der Kugel ist, welche die Flüssigkeit im Gleichgewicht bildet. Damit ist gezeigt, dass unter den möglichen kleinen Bewegungen, welche eine nur ihrer Oberflächenspannung unterworfene Flüssigkeitsmasse ausführen kann, sich auch regelmässige Oscillationen von der Schwingungsdauer T befinden, bei denen die Oberfläche der Flüssigkeit stets die Gestalt eines Ellipsoids behält.

Wn.

Lord Rayleigh. On the instability of jets. Proc. L. M. S. X. 4-13.

Der Verfasser untersucht, welche Abweichungen von der Gleichgewichtslage bei einem Flüssigkeitsstrahl durch eine gegebene Störung hervorgerufen werden. Im ersten Theile werden störende Kräfte von statischer Natur (wie die Capillarität) in's Auge gefasst, und dabei wird von der Translation der ganzen

Flüssigkeitsmasse abstrahirt. Der Gang der Untersuchung ist folgender: Durch die störenden Kräfte habe die Flüssigkeitsmasse, die ursprünglich einen Kreiscylinder bildete, eine andere Gestalt angenommen, so dass zur Zeit t ihre Gleichung

$$r = a + \alpha \cos(kz).$$

Hier ist $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, α eine kleine von der Zeit abhängige Grösse, z die Cylinderaxe, a der ursprüngliche Cylinderradius. Mit Vernachlässigung höherer Potenzen von α ergiebt sich daraus die Vergrösserung der Oberfläche und weiter die durch die Formänderung entstehende Vermehrung der Oberflächenspannung (die potentielle Energie der störenden Kräfte). Andrerseits wird für das Geschwindigkeitspotential gesetzt

$$\varphi = A . J_0(ikr)\cos(kz),$$

wo J_0 die Bessel'sche Function, $i = \sqrt{-1}$ ist. Damit dies Geschwindigkeitspotential die obige Bewegung der Flüssigkeitsoberfläche darstellt, muss

$$ikAJ'_0(ika) = \frac{d\alpha}{dt}$$

sein. Aus φ folgt nun die kinetische Energie der Bewegung, und da die Summe beider Energien verschwinden muss, ergiebt sich:

$$\left(\frac{1}{\alpha}\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = C\frac{(1-k^2a^2)ikaJ'_0(ika)}{J_0(ika)}.$$

Diese Grösse ist das Mass für die Abweichung vom Gleichgewicht. Sie ist ein Maximum für $k^2a^2 = 0{,}4858$.

Im zweiten Theile werden Störungen betrachtet, die bei discontinuirlichen Flüssigkeitsbewegungen eintreten. Es sei innerhalb der Flüssigkeit die Ebene $z = 0$ eine Trennungsfläche derart, dass zu beiden Seiten dieser Ebene verschiedene Geschwindigkeiten stattfinden, während der Druck derselbe ist. Durch störende Kräfte ändert sich die Form der Trennungsfläche derart, dass jeder Punkt derselben eine Verrückung h erfährt:

$$h = He^{int}e^{ikx}.$$

Es wird das dieser Bewegung entsprechende Geschwindigkeitspotential (das natürlich ebenfalls discontinuirlich ist) aufgestellt.

Die Bedingung, dass der hydrodynamische Druck noch zu beiden Seiten der neuen Trennungsfläche derselbe sein soll, ergiebt für n die Gleichung

$$\sigma(n+kv)^2+\sigma'(n+kv')^2 = 0,$$

wenn σ und σ' die Dichtigkeiten, v und v' die Geschwindigkeiten zu beiden Seiten der ursprünglichen Trennungsfläche bedeuten. Mit n hat man ein Mass für die Abweichung von der Gleichgewichtslage. Das Problem wird durch besondere Annahmen über σ, σ', v, v', resp. durch Annahmen über die äussere Begrenzung specialisirt. Endlich wird die analoge Bedingung für den Fall entwickelt, dass die ursprüngliche Trennungsfläche ein Kreiscylinder statt einer Ebene ist. Wn.

Guyou. Cinématique et dynamique des ondes courantes sur un sphéroïde liquide. Application à l'évolution de la protubérance autour d'un sphéroide liquide déformé par l'attraction d'un astre éloigné. Liouville J. (3) V. 69-106.

Es wird eine Bewegung in einer Ebene betrachtet, bei der die Coordinaten eines Punktes durch folgende Gleichungen von der Zeit abhängen:

$$x = R\sin\vartheta - H\left(\frac{R}{A}\right)^n \sin(n\vartheta-\varepsilon t),$$

$$y = R\cos\vartheta + H\left(\frac{R}{A}\right)^n \cos(n\vartheta-\varepsilon t).$$

Ist R constant, ϑ allein variabel, so befinden sich die betrachteten Punkte zur Zeit $t = 0$ auf einer verkürzten Hypocycloide, und jeder Punkt rotirt mit der Winkelgeschwindigkeit ε um den zugehörigen Punkt des Mittelpunktkreises der Hypocycloide. Zu einer beliebigen Zeit t befinden sich die betrachteten Punkte auf einer andern Hypocycloide, die der ursprünglichen congruent ist und aus Drehung derselben um den Mittelpunkt entsteht. Variirt auch R von 0 bis A, während H und n constant bleiben $\left[H < \frac{A}{n}\right]$, so wird durch die obigen Gleichungen auch die Be-

wegung aller Punkte innerhalb der ursprünglichen Hypocycloide dargestellt. Alle Punkte, die zur Zeit $t = 0$ dasselbe R hatten, bleiben auf einer Hypocycloide, die zu der begrenzenden Hypocycloide in jedem Moment ähnlich und ähnlich liegend ist. Dass diese Bewegung, auf die der Verfasser von der geometrischen Betrachtung der Hypocycloide aus gelangt, eine mögliche Bewegung einer Flüssigkeit ist, wird daraus gefolgert, dass die Bahnen zweier ursprünglich benachbarten Punkte sich nie schneiden, dass ferner der Inhalt eines Flächenelements von der Zeit unabhängig, also die Continuitätsgleichung erfüllt ist.

Aus der ebenen Bewegung wird für einen Raum von drei Dimensionen das folgende Resultat abgeleitet. Man denke sich in einem dreiaxigen Ellipsoid Parallelschnitte senkrecht zu einer Hauptaxe gelegt, betrachte jede der Schnittellipsen als eine verkürzte Hypocycloide ($n = 1$) und wende auf dieselbe die obigen Formeln an, wobei ε für alle Schnitte constant ist. Dann rotirt jeder Punkt der Oberfläche mit der Winkelgeschwindigkeit ε um einen Punkt eines gewissen Rotationsellipsoids, jeder Punkt im Innern rotirt um einen Punkt eines andern Rotationsellipsoids, und der Effect der Rotationen ist derselbe, als rotire das dreiaxige Ellipsoid ohne Formänderung um die oben genannte Hauptaxe mit der Winkelgeschwindigkeit $\frac{\varepsilon}{2}$.

Weiter betrachtet der Verfasser in einer flüssigen Kugel, deren Theilchen sich nach dem Newton'schen Gesetze anziehen, eine dünne Scheibe, begrenzt durch zwei Ebenen, die einem grössten Kugelkreise parallel sind und demselben sehr nahe liegen. Die in der Scheibe enthaltene Flüssigkeitsmasse denkt er sich so bewegt, dass jeder Schnitt parallel den Grenzebenen eine hypocycloidische Bewegung der oben beschriebenen Art vollführt. Ist die Grösse H der vorstehenden Formeln sehr klein und die Dicke der Scheibe sehr gering, so kann man an der Oberfläche die Schwere als constant und in jedem Schnitte nach dem Mittelpunkte des Schnitts gerichtet ansehen. Damit nun die freie Oberfläche unter Einwirkung der Schwere eine Niveaufläche ist, muss

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{G.n}{A}}, \text{ resp. } \varepsilon = -\omega + \sqrt{\frac{(G-\omega^2 A)n}{A}}$$

sein, je nachdem die Flüssigkeitsmasse ruhend ist oder mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotirt. G ist dabei die Intensität der Schwere an der Oberfläche. Ist die freie Oberfläche eine Niveaufläche, so bleibt auch jeder andere Punkt stets auf einer Niveaufläche, wie aus dem Gesetz der Abnahme der Schwere innerhalb der flüssigen Masse folgt. Endlich werden die letzten Formeln noch angewandt, um aus s die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Wasserwellen auf der Erdoberfläche zu bestimmen. Die hier gefundenen Formeln übergehen wir, da die zu Grunde liegenden Voraussetzungen uns zu wenig zutreffend erscheinen.

Wn.

W. Thomson. On gravitational oscillations of rotating water. Proc. of Edinb. 1879. 92-100.

Die hier betrachtete Frage entspricht der, die Laplace in seiner dynamischen Fluththeorie gelöst hat. Mit Laplace wird die Tiefe als klein angenommen. Aber statt anzunehmen, dass das Wasser die ganze Oberfläche oder doch wenigstens einen grossen Theil der Oberfläche eines festen Körpers bedecke, betrachtet der Verfasser in der vorliegenden Arbeit den Fall einer so kleinen Wasserfläche, dass die Gleichgewichtsfigur ihrer Oberfläche nicht merklich gekrümmt ist. Cly. (O.)

Haughton. On tides and currents. Herm. VI.

Eine Arbeit über die mathematischen Principien der Fluththeorie nebst Beobachtungen ist neuerdings von Herrn Haughton veröffentlicht worden in Herm. VI. 542, welche der erste Theil einer grösseren Arbeit: „Treatise on the theory and observation of tides and oceanic and atmospheric currents“ sein soll. Einen grossen Theil dieser Arbeit nimmt die Entwickelung des Inhalts einer geometrischen Arbeit aus dem Jahre 1872 von J. K. Abbot im Quart. J. XII. 7-16 in Anspruch (F. d. M. IV. 496). Der weitere Inhalt derselben ist dann folgender: In No. 1) werden Constructionen für die störenden Kräfte gegeben; in No. 2) wird die gewöhnliche (und ungenügende)

Gleichgewichtstheorie besprochen. No. 3) und 4) besprechen die dynamische Theorie der Erscheinungen in Canälen längs der Meridian- und Aequatorialrichtungen, wenn der Mond im Aequator steht; für diesen Fall wird die Gleichung der Wasserfläche gegeben und discutirt. Sie heisst $\varrho = \alpha - \beta\cos 2\varphi$. No. 5) behandelt den Fall eines circumpolaren Canals mit dem Mond im Aequator. No. 6) Canal in Meridianrichtung, wenn der Mond eine Declination hat. Dann treten die täglichen Fluthen auf. No. 7) Dasselbe für einen äquatorialen Canal. No. 8) giebt die Gesetze der Fluthbewegung in einem circumpolaren Canal, wenn der Mond eine Declination hat. No. 9—12) behandeln alle die vorhergehenden Fälle, wenn die Reibung in Rechnung gezogen wird. No. 13): „Man soll die vollständigen Differentialgleichungen der Bewegung eines Oceans, der einen festen Kern umfliesst und irgend welchen störenden Kräften unterworfen ist, (der Kern selbst soll um eine feste Axe rotiren) aus einfachen geometrischen und mechanischen Principien finden." Die Discussion dieses Problems ist äusserst elegant. No. 14) untersucht in neuer Weise für dieselben Fälle die sogenannte Continuitätsgleichung im Allgemeinen.

Csy. (O.)

Haughton, Townsend, Walker. Solutions of questions (5792, 5875). Educ. Times XXXI. 31-34, 52.

Die Fragen beziehen sich auf die angenäherte statische Theorie der Ebbe und Fluth. Die Oberfläche eines Aequatorialcanals von constanter Tiefe wird unter der Voraussetzung, dass der Mond in der Ebene des Aequators bleibt, und dass man in der Entwickelung nach Potenzen von $\frac{a}{R}$ (a Erdradius, R Monddistanz) nur die erste beibehält, durch eine Gleichung der Form

$$\varrho = a + b\cos 2\varphi$$

dargestellt, wo ϱ und φ Polarcoordinaten sind. An Stelle dieser Gleichung kann man auch folgende nehmen

$$\log\varrho = a_1 + b_1\cos 2\varphi.$$

Wn.

K. Zöppritz. Hydrodynamische Probleme in Beziehung zur Theorie der Meeresströmungen. Pogg. Ann. (2) VI. 599-611.

Im ersten Theile des Aufsatzes, der über Stromtheilung und und Zusammensetzung handelt, wird die von Helmholtz begründete, von Kirchhoff weiter entwickelte Theorie der freien Flüssigkeitsstrahlen (cf. F. d. M. I. 1868. p. 341, II. 1869, 1870. p. 730) angewandt, um über den Anprall der Aequatorialströme an Continente Aufschluss zu erhalten. Der Verfasser denkt sich durch horizontale Ebenen den Strom in dünne Schichten zerlegt; dann bildet jede solche Schicht einen Strahl, der aus der Unendlichkeit mit constanter Geschwindigkeit und gegebener Breite kommt, und in welchem, wenn er auf feste Wände stösst, die neuen Bewegungscurven und die Geschwindigkeitsvertheilung nur von zwei Coordinaten abhängen. Herr Kirchhoff hat den Fall behandelt, wo ein solcher Strom auf eine ebene Wand von endlicher Länge senkrecht trifft. Daraus ergiebt sich leicht der Fall, wenn die zum Strome senkrecht stehende Wand unbegrenzt ist. Die hierfür geltenden Formeln werden vom Verfasser aufgestellt und die Gestalt der Grenzcurve bestimmt. Durch Zusammenwirken zweier an derselben Wand nach entgegengesetzter Richtung abgelenkter Ströme folgt aus der Theorie ein rückläufiger Strom, so dass die äquatorialen Gegenströmungen ihre Erklärung finden. Was das Verhältnis der verschiedenen über einander lagernden horizontalen Schichten betrifft, so nimmt zwar deren Geschwindigkeit mit der Tiefe ab, aber jede Schicht hat dieselben Stromlinien, da deren Gestalt unabhängig von der ursprünglichen constanten Geschwindigkeit ist und nur durch die Strombreite bestimmt wird, die bei allen Schichten dieselbe ist. Durch die Reibung der Schichten an einander erfolgt daher keine Aenderung in der Gestalt und Geschwindigkeit des Stromes.

Der zweite Theil der Arbeit, über Windstrom, führt nur zu negativen Resultaten. Es wird erörtert, dass keine stetige Flüssigkeitsbewegung von der Art stattfinden kann, wie sie manche Autoren, namentlich Carpenter, als wahrscheinlich hingestellt haben. Denn dann müssten Punkte, die einmal an der Oberfläche sind,

später in das Innere dringen, und das ist bei stetiger Bewegung unmöglich. Wn.

G. Blažek. Entwurf einer Theorie der Meeresströmungen. Arch. math. a phys. II. 1-26.

Soweit die Arbeit mathematischen Inhalts ist, ist dieselbe identisch mit einer früheren Arbeit des Verfassers, über die F. d. M. VII. 1875. p. 597-598 referirt ist. Die zu Grunde liegende Idee ist, dass, wenn A und B zwei Punkte der rotirenden Erde sind, die durch die Rotation hervorgerufene relative Bewegung von B gegen A als eine Rotation um die Normale von A angesehen werden kann, mit der Winkelgeschwindigkeit $a.\cos\psi$, wo ψ die Poldistanz von A, a die Winkelgeschwindigkeit der Erde. Dies ist (abgesehen davon, dass der Verfasser die noch hinzukommende Bewegung parallel der Normalen von A nicht berücksichtigt) nur für nahe Punkte A, B in erster Annäherung richtig. Der Verfasser wendet es dagegen ohne Weiteres auf beliebig entfernte Punkte B, A an. Referent kann Entwickelungen, die auf solcher Grundlage aufgebaut sind, nur für völlig verfehlt ansehen. Wn.

Ch. Macquary. Études de quelques questions relatives aux eaux courantes. Ann. d. P. et d. Ch. XVIII. 219-249.

Im Anschluss an die im oberen Saonebecken gemachten Beobachtungen ermittelt der Verfasser mehrere bemerkenswerthe Gesetze über die fliessenden Gewässer. Im ersten Theil wird die Abflussmenge als Function der Höhe festgestellt. Es findet sich

$$Q = \alpha^2 H + \alpha H^2 \text{ (eine Parabel).}$$

Eine Abweichung der Beobachtungen von diesem Gesetze erfolgt, sobald durch Steigen des Spiegels eine Ueberschwemmung eintritt. Sodann werden die gleichzeitigen Höhen an verschiedenen Pegeln verglichen und ergeben sich proportional, so dass also auch das Gefälle proportional der Höhe ist.

Eine Vergleichung der Abflussmenge mit der Regenmenge

zeigt, dass der Fluss durchschnittlich nur 39 Procent der letzteren abführt, in nassen Jahren mehr, in trockenen weniger je nach der Intensität der Verdunstung.

Schliesslich sucht der Verfasser die Beobachtungen noch nutzbar zu machen, um wenigstens die unvorbereitete Ueberraschung durch Ueberschwemmungen zu verhüten. Er ermittelt das Höhenverhältnis der Maximalanschwellungen an fünf aufeinanderfolgenden Stationen, und dasselbe zeigt sich wieder als eine Parabelfunction der Höhe, wobei das veränderliche Glied abwechselnd positiv und negativ ist. Hieraus ergiebt sich eine wellenartige Fortpflanzung der Anschwellungen. Bn.

H. Haedicke. Grundzüge zu einer Theorie des Fluges. Civiling. (2) XXV. 561-586.

Durch periodisch auf einander folgende Flügelschläge wird eine periodisch vertical auf- und niedersteigende Bewegung hervorgebracht. Jede einzelne Periode zerfällt nach dem Verfasser in vier Abschnitte. Im ersten ist der fliegende Körper nur der Schwere unterworfen; der zweite Abschnitt beginnt in dem Augenblick, wo durch das Niedergehen der Flügel eine verticale Componente des Luftwiderstandes (der Flügeldruck) dazukommt. Dieser Abschnitt dauert so lange, bis die vertical nach unten gerichtete Geschwindigkeit gleich Null geworden ist. Im dritten Abschnitt erfolgt eine aufsteigende Bewegung unter fortgesetzter Wirkung des Flügeldrucks und der Schwere. Im vierten Abschnitt hat der Flügeldruck aufgehört, die Schwere allein wirkt. Das Ende der Periode ist erreicht, wenn die vertical nach oben gerichtete Geschwindigkeit gleich Null ist. Auf die einzelnen Abschnitte werden die einfachen Fallgesetze angewandt, daraus Beziehungen zwischen der Dauer der einzelnen Theile der Periode und dem Verhältnis des Flügeldrucks zum Gewicht abgeleitet, die Flügelarbeit berechnet etc. Daran schliessen sich Speculationen über Flugmaschinen. Wn.

Capitel 5.

Potentialtheorie.

K. H. Schellbach. Verallgemeinerung eines Attractionstheorems. Pogg. Ann. (2) VII. 674-679.

Der hier mitgetheilte Satz besteht darin, dass sich die Anziehung einer homogenen körperlichen Kugelzone auf einen Punkt ausserhalb der Kugel auf die Anziehung einer von dieser abhängigen körperlichen Zone zurückführen lässt, deren Atome sämmtlich im Mittelpunkte der Kugel vereinigt wirken.

Zum Beweise nehme man auf einer horizontalen Geraden fünf Punkte O, F, E, B, A an und construire mit $OB = r$ um O einen Kreis und in F und E Lothe, welche die Sehnen GFH und CED bilden. Es werde OA mit a, AE mit h und AC mit s bezeichnet, und die Strecke AF ebenfalls gleich $s = AC$ angenommen. Sind nun noch die Radien OC und OG gezogen, so ergiebt sich aus dem Dreiecke OFG

$$FG^2 = r^2-a^2+2as-s^2$$

und aus dem Dreiecke OAC

$$s^2+a^2-r^2 = 2ah, \text{ also } FG^2 = 2a(s-h).$$

Der Kreis vom Durchmesser GH hat also den Inhalt $2\pi a(s-h)$; Die Dicke einer sehr dünnen Scheibe $GHG'H'$ sei $FF' = s'-s$; wenn also in der Volumeneinheit der homogenen Kugel m Atome liegen, so enthält diese Scheibe eine Anzahl Atome

$$R = 2\pi ma(s-h)(s'-s).$$

Es war aber $s^2+a^2-r^2 = 2ah$, und daher $s'^2+a^2-r^2 = 2ah'$, also ist

$$s'^2-s^2 = 2a(h'-h), \text{ oder } s'-s = \frac{2a(h'-h)}{s'+s}.$$

Daher ist sehr nahe

$$R = 2\pi ma^2(h'-h)\left(1-\frac{h}{s}\right),$$

folglich ist die Anzahl Atome, welche in einer körperlichen Kugel-

zone liegen, die sich von einer bestimmten Ebene GH bis zu einer mit ihr parallelen G_1H_1 erstreckt, gleich

$$\Sigma R = 2\pi m a^2 \Sigma(h'-h)\left(1-\frac{h}{s}\right).$$

Durch ganz einfache mechanische Betrachtungen, wie sie in den neuen Elementen der Mechanik von Schellbach angestellt werden, ergiebt sich aber die Kraft, mit welcher die Atome, die in der unendlich dünnen Schicht $CDC'D'$ liegen, den Punkt A nach dem Newton'schen Gesetze anziehen, gleich

$$K = 2\pi m k(h'-h)\left(1-\frac{h}{s}\right),$$

wenn k die Kraft ist, mit welcher ein Atom ein anderes in der Einheit der Entfernung anzieht. Daher ist die Anziehung aller der Atome, welche in der körperlichen Zone liegen, die sich von der Ebene CD bis zu einer parallelen C_1D_1 erstreckt,

$$\Sigma K = 2\pi m k \Sigma(h'-h)\left(1-\frac{h}{s}\right),$$

also ist

$$\Sigma K = \frac{k}{a^2}\Sigma R,$$

womit der Satz bewiesen ist. Offenbar hängt die Zone GHG_1H_1 von der Zone CDC_1D_1 so ab, dass aus dem angezogenen Punkte A mit den Radien AC und AC_1 Kreise geschlagen sind, welche den Radius OR in den Punkten F und F_1 schneiden. Der angezogene Punkt A kann auch innerhalb der Kugel auf einem Punkte des Radius OR liegen, und der Satz behält noch immer seine Gültigkeit.

Dieser Beweis kann mit Leichtigkeit in den oberen Classen höherer Lehranstalten durchgeführt werden und verdient daher schon deswegen einige Beachtung.

In der Abhandlung selbst ist ein etwas anderer Weg zum Beweise eingeschlagen worden, und dort finden sich auch einige weitere Bemerkungen, die hier übergangen werden müssen.

O.

G. J. Legebeke. De functie van Green. Diss. Utrecht.

Nur theilweise werden gegenwärtig die Erörterungen Green's bei der Lehre des Potentials benützt. Der Verfasser hat sich darum zur Aufgabe gestellt, die Function von Green einer speciellen Untersuchung zu unterziehen. Er beginnt mit der bekannten Ableitung des Potentials und erhält dabei die Green'sche Function, welche er auf bekannte Weise für die inneren und äusseren Punkte definirt. Gleich darauf wird gezeigt, wie diese Definition mit der physikalischen Bezeichnung von Green übereinstimmt. Ein zweites Capitel handelt davon, auf welche Weise die Function bestimmt wird; darin werden ihre wichtigsten Eigenschaften abgeleitet. Im dritten Capitel wird sie bestimmt für die Fläche einer Kugel und eines Parallelepipedons, und die erste Berechnung angewendet, um über eine Kugel eine Masse so zu vertheilen, dass das Potential dieser Masse in jedem Punkte der Kugel einen gegebenen Werth bekommt. Im letzten Capitel wird ein Problem als besonderer Fall des folgenden allgemeineren untersucht: Für eine Fläche S entweder eine V_i-Function oder eine V_u-Function zu bestimmen, welche in den Punkten dieser Fläche einen gegebenen Werth V_δ annimmt. Dieses allgemeinere Problem wird für die Kugel und das Rotations-Ellipsoid behandelt und hieraus wieder die zugehörigen Functionen von Green abgeleitet.

G.

Hoppe. Ueber die Bedeutung der Potentialfunction. Hamb. math. Ges. 1879. 206-213.

Bericht über einen Vortrag, der nur Bekanntes enthält.

B.

W. Preobragensky. Ueber das logarithmische Potential. Nachr. v. Odessa XXVIII. (Russisch).

In dieser Abhandlung wird die Theorie des logarithmischen Potentials aus den allgemeinen Principien der Integration der partiellen Differentialgleichungen entwickelt. Im ersten Capitel wird das allgemeine Integral der Gleichung

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0$$

in der bekannten Form

$$U=\tfrac{1}{2}f(x+iy)+\tfrac{1}{2}\varphi(x-iy)$$

geschrieben und dessen geometrische Bedeutung auseinandergesetzt; es folgt die Lamé'sche Transformation der Gleichung durch Einführung neuer Variabeln, die ein neues orthogonales Coordinatensystem bestimmen, und die Anwendung der von Herrn Korkine herrührenden Methode (s. F. d. M. X. 1878. p. 261) für die Bestimmung der willkürlichen Functionen unter Grenzbedingungen; alsdann werden die Bedingungen, die das logarithmische Potential in einem abgeschlossenen Theil der Ebene bestimmen, aufgestellt und die Korkine'sche Methode auf die Bestimmung des auf eine gegebene Begrenzung sich beziehenden Coordinatensystems angewandt. Die folgenden drei Capitel sind der Entwickelung specieller Fälle gewidmet. P.

J. Boussinesq. Sur une manière simple de présenter la théorie du potentiel, et sur la différentiation des intégrales dans le cas où la fonction sous le signe $\int$ devient infinie. C. R. LXXXVIII. 277-280.

Zum Beweise der bekannten Potentialgleichung $\Delta V=-4\pi k$ stellt der Verfasser ein Raisonnement an, welches in der Hauptsache auf den bekannten Gauss'schen Beweis für den genannten Satz hinausläuft, aber durchaus nicht als streng angesehen werden kann. B.

H. von Hoepflingen-Bergendorf. Zur Theorie der Attraction einiger Rotationskörper, deren Gestalt sich nur wenig von der einer Kugel oder einer Kugelschale unterscheidet. Grunert Arch. LXIII. 310-326.

Untersucht wird die Attraction von Körpern und Körperschalen, welche durch Rotation entstanden sind, und als deren Begrenzungsflächen Kugel, verlängertes, resp. abgeplattetes Ro-

tationsellipsoid auftreten. Die Entwicklungen beschränken sich auf die Mitnahme der niedrigsten Potenzen der Excentricität.

B.

R. Townsend. On Jellet's equation in the theory of potentials, and its application to the attraction, in two dimensions, of thin circular laminae, for the several inverse odd powers of the distance. Quart. J. XVI. 140-152.

Es sei für k Variable $xyz\ldots$

$$\varDelta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \cdots,$$

ferner sei

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 + \cdots,$$

so ist

$$V_n = \Sigma m \frac{r^{n+1}}{n+1}$$

anzusehen als das Potential der Massenpunkte $m(abc\ldots)$ in einem Raume von k Dimensionen, wenn die Anziehung der n^{ten} Potenz der Distanz proportional ist. Die Jellet'sche Gleichung

$$\varDelta V_n = (n-1)(n+k-1) V_{n-2}$$

wird nun benutzt, um das Potential eines gleichförmig belegten Kreises oder Kreisringes in einem Punkte der Kreisebene für $n = -5, -7, -9, \ldots$ aus dem direct für $n = -3$ berechneten Potentiale herzuleiten. Zu bemerken ist jedoch, dass das Verfahren des Verfassers in dem Falle, wo der angezogene Punkt der Belegung angehört, durchaus unzulässig ist. B.

Abria. Sur les surfaces équipotentielles. Mém. de Bord. (2) III. 257-285.

Der Aufsatz erläutert an einer Reihe von elementaren Beispielen, welche den verschiedensten Capiteln der Physik entnommen sind, den Vortheil, welchen man zur besseren Veranschaulichung der betreffenden Probleme aus der Betrachtung der Niveauflächen und der Kraftlinien allemal dann ziehen kann,

wenn es sich um ein Agens handelt, welches umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung wirkt. B.

Luigi dall' Oppio. Fisica tecnologica di R. Ferrini. Boncompagni Bull. XII. 318-333.

Der Aufsatz enthält im Wesentlichen eine sehr eingehende und ungünstig ausfallende Kritik über das erste, die Principien der Potentialtheorie behandelnde Capitel aus dem in der Ueberschrift genannten Werke des Herrn Ferrini. B.

M. C. Paraira. Over de methoden ter bepaling van de aantrekking eener ellipsoïde op een hillekeurig punt. Diss. Leiden.

Das wichtige Problem der Anziehung eines Ellipsoids auf einen Punkt ist Gegenstand dieser Dissertation. Es wird jedoch die Theorie nicht weitergeführt, sondern nur ausführlich die geschichtliche Entwickelung dargestellt. Von den ersten Untersuchungen Newton's ab werden alle Methoden analysirt, erst diejenige von Maclaurin, welche noch lückenhaft war; sodann die analytischen Methoden d'Alembert's, Lagrange's, Laplace's, Legendre's, Ivory's und Poisson's. Die synthetische Methode, welche seit Maclaurin vernachlässigt war, wurde von Chasles wieder aufgenommen und mit glänzendem Erfolge zur völligen Lösung des Problems angewendet. Schliesslich wird die directe Integrationsmethode von Lejeune-Dirichlet auseinandergesetzt, welche auf dem kürzesten Wege zu elliptischen Endintegralen führt. G.

Townsend, W. J. C. Sharp. Solutions of a question (5928). Educ. Times XXXII. 46.

Ein festes Ellipsoid von gleichförmiger Dichtigkeit, welches nach dem Newton'schen Attractionsgesetz anzieht, wirkt auf einen Punkt seiner Masse. Der Ort der Punkte in seinem Innern, für welche die Anziehungscomponente nach dem Mittelpunkt dieselbe

ist, wie für eine concentrische Kugel von derselben Dichtigkeit, ist ein Kegel zweiten Grades, coaxial mit der Oberfläche des Ellipsoids. Die Gleichung desselben bezogen auf die Hauptebenen des Ellipsoids ist

$$(B+C-2A)x^2+(C+A-2B)y^2+(A+B-2C)z^2 = 0,$$

wo A, B, C die Coefficienten der Anziehungscomponenten parallel den Axen sind. O.

A. Quidde. Zwei mathemathische Abhandlungen. Pr. Stargard.

In der ersten dieser beiden Abhandlungen behandelt der Verfasser die Attraction zweier gerader Linien im Raume in der Richtung ihrer kürzesten Entfernung unter Annahme der Gesetze

$$f(\varrho) = \frac{k}{\varrho^2} \quad \text{und} \quad f(\varrho) = k\varrho.$$

Sodann werden Drehungsmomente einer Geraden bestimmt.

O.

Townsend. Solution of a question (5956). Educ. Times XXXI. 81-82.

Ueber die Resultante der Anziehung, welche ein unendlich dünner Kreisring auf einen äusseren Punkt ausübt, falls die Anziehung umgekehrt proportional der dritten Potenz der Entfernung erfolgt, werden einige einfache geometrische Sätze bewiesen.

Wn.

Weitere Lehrsätze und Lösungen von Aufgaben über Anziehung und Potential von W. J. C. Sharp, Townsend, Minchin, Matz, T. R. Terry, B. Easton, H. Stabenow, Wolstenholme finden sich Educ. Times XXXII. 42-43, 43-44, 63-64, 64-65, 82, 94-99.

O.

Elfter Abschnitt.

Mathematische Physik.

Capitel 1.

Molecularphysik, Elasticität und Capillarität.

W. GOSIEWSKI. Das Mariotte'sche Gesetz. Par. Denkschr. XI. (Polnisch).

Fortsetzung der Arbeit aus dem Jahre 1877 (s. F. d. M. IX. p. 692). Das Ergebnis der Untersuchung in diesem Theil ist der Satz: „Das dem Mariotte'schen Gesetze folgende Gas kann man als ein in allen seinen Theilen continuirliches System auffassen, dessen Atome sich gegenseitig mit der Intensität:

$$\frac{mm'}{\Sigma m}\frac{k}{r}$$

abstossen, und dessen Theilchen der Bedingung

$$r^{mm'}r^{mm''}r^{mm'''}\ldots = \left(\frac{\Sigma m}{\varrho}\right)^{\frac{\Sigma mm'}{3}}$$

Genüge leisten.“ Hier bedeuten m, m', m'' u. s. w. die Massen einzelner Punkte oder Atome, ϱ die Dichte, r die Entfernung zweier Atome und k eine Constante. Dn.

H. F. WEBER. Untersuchungen über das Elementargesetz der Hydrodiffusion. Pogg. Ann. (2) VII. 469-487, 536-553.

Abdruck einer Arbeit aus Wolf Z., über die schon im vorigen Jahre berichtet ist (cf. F. d. M. X. 1878. p. 668). Wn.

A. DE LAPPARENT. Note sur les théories relatives à la structure cristalline. Ann. Soc. scient. Brux. III. B. 73-80.

Die krystallographische Theorie von Bravais enthält, entgegengesetzt den Ansichten Sohncke's kein Postulat, und erklärt alle krystallographischen Erscheinungen.

Mn. (O.)

L. SOHNCKE. Réponse à la note de M. de Lapparent: „Sur les théories relatives à la structure cristalline.“ Ann. Soc. scient. Brux. III. B. 247-254, nebst Réplique de M. de Lapparent. Ann. Soc. scient. Brux. III. B. 255-258.

Mn.

L. SOHNCKE. Zurückweisung eines Einwurfs gegen die neue Theorie der Krystallstructur. Pogg. Ann. (2) VI. 545-552.

Herr A. de Lapparent wollte in den Ann. de la Soc. scient. de Bruxelles 1878 zeigen, dass eine Theorie, welche nicht die Parallelität sämmtlicher Krystallmoleküle für nothwendig erklärt, im Widerspruch mit der Erfahrung und folglich zu verwerfen ist. Hierzu gelangte er folgendermassen:

1) Es wird von dem Erfahrungssatz ausgegangen, dass die verschiedenen physikalischen Eigenschaften eines krystallisirten homogenen Körpers in allen von einem bestimmten Punkte ausgehenden Richtungen nur von diesen Richtungen abhängen und unabhängig von der Lage des Ausgangspunktes sind. 2) Daher giebt es im Krystall unendlich viele Punkte, um deren jeden die physikalischen Eigenschaften gleich vertheilt sind, woraus man schliesst, dass um jeden von ihnen auch die Materie gleich vertheilt ist. 3) Hieraus folgt (wie Delafosse und Bravais gezeigt haben), dass jene unendlich vielen homologen Punkte parallel-

epipedisch angeordnet sind (ein Sohncke'sches Raumgitter bilden). 4) Endlich beweist man, dass die aus Atomen zusammengesetzten Molekularpolyeder, deren Schwerpunkte jenes Raumgitter bilden, sämmtlich unter einander parallel sein müssen. Also ist die parallele Lagerung aller Molekularpolyeder im Krystall aus der Erfahrung abgeleitet.

Der besonders betonte Satz 4) kommt nicht in Frage, sondern bedeutungsvoll für das Resultat ist Satz 3). In einem homogenen Krystalle müssen unzählig viele Punkte existiren, um deren jeden die Vertheilung der Materie nach beliebigen, fest im Raume gegebenen Richtungen völlig dieselbe ist, wie um jeden anderen Punkt. Aber diese homologen Punkte sind zunächst nur geometrische; ob grade diese und nur diese Punkte mit den Schwerpunkten der congruenten Krystallmoleküle zusammenfallen, ist vorläufig noch eine offene Frage. Folglich giebt es zunächst nur für die homologen Punkte, nicht auch für die Schwerpunkte aller congruenten Krystallmoleküle eine parallelepipedische Anordnung.

Dann wird gezeigt, dass jene Bravais'sche Annahme specieller ist, als die des Verfassers, folglich mehr Willkürlichkeit einschliesst. Experimente können über die beiden Hypothesen nicht entscheiden, weil man nur das resultirende Verhalten sehr vieler äusserst nahe beisammen liegender paralleler Molekularfäden, die jedenfalls nicht von einem mathematischen Punkte ausgehen, beobachten kann. Rs.

H. Résal. Résumé d'une conférence sur la théorie mathématique de l'élasticité, fait aux élèves de l'école polytechnique. Liouville J. (3) V. 227-248.

Alle physikalischen Begriffe, welche sich auf die Elasticität und ihre Grenzen beziehen, sowie die Definition des Druckes im Innern eines molekularen Systems werden als bekannt vorausgesetzt. Folgende Abschnitte der Elasticitätstheorie werden dargestellt: Die die Druckcomponenten gebenden Summen. Ausdruck der Drucke in Function der Verrückungen, wenn der Körper an-

fänglich im natürlichen Zustande war. Geometrische Interpretation der Formeln, welche die innern Drucke darstellen.

Die Torsion von Prismen nach de Saint-Venant's Behandlung von 1855. Anwendung auf den elliptischen Cylinder. Die Biegung eines Prisma. Um die mathematische Elasticitätstheorie mit der Theorie des Widerstandes der Materialien in Uebereinstimmung zu bringen, werden gewisse Hypothesen gemacht. Daran schliesst sich die Aufstellung der Gleichung, welcher der Umfang genügen muss, damit die gemachten Hypothesen statthaft sind.

Endlich wird eine zweite Lösung des letzten Problems mittels algebraischer Functionen gegeben. Rs.

J. Boussinesq. Du potentiel cylindrique ou logarithmique à trois variables, et de son emploi dans la théorie de l'équilibre d'élasticité. C. R. LXXXVIII. 701-704.

J. Boussinesq. Des déplacements que produit, à l'intérieur d'un sol élastique, une pression normale exercée en un point de la surface. C. R LXXXVIII. 741-743, Mondes (2) XLVIII. 53-54.

Dieses Potential führt zu drei Formen von möglichen Ausdrücken der Verrückungen eines festen homogenen und isotropen, nicht schweren Körpers. Auch giebt es die Integrale des Problems des elastischen Gleichgewichts für ein unbegrenztes Mittel, dessen Volumeneinheit gewissen äusseren Kräften unterworfen ist.

In den C. R. von 1878 hatte der Verfasser untersucht, welche Gestalt die Oberfläche in einem belasteten Theile annimmt, wenn durch verschiedene Elementarbelastungen gewisse Elementarcompressionen erzeugt werden. In der Note vom 20. Mai 1878 waren für das Gleichgewicht eines elastischen Bodens, welcher verschiedene Lasten trägt, einfache Integrale von drei verschiedenen Formen aufgestellt. Diese Integrale werden in der vorliegenden Mittheilung discutirt. Rs.

J. Boussinesq. Application des potentiels directs de Lamé au calcul de l'équilibre d'élasticité d'un solide isotrope et homogène indéfini, sollicité dans une étendue finie par de forces extérieures quelconques. C. R. LXXXVIII. 331-333.

J. Boussinesq. Lois géométriques des déformations que produit une force appliquée en un point d'un solide indéfini, et calcul des erreurs que l'on commet lorsque, d'après les principes de la mécanique classique, on conçoit ce point d'application déplacé d'une certaine quantité dans la direction de la force. C. R. LXXXVIII. 375-378.

In 1) werden auf dem angedeuteten Wege und mit Rücksicht auf eine frühere Mittheilung (C. R. LXXXVIII. 277, s. Abschn. X. Cap. 5 p. 697) Formeln für den angegebenen Fall in einfacherer Weise entwickelt, als dies im „Handbuche" von Thomson und Tait geschehen ist. An zwei Formeln dieser Abhandlung anschliessend zeigt der Verfasser in 2), welche Werthe in jedem Punkte (x, y, z) eines homogenen, isotropen, unbegrenzten festen Körpers die Componenten der Verrückung und die cubische Dilatation haben, wenn eine Kraft dF stets in derselben Richtung auf ein Volumenelement wirkt. Eine Bemerkung über die linearen Dilatationen schliesst diesen Theil. Es wird darauf untersucht, welche Veränderungen die Formeln für die Componenten der Verrückung und für die cubische Dilatation durch Einführung zweier gleicher, aber entgegengesetzt gerichteter Kräfte, deren Angriffspunkte um die kleine Strecke $2a$ von einander entfernt sind, an Punkten erleiden, deren Entfernungen von der Mitte von $2a$ weit bedeutender als a sind. Es folgt eine Bemerkung über den etwaigen Werth der von Herrn Maurice Lévy in der Theorie der Platten eingeführten Terme. Endlich erklärt der Verfasser, dass die Herren Thomson und Tait schon in ihrem Handbuche die schnelle Abnahme dieser Terme von den Grenzen aus erwähnt und ebenfalls vor ihm in der Theorie der Platten die zwei Bedingungen von Poisson auf eine von Kirchhoff zurück-

geführt haben, was ihm aber erst kürzlich bekannt geworden sei. Rs.

J. Boussinesq. Complément à une étude de 1871 sur la théorie de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques dont certaines dimensions sont très-petites par rapport à d'autres. Liouville J. (3) V. 163-194, 329-344.

Der erste Theil bezieht sich, abgesehen von der Einleitung, auf einen Stab, der zweite auf eine Platte. Der Verfasser nimmt gleich im Anfang auf das Verhältnis der Dimensionen dieser Körper in jedem Falle Rücksicht; dadurch gestalten sich die Betrachtungen wesentlich einfacher, als bei Benutzung der allgemeinen Theorie der Elasticität fester Körper. (Siehe F. d. M. III. 1871. 503-506.)

In der Einleitung wird hingewiesen auf den Unterscheidungscharakter der Gleichgewichtsarten, welche Stäbe und Platten darbieten. Daran schliessen sich allgemeine Betrachtungen über die Gleichgewichtsarten eines Prismas, welche Gleichgewichtszustände als Typen für die eines Stabstückes dienen können. Dies wird auf die Theorie der Stäbe angewandt. Bei den genaueren Ausführungen beschränkt sich der Verfasser auf die beiden besonders interessanten Fälle eines ursprünglich geraden und nicht tordirten Stabes, der wenig deformirt wird, und eines Stabes, welcher symmetrisch in Bezug auf eine Ebene ist und auf welchen Kräfte wirken, welche in Bezug auf diese Ebene symmetrisch vertheilt sind.

Zwei Sätze, welche de Saint-Venant seiner Theorie als Hypothesen zu Grunde gelegt hat, glaubt der Verfasser zuerst bewiesen zu haben; sie lauten: „Die longitudinalen Fasern erfahren linear variable Deformationen in den verschiedenen Punkten desselben Schnittes“ und „Jede longitudinale Faser übt auf ihre Nachbaren nur Wirkungen in einer zu ihr parallelen Richtung aus.“ Bewiesen werden sie dadurch, dass bei der Anwendung der allgemeinen Elasticitätsgleichungen die Componenten der Drucke

und die Deformationen als wesentlich gleich angesehen werden bei einem Stab durch die ganze Länge ein und derselben longitudinalen Faser senkrecht zu den Prismabasen und bei einer Platte für die ganze Ausdehnung irgend einer parallel zu den Prismabasen liegenden Schicht. Dagegen wird angenommen, dass diese Drucke und Deformationen in der Richtung der transversalen Dimensionen eines Stabes oder in der Richtung der Dicke einer Platte im Allgemeinen sehr beträchtlich variiren. Doch muss dabei von gewissen Gegenden abgesehen werden, z. B. von den Enden eines Stabes oder dem Umfang einer Platte.

Rs.

L. Pochhammer. Untersuchungen über das Gleichgewicht des elastischen Stabes. Kiel 1879.

Die Lehre vom Gleichgewicht eines elastischen isotropen Stabes wird in grösserer Allgemeinheit behandelt, als de Saint-Venant und Kirchhoff es gethan haben. Es wird nämlich zugelassen, dass auch auf die Mantelfläche beliebige Kräfte wirken, was für gewisse Anwendungen wichtig ist. Da jedoch nur die auf einen Stab bezüglichen Gesetze für das Gleichgewicht abgeleitet werden, so wird bei den Rechnungen von Anfang an Rücksicht darauf genommen, dass die zur Cylinderaxe parallele Dimension vorwalten muss. Daher können die vorkommenden Grössen nach bestimmten Ordnungen eingetheilt werden, woraus sich für die einzelnen Summanden der Differentialgleichungen eine Classification nach der Grössenordnung ergiebt. Wenn nun eine Gleichung aus Summanden von verschiedenen Grössenordnungen besteht, so kann sie nur erfüllt werden, wenn die derselben Ordnung angehörenden Terme beider Seiten unter sich übereinstimmen. In Folge dessen kann jede der Differentialgleichungen in mehrere einfachere zerlegt werden. Die angewendete Methode ist eine Näherungsrechnung, bei welcher die Terme verschiedener Grössenordnungen nach einander gefunden werden, und der Grad der Annäherung ein beliebiger ist.

In der Einleitung (S. 1-29) werden die Differentialgleichungen in einfacher Weise hergeleitet, welche den Zusammenhang zwischen den auf einen elastischen isotropen Körper wirkenden äussern Kräften und den Formänderungen desselben angeben, so weit diese als klein betrachtet werden können. Im ersten Abschnitt (30-84) folgt die Anwendung der gefundenen Differentialgleichungen auf das Problem des Gleichgewichtes eines cylindrischen Stabes von beliebigem Querschnitt, wenn auf die Oberfläche des Stabes beliebige Druckkräfte wirken, und von den der Masse proportionalen Kräften nur die Schwerkraft in Betracht gezogen wird. Ferner wird angenommen, dass die Axe des cylindrischen Stabes im Anfangszustande mit der Schwerpunktslinie zusammenfällt und senkrecht zur Richtung der Schwerkraft ist, und auf die Ermittelung der an den Enden des Stabes auftretenden mechanischen Vorgänge verzichtet, da dort alle drei Dimensionen gleichberechtigt auftreten. Schon die erste Annäherung führt zu Formeln, welche den von Navier gegebenen entsprechen. Danach würden sich, wenn man sich den Stab in Längsfasern zerlegt denkt, welche der Axe desselben parallel sind, die einzelnen Längsfasern so verhalten, als ob sie keinen Einfluss auf einander ausübten. Um daher eine genauere Lösung zu erhalten, muss man die Bestandtheile der nächsten Ordnungen der Restglieder bestimmen. Die Ermittelung dieser Bestandtheile höherer Ordnung von den Componenten derjenigen Verschiebungen, welche ein Theilchen des Körpers beim Uebergange desselben von der Anfangslage in den neuen Gleichgewichtszustand erfährt, wird jedoch bei allen Anwendungen der Theorie ohne Interesse sein, sobald dieselben zu den Druckkräften nur Beiträge liefern, die klein im Vergleich zu den äussern Kräften sind. Es zeigt sich, dass dann bei allen vorkommenden Differentialgleichungen die Anzahl der unabhängigen Variabeln sich auf zwei reducirt. Man bestimmt daher die Verzerrungen, welche die einzeln zur Stabaxe senkrechten Querschnitte erleiden. Schliesslich wird noch gezeigt, dass die vorhergehenden Rechnungen sich auf einen Stab mit variablem Querschnitt übertragen lassen, falls die Abweichungen von der cylindrischen Gestalt innerhalb gewisser Grenzen

bleiben. Die Schwierigkeiten der Rechnung werden durch diese Verallgemeinerung nicht vergrössert.

Die Integration der Differentialgleichungen, welche für die genauere Ermittelung der Vorgänge der Stabdeformation im 1ten Abschnitt aufgestellt wurden, wird für zwei einfache Fälle ausgeführt und zwar im 2ten Abschnitt (85-127) für einen vollen Kreiscylinder und im 3ten Abschnitt (128-143) für einen Hohlcylinder, dessen Querschnitt durch zwei concentrische Kreise begrenzt ist. Die Resultate sind: Die Massentheilchen eines vollen Kreiscylinders, welche anfänglich in einer zur Cylinderaxe senkrechten Ebene in einem Normalschnitte lagen, befinden sich nach der Einwirkung der äusseren Kräfte auf einer Fläche dritten Grades. In Folge der Belastung der Mantelfläche ändern sich die Parameter dieser Fläche von Querschnitt zu Querschnitt. Der Mittelpunkt eines Normalschnittes gehört nur dann der sogenannten neutralen Schicht an, wenn an dem Rande des betreffenden Querschnittes keine äusseren Kräfte angebracht sind. Die Formeln für die Verschiebungen und Druckkräfte zerfallen in zwei wesentlich verschiedene Gruppen; die einen geben die erste angenäherte Lösung und alle unmittelbar zugehörigen begleitenden Erscheinungen (wie die Quercontraction u. s. w.), die anderen beziehen sich auf die Verzerrung, welche ein Normalschnitt durch die auf seinen Rand einwirkenden Kräfte erfahren würde, falls diese allein vorhanden wären. Der für die Tragfähigkeit des Stabes in Betracht kommende Werth der zur Längsrichtung des Stabes parallelen Normalkraft wird auf drei Ordnungen genau berechnet. Die Deformation des Hohlcylinders unterscheidet sich von der des vollen hauptsächlich durch das Hinzukommen einer secundären Biegung, welche in den einzelnen Normalschnitten stattfindet.

Für gewisse Fälle des ursprünglich gekrümmten Stabes werden im 4ten Abschnitt (144-184) die angenäherten Differentialgleichungen aufgestellt und die für die erste Annäherung geltenden Lösungen gegeben. Die dabei in Bezug auf die Gestalt des Stabes und die Richtungen der gegebenen Kräfte gemachten Voraussetzungen sind: 1) Es existire eine Ebene, welche den Stab

nach seiner Längsrichtung in zwei symmetrische Hälften theilt; 2) alle äusseren Kräfte seien dieser Ebene parallel. Rs.

A. Steen. Den elastiske Kurve og dens Anvendelse i Bójningstheorien. Festskr. Kjöbenhavn.

Der Verfasser giebt hier von dem Problem über die Gleichgewichtsfigur eines schmalen durch Druck gebogenen Prismas eine allgemeinere Behandlung als die gewöhnliche. Er untersucht zunächst das Gleichgewicht für den Fall, wo ein schmales senkrechtes nicht eingespanntes Prisma einem senkrechten Druck unterworfen wird. Er behandelt die bestimmende Differentialgleichung mittels Einführung elliptischer Integrale, und die Discussion der erhaltenen Lösung ergiebt als untere Grenze für einen Druck, welcher das Prisma in m Buchten biegen soll, den Werth $R = \frac{m^2\pi^2 EJ}{e^2}$, wo E den Elasticitätscoefficienten, J das Trägheitsmoment des Prismas in Bezug auf eine Axe durch den Schwerpunkt senkrecht auf der Ebene, in welcher die Biegung vorgeht, bedeutet. Wie aus einem Beispiele hervorgeht, erlaubt die Beschaffenheit des Materials in den in der Praxis vorkommenden Fällen nur die Existenz einer einzelnen Bucht. Nach diesen Untersuchungen behandelt der Verfasser die allgemeine Differentialgleichung der elastischen Curve, ebenfalls mit Hülfe elliptischer Functionen, und zeigt, wie in gewissen Fällen die Gleichgewichtsfigur mittels der oben gefundenen speciellen Curve bestimmt werden kann. Als besonders bemerkenswerth scheint der Satz, dass für ein nicht eingespanntes Prisma die Länge der Sehne stets von der Richtung der Kraft unabhängig sein wird und mit der Lothlinie dieselben Winkel bildet wie die Kraft, aber im entgegengesetzten Sinne. Gm.

Townsend and Ball. Solutions of a question (5823). Educ. Times XXXI. 46-50.

Ein cylindrischer elastischer Stab ruht auf vier in gerader

Linie liegenden Stützen, von denen sich zwei an den Enden befinden, die beiden anderen in $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$ der Länge. Das Gewicht des Stabes vertheilt sich dann, falls man auf die durch das Eigen-Gewicht des Stabes hervorgebrachten kleinen Deformationen Rücksicht nimmt, auf die Stützen so, dass jede der Endstützen $\frac{4}{30}$, jede der Mittelstützen $\frac{11}{30}$ der ganzen Last zu tragen hat. Hinzugefügt sind Erörterungen über die Biegung des Stabes.

Wn.

W. H. Burr. On the theory of flexure. Am. J. II. 13-46.

Der Verfasser untersucht, von den Lamé'schen Differentialgleichungen ausgehend, die in einem Balken von constantem und symmetrischem Querschnitt wirkenden inneren Kräfte, sobald derselbe auf Biegung beansprucht wird. In diesem Falle darf N_2, N_3, $T_1 = 0$ gesetzt werden. Es ist namentlich bemerkenswerth, dass einmal die Spannungen N_1 nicht proportional der Entfernung von der neutralen Axe sich ergeben und auch nicht durch die ganze Breite in derselben Entfernung von derselben nothwendig constant sind. Bei rechteckigem Querschnitt ist letzteres der Fall.

Bn.

W. Pscheidl. Bestimmung des Elasticitätscoefficienten durch Biegung eines Stabes. Wien. Ber. LXXIX.

Bisher mass man zu diesem Zwecke die Durchbiegung eines Stabes von rechteckigem Querschnitt, war aber auf kleine Senkungen angewiesen, da die Formeln nur für diese angenähert richtig sind. Das erste Integral der Differentialgleichung der elastischen Linie ist aber genau richtig und enthält in $\frac{dy}{dx}$ die Tangente des Winkels, den die Curve mit der Abscissenaxe bildet. Die Gleichung geht dadurch in die Form

$$\tfrac{1}{6} Ebh^3 \sin\alpha = Pa^2$$

für den Endpunkt über. Der Winkel α lässt sich durch Spiegelablesung sehr genau messen und liefert so eine gute Be-

stimmung für *E*. Die beiden für Glas und Schmiedeeisen auf diesem Wege gefundenen Werthe stimmen recht gut mit den Wertheim'schen. Bn.

Philipps. De la détermination du coefficient d'élasticité des différents corps et de leur limite d'élasticité. C. R. LXXXVIII. 315-318, Mondes (2) XLVIII. 417-419.

Schon 1869 hatte Verfasser (Annales des Mines XV.) berichtet über eine Reihe von Versuchen zur Bestimmung der genannten Grössen, indem er aus dem zu untersuchenden Stoffe eine Spiralfeder bildete und mit einem Balancier verband. Die Schwingungsdauer liefert dann den Elasticitätscoefficienten, die Grenze ergiebt sich durch Drehung des Balanciers. Die erste der beiden Zahlen war noch dadurch ungenau, dass die Schwingungsdauer durch die Trägheit der Feder selbst verlängert wird. Deshalb wird nun um den Balancier ein Faden gelegt, der durch ein Gewicht beschwert eine Drehung α hervorruft, es ergiebt sich dann der Elasticitätscoefficient bei kreisförmigem Querschnitt der Feder: $E = \frac{44GL}{\pi\alpha d^4}$ (*G* Moment des Gewichtes, *L* Länge der Feder). Angegeben ist noch als Beispiel der Elasticitätscoefficient einer Platin-Iridiumlegirung. Bn.

---

de Saint-Venant. Sur une formule donnant approximativement le moment de torsion. C. R. LXXXVIII. 142-147.

Im Anschluss an die beiden Mittheilungen des Verfassers „Sur la torsion des prismes à base mixtiligne..." (C. R. LXXXVII. 849, 893, s. F. d. M. X. 1878, p. 673) wird das Torsionsmoment eines Stabes von ganz beliebigem Querschnitt näherungsweise bestimmt. Ausgegangen wird vom Torsionsmoment eines Cylinders, der als Querschnitt eine Ellipse von den Axen $2b$ und $2c$ hat. Dieses Torsionsmoment ist

$$(1.)\qquad M_x = k\frac{G\sigma^4\theta}{I_0},$$

wo G den Coefficienten der Gleitungselasticität, θ den Torsionswinkel, σ die Querschnittsfläche, $I_0 = \frac{1}{4}(\pi bc^3 + \pi b^3 c)$ das polare Trägheitsmoment von σ, genommen um den Massenmittelpunkt, bedeuten, und $k = \frac{1}{4\pi^2} = 0{,}02533 = \frac{1}{39{,}48}$ ist, also unabhängig von $b:c$. Die Formel (1.) kann auf Stäbe jeder Querschnittsform angewendet werden, wenn man k wenig variiren lässt. Für Prismen von verschiedenen Querschnitten, auch für solche von der Form einer Eisenbahnschiene, kann man in erster Annäherung $k = \frac{1}{40}$ setzen. Besonders wird darauf hingewiesen, dass M_x nicht proportional mit I_0 ist, wie man früher annahm, sondern mit $(1:I_0)$. Der Verfasser glaubt daher, dass alle Formeln, welche bisher gegeben wurden, um die Formänderungen zu bestimmen, welche die Axe oder Mittelfaser von Stücken einfacher oder doppelter Krümmung erleidet, wenn sie gleichzeitig biegenden und tordirenden Kräften unterworfen sind, bezüglich des Antheils der Torsion zu berichtigen sind. Die dem entsprechend veränderten Formeln für die Differentiale der Verrückungen werden gegeben. Von den folgenden Bemerkungen seien zwei erwähnt. Die Formeln des Herrn Bresse (Bresse, Cours de mécanique appliquée ... 2. éd. 1866-1868. n. 46) und die des Herrn Résal (Liouville J. (3) III. 307, siehe F. d. M. IX. 1877, p. 695-697) können nur auf Stäbe von kreisförmigem Querschnitt angewendet werden. Sie sind dagegen anwendbar für Stäbe von beliebigem Querschnitt, wenn man in ersteren kel^2 durch $\frac{Gk\sigma^4}{I_0}$ und in den letzteren μI_ξ durch $\frac{Gk\sigma^4}{I_0}$ ersetzt.

Rs.

A. Ssokolow. Das Torsionsproblem der prismatischen Körper. Mosk. Math. Samml. IX. 288-340.

Eine ausführliche Auseinandersetzung der bekannten Theorie

der Torsion von prismatischen Körpern wird an zwei speciellen Fällen erläutert:

1) Wenn der Querschnitt des Prismas ein von zwei concentrischen Bogen und zwei Radien begrenztes Stück eines Kreisrings ist.

2) Wenn der Querschnitt von zwei confocalen Ellipsen begrenzt ist.

Es seien im letzten Falle $2c$ die Excentricität, A und a die Längen der grossen Halbaxen der äusseren und inneren Ellipse, p_1 und p_2 ihre elliptischen Coordinatenparameter:

$$\cos p_1 i = \frac{A}{c}, \quad \cos p_2 i = \frac{a}{c}.$$

Dann wird bewiesen, dass die Linien des Querschnittes, welche keine Verschiebungen längs der Axe des Prismas haben, die zwei Symmetrie-Axen des Querschnitts und die Ellipse:

$$\frac{x^2}{\cos^2 p_3 i} - \frac{y^2}{\sin^2 p_3 i} = c^2$$

sind, wo

$$p_3 = \frac{p_1 + p_2}{2}.$$

Die Punkte der grössten Verzerrung (die gefährlichen Punkte) sind: auf der inneren Contur immer die Endpunkte der grossen Hålbaxe, auf der äusseren Contur die Endpunkte der kleinen Halbaxe jedoch nur dann, wenn die Bedingung:

$$(e^{-2p_3}) > \frac{3 - e^{-4p_1}}{e^{2p_1} + e^{-2p_1}}$$

erfüllt ist; sonst auch die Endpunkte der grossen Halbaxe, wie auf der inneren Contur. Bw.

G. Kirchhoff. Ueber die Transversalschwingungen eines Stabes von veränderlichem Querschnitt.

Berl. Monatsber. 1879. 815-828.

Die Transversalschwingungen eines Stabes, dessen eines Ende fest, dessen anderes frei ist, werden behandelt, wenn der-

selbe ein rechteckiges Prisma, von welchem zwei gegenüberliegende Seiten parallel sind und zwei einen sehr kleinen Winkel bilden, oder ein Kegel von äusserst kleinem Winkel ist.

Zunächst wird die Differentialgleichung für die Verrückung eines Querschnittes eines unendlich dünnen Stabes aufgestellt, dessen Querschnitte in der Längsrichtung des Stabes beliebig variiren, deren Schwerpunkte in einer Geraden liegen und deren Hauptaxen die gleiche Richtung haben. Ferner werden die Bedingungen für die Enden aufgestellt, wenn auf dieselben keine eine Arbeit leistenden Kräfte wirken. Die Betrachtung wird auf Schwingungen beschränkt, bei welchen der Stab einen einfachen Ton giebt. Für diesen Fall kann das allgemeine Integral leicht angegeben werden, wenn für die Aenderung der Querschnitte eine Bedingung erfüllt ist. Für gewisse Fälle verliert die entwickelte Form des allgemeinen Integrals zwar ihre Brauchbarkeit; es wird aber gezeigt, wie man dann eine brauchbare Integralform erhalten kann. Nur zwei Fälle (die vorhin erwähnten) werden weiter verfolgt. In jedem derselben kann die Differentialgleichung 4ter Ordnung auf Differentialgleichungen 2ter Ordnung reducirt werden, deren Integrale Bessel'sche Functionen sind. Für das Prisma wird der Werth der Schwingungszahl des Grundtones berechnet und mit dem eines parallelepipedischen Stabes zusammengestellt. Ist a die Dicke eines parallelepipedischen oder die am befestigten Ende eines prismatischen Stabes, l die Länge des Stabes, dann sind die Schwingungszahlen des Grundtones

$$\lambda_{\text{par}} = 3{,}516 \sqrt{\frac{E}{3\mu}}\,\frac{a}{l^2} \quad \text{und} \quad \lambda_{\text{pris}} = 3{,}315 \sqrt{\frac{E}{3\mu}}\,\frac{a}{l^2}\,.$$

Die grösste Dilation sei ε und U die grösste Elongation des freien Endes, so ist für den Grundton

$$U_{\text{par}} = \varepsilon\,\frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{E}{3\mu}} \quad \text{und} \quad U_{\text{pris}} = \varepsilon\,\frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{E}{3\mu}}\cdot 3{,}919.$$

Die Schwerpunktslinie des in der Gleichgewichtslage befindlichen Stabes sei die z-Axe; x und y seien die beiden anderen rechtwinkligen Coordinaten, und es sei

$$q = \iint dx\,dy, \quad k = \iint x^2\,dx\,dy,$$

q_0 und k_0 endlich seien die Werthe von q und k für das befestigte Ende, dann hat man für den Grundton des cylindrischen und den des conischen Stabes

$$\lambda_{cyl} = 3{,}516 \sqrt{\frac{k_0 E}{q_0 \mu}} \frac{1}{l^2} \quad \text{und} \quad \lambda_{con} = 8{,}718 \sqrt{\frac{k_0 E}{q_0 \mu}} \frac{1}{l^2}$$

und für die grösste Elongation des freien Endes, wenn die befestigten Enden beider Stäbe gleich gross sind,

$$U_{cyl} = \frac{\varepsilon}{\lambda a} \sqrt{\frac{k_0 E}{q_0 \mu}} \quad \text{und} \quad U_{con} = \frac{\varepsilon}{\lambda a} \sqrt{\frac{k_0 E}{q_0 \mu}} \cdot 6{,}889.$$

Rs.

F. Lindemann. Die Schwingungsformen gezupfter und gestrichener Saiten. Freib. Ber. VII. 500-532.

Die Ruhelage einer Saite werde als x-Axe genommen und y sei die Ausweichung eines Punktes x aus der Ruhelage, dann lautet für die gezupfte Saite die Differentialgleichung

$$(1.) \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Nimmt man an, dass y als Function von x in eine Fourier'sche Reihe von der Form

$$\Sigma\left(A_n \sin \frac{2n\pi t}{T} + B_n \cos \frac{2n\pi t}{T}\right) \sin \frac{n\pi x}{L}$$

entwickelt werden kann, so erhält man als Integral

$$(2.) \qquad y = \frac{2bL^2}{\pi^2 a(L-a)} \Sigma \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi a}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{2n\pi t}{T},$$

wo $\alpha = \dfrac{2L}{T}$ gesetzt ist. Die zweimalige Differentiation der einzelnen Glieder dieser Reihe nach x oder t führt auf eine nicht convergente Reihe. Daher ist besonders nachzuweisen, dass diese Reihe als Integral der Gleichung (1.) zulässig ist. Dies bildet den Hauptinhalt des ersten Theiles der Abhandlung. Es werden die Sätze gewonnen: Die Reihe (2.) genügt der Differential-

gleichung (1.). Durch die Unstetigkeiten des nach x genommenen Differentialquotienten der Reihe (2.), welche an den Ecken der Saite vorkommen, wird die Gültigkeit der Differentialgleichung (1.) nicht gestört.

Im zweiten Theile wird bei der mathematischen Behandlung der Bewegung einer gestrichenen Saite von folgendem Satze ausgegangen: Jeder Punkt einer gestrichenen Saite schwingt bei der aufsteigenden Bewegung mit constanter Geschwindigkeit und bei der absteigenden wieder mit constanter Geschwindigkeit; ob diese beiden Geschwindigkeiten gleich sind, bleibt dahin gestellt. Das Auftreten von Knotenpunkten wird ausgeschlossen. Eine Darstellung von der Bewegung zu geben, gelingt dem Verfasser durch Anwendung der Christoffel'schen Unstetigkeitsbedingungen (Brioschi Ann. (2) VIII., siehe F. d. M. IX. 1877. p. 663). Nennt man P die Amplitude des Saitenmittelpunktes, so wird gefunden

$$(3.)\qquad y = \frac{8P}{\pi^2}\Sigma\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{2n\pi t}{T}.$$

Doch diese Formel stellt die Thatsache nicht dar, dass im Klang der Saite alle Obertöne enthalten sind und nur, wenn die Strichstelle in einen aliquoten Theilpunkt der Saite fällt, diejenigen Obertöne ausfallen, welche an jener Stelle einen Knotenpunkt haben. Daher wird eine andere Behandlung gegeben, in welcher das Auftreten von Knotenpunkten berücksichtigt wird. Statt (3.) wird folgende Gleichung gefunden

$$y = \frac{ALT}{m\pi^2}\Sigma\frac{1}{n^2}\sin\frac{nm\pi x}{L}\sin\frac{2n\pi t}{T},$$

wenn die Saite $m-1$ Knotenpunkte besitzt, A eine Constante und T die Schwingungsdauer eines Saitentheiles ist. Dabei sind die Knotenpunkte als ruhend angesehen. Nimmt man an, dass sie Schwingungen ausführen gemäss den für die Bewegung der Saite aufgestellten Bedingungen, dann ergiebt die Darstellung von y durch eine Fourier'sche Reihe

$$y = \frac{LT}{\pi^2}\Sigma\frac{A_n}{n^2}\sin\frac{nm\pi x}{L}\sin\frac{2n\pi t}{T}.$$

Ist n nicht durch m theilbar, dann hat man $A_n = A$, und wenn

n durch m getheilt werden kann, ist $A_n = A+B$, wo B eine andere Constante bedeutet. Damit die Obertöne, welche den Stellen $x = \frac{L}{m}, \frac{2L}{m}, \cdots$ entsprechen, im Klang der Saite fehlen, muss $B = -A$ sein. Für einen Punkt zwischen $x = 0$ und $x = \frac{L}{m}$ ist die Geschwindigkeit der ansteigenden Bewegung gleich $A\frac{m-1}{m}$, die der absteigenden schwankt zwischen den Werthen $0, -A\frac{L}{m}$, $0, -A\frac{L}{m}, \cdots$. Die Geschwindigkeitscurve wird also aus einem geradlinig aufsteigenden und einem treppenförmig absteigenden Zuge bestehen. Für andere Punkte der Saite, z. B. zwischen $\frac{2i}{m}L$ und $\frac{2i+1}{m}L$, ist der absteigende wie der aufsteigende Zug der Geschwindigkeitscurve gekräuselt. Zuletzt wird auf den Unterschied zwischen dieser Ableitung und der entsprechenden von Helmholtz hingewiesen. Rs.

E. Mathieu. Étude des solutions simples des équations aux différences partielles de la physique mathématique. Liouville J. (3) V. 5-20.

Der Verfasser sucht eine für alle Fälle gültige Definition des Begriffs der einfachen Lösung bei den Differentialgleichungen der mathematischen Physik, d. h. einer solchen Lösung, welche von der Zeit nur abhängt durch einen Factor $\sin(\alpha t)$ oder $e^{-\alpha^2 t}$. Unter Benutzung der Resultate einer früheren Arbeit (cf. F. d. M. IV. 1872. p. 175ff.) findet er folgendes Resultat:

Man kann im Allgemeinen stets eine und nur eine einzige Function v derart bestimmen, dass sie der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -a^2 v$$

im Innern einer geschlossenen Fläche s genügt, dass sie ferner

selbst nebst ihren ersten Ableitungen dort endlich und stetig ist, und dass sie endlich in jedem Punkte des Umfangs einen willkürlich gegebenen Werth annimmt. Nur für gewisse Werthe der Constante a, die einander in gewissen Intervallen folgen, findet eine Ausnahme statt. Für diese Werthe von a existirt eine von Null verschiedene Function v, die allen vorhergehenden Bedingungen genügt, nur dass sie am Rande verschwindet, statt dort gegebene Werthe anzunehmen. Bildet man mit einer solchen Function v die Function u

$$u = [A\sin(act) + B\cos(act)].v,$$

so ist dies u eine einfache Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),$$

die zugleich der Bedingung genügt, dass am Rande $u = 0$ ist.

Der Verfasser erläutert das Problem an demselben Falle, wo die Fläche ein Kreis ist. Er erwähnt dann, dass ihm eine Ausdehnung auf den Fall eines Cylinders nicht gelungen ist. Ein analoges Resultat, wie hier für das Problem der Schwingung der Membranen, wird für das Problem der Wärmeleitung angedeutet.

Indem der Verfasser zur Schwingung der Membranen zurückkehrt, zeigt er, dass man die obige Function als eine Art Potential (für ein von dem Newton'schen verschiedenes Anziehungsgesetz) ansehen kann, und bestimmt die Dichtigkeit ϱ derjenigen Randbelegung, durch die man ein bestimmtes v erhält. Man kann dann die einfachen Lösungen nach der Anzahl der Punkte classificiren, in denen ϱ am Rande verschwindet. Zu jeder gegebenen Zahl solcher Punkte gehören noch unzählige Werthe von a. Durch die Betrachtung der eben genannten Punkte lassen sich die Knotenlinien der Membran allgemein bestimmen, falls die Grenze eine Linie von der Form $\beta =$ Const. ist, wo

$$\alpha + i\beta = f(x+iy)$$

ist. Wn.

J. Hopkinson. On the stresses caused in an elastic solid by inequalities of temperature. Messenger (2) VIII. 168-174.

Der Verfasser wendet die gewöhnliche Theorie elastischer Körper an, um den Druck in ungleich erwärmten Körpern zu untersuchen. Der besondere Fall: „Die Temperatur der inneren und äusseren Oberfläche einer homogenen sphärischen Schale sind gegeben, zu finden den resultirenden Druck." wird speciell behandelt, ebenso der Fall einer festen Kugel, welche in irgend welcher Art symmetrisch um den Mittelpunkt erwärmt ist.

Glr. (O.)

K. Pearson. On the distortion of a solid elastic sphere. Quart. J. XVI. 375-383.

Es soll die Gestalt gefunden werden, welche eine elastische Kugel annimmt, unter der Wirkung irgend einer auf der Oberfläche von Punkt zu Punkt variirenden, normal drückenden Kraft. Bei Durchführung der Rechnung zeigt sich, wie sowohl dieses, als auch das umgekehrte Problem zu lösen ist. Die Lösung wird jedoch nur für den Fall ausgeführt, dass die Verrückung symmetrisch um einen Durchmesser ist. Zwei Anwendungen werden gegeben: 1) Es wird die Gestalt einer homogenen Atmosphäre bestimmt, welche die anfänglich sphärische Erde in ein Umdrehungssphäroid verwandelt; 2) Es wird die Compression einer Kugel bestimmt, welche zwischen zwei parallelen Tangentialebenen durch eine Kraft zusammengedrückt wird.

Rs.

H. Résal. Note sur les conditions de résistance d'un tube elliptique, dont l'épaisseur est faible, soumis à l'action d'une pression uniforme intérieure. Liouville J. (3) V. 319-328.

Diese „Note" findet sich wörtlich (jedoch ohne zwei Druckfehler) wieder in des Verfassers „Traité de mécanique générale" Tome V. p. 132-141 unter der Ueberschrift „De la résistance d'une chaudière cylindrique de forme elliptique soumise à l'action d'une pression intérieure". Es ist der letzte Abschnitt des Paragraphen „Flexion des pièces courbes". Um die „Note" völlig zu verstehen, ist diese Beziehung zu berücksichtigen. U. A. wird

bewiesen, dass die Endpunkte der kleinen Axe des elliptischen Querschnitts die gefährlichsten Punkte sind, und bemerkt, aus welchen Gründen vom ökonomischen Standpunkte aus für einen Dampfkessel die Kreisform der elliptischen vorzuziehen ist. Siehe auch das folgende Referat. Rs.

H. Résal. Sur la résistance des chaudières elliptiques. C. R. LXXXVIII. 997-999.

Der Verfasser stellt sich einen elliptischen oder nahezu elliptischen Cylinder vor, auf dessen innere Wand ein überall normaler Druck ausgeübt wird. Die Druckkräfte setzen sich zu einem Kräftepaar zusammen, welches in jedem Punkte eine Biegung hervorzubringen bestrebt ist. Speciell für den Fall einer Ellipse, deren grosse Axe a und deren Excentricität e ist, ist das Drehungsmoment:

$$M = p.a^2.e^2(C-\sin^2\varphi).$$

Dasselbe bezieht sich auf einen Punkt, für welchen $x = a.\cos\varphi$,

$$C = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\sqrt{1-e^2.\sin^2\varphi}.\,d\varphi}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-e^2.\sin^2\varphi}\cdot d\varphi}.$$

Setzt man $C = \sin^2\alpha$, so zeigt sich, dass der Druck für einen Theil der Wand die Krümmung vergrössert, für einen anderen verkleinert. Für ersteren $\left(\text{besonders für das Ende der kleineren Axe } \varphi = \frac{\pi}{2}\right)$ ist daher die Gefahr des Platzens am grössten.

Ok.

L. Henneberg. Ueber die elastischen Schwingungen einer isotropen Kugel ohne Einwirkung von äusseren Kräften. Brioschi Ann. (2) IX. 193-209.

Für die Verrückungen u, v, w eines Punktes (x, y, z) setzt

der Verfasser, wie es Clebsch in Borchardt J. LXI. gethan hat,

$$u = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z},$$

$$v = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}, \quad w = \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y},$$

und bestimmt die vier Functionen P, U, V, W durch die Bedingung, dass jede der vier Gruppen

$$\begin{array}{llll} u_1 = \frac{\partial P}{\partial x}, & u_2 = 0, & u_3 = -\frac{\partial V}{\partial z}, & u_4 = \frac{\partial W}{\partial y}, \\ v_1 = \frac{\partial P}{\partial y}, & v_2 = \frac{\partial U}{\partial z}, & v_3 = 0, & v_4 = -\frac{\partial W}{\partial x}, \\ w_1 = \frac{\partial P}{\partial z}; & w_2 = -\frac{\partial U}{\partial y}; & w_3 = \frac{\partial V}{\partial x}; & w_4 = 0 \end{array}$$

eine mögliche Schwingung des Körpers darstellt. Man hat dann

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = b^2 \Delta P,$$

und U, V, W genügen der Gleichung $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \Delta \varphi$.

Dadurch ist die Bewegung des Körpers in eine longitudinale Schwingung und in drei transversale zerlegt. Für die Functionen P, U, V, W werden nun die Anfangsbedingungen und die Grenzbedingungen in Bezug auf die Oberfläche, falls auf diese keine Druckkräfte wirken, aufgestellt.

Nach Einführung von Polarcoordinaten wird die Longitudinalschwingung der Kugel untersucht. Dabei wird gefunden, dass diese Schwingung in zwei Schwingungen zerlegt werden kann: $P = Q + S$, von welchen die eine Q in der Richtung des Radius erfolgt und ausser von der Zeit nur von der Entfernung vom Mittelpunkt abhängt, während bei der anderen die Oberfläche der Kugel sich nicht ändert, bez. sich nur in sich selbst bewegen soll. Diese zweite Schwingung wird wieder in zwei Einzelschwingungen zerlegt, von welchen eine aber keine mögliche ist. Die specielle Interpretation des Bewegungsvorganges wird für die Schwingung Q gegeben.

Bei den transversalen Schwingungen der Kugel zeigt sich, dass jede derselben in zwei zerlegt werden kann, von welchen

aber die eine von grösserer Wichtigkeit ist, nämlich die, für welche U, V, W nur von der Zeit und von der Entfernung des Punktes (x, y, z) vom Mittelpunkte abhängen. Bei dieser Schwingung bewegt sich jede Kugelfläche $r = \text{const.}$ in sich selbst, ohne dass die relative Lage der Punkte in ihr sich ändert.

Der Verfasser weist ferner darauf hin, dass das Problem für das Rotationsellipsoid (ebenso für den elliptischen Cylinder) um vieles verwickelter wird, indem statt der Kugelfunctionen und der Bessel'schen Functionen solche auftreten, welche einer Gleichung

$$\omega(1-\omega)\frac{d^2L}{d\omega^2}+\left[1+m-(m+\tfrac{3}{2})\omega\right]\frac{dL}{d\omega}-(a-b\omega)L=0$$

genügen. Rs.

P. Järisch. Ueber die elastischen Schwingungen einer isotropen Kugel. Borchardt J. LXXXVIII. 131-146.

Der Verfasser äussert seine Ansichten über die bezüglichen Arbeiten von Lamé, Clebsch und Henneberg. Er geht von den Gleichungen aus (sie mögen mit (A) bezeichnet werden), welche Lamé für die Schwingungen einer isotropen, elastischen Kugel gegeben hat. Damit ist für das Problem vorausgesetzt, dass die etwa vorhandenen äusseren Kräfte von der Zeit unabhängig sind. Ferner werden die Oberflächenbedingungen (B) hergestellt. Bezeichnet man mit ω_1^2 und ω_2^2 die Verhältnisse der beiden Elasticitätsconstanten zur Dichtigkeit, so kann das Gleichungssystem (A) in zwei Systeme (A_1) und (A_2) zerlegt werden; (A_1) giebt den Theil der Componenten der Verrückung, welcher allein von ω_1, und (A_2) den anderen Theil, welcher nur von ω_2 abhängt. (A_1) repräsentirt longitudinale, (A_2) transversale Schwingungen. Das Problem zerfällt somit in drei: Man hat zu bestimmen:

1) ein Werthsystem u_1, v_1, w_1, welches den Gleichungen (A_1) und (B) genügt,

2) ein Werthsystem u_2, v_2, w_2, welches die Gleichungen (A_2) und (B) erfüllt,

3) ein Werthsystem $u = u_1+u_2$, $v = v_1+v_2$, $w = w_1+w_2$,

so dass u_1, v_1, w_1 den Gleichungen (A_1), u_2, v_2, w_2 den Gleichungen (A_2) und u_1+u_2, v_1+v_2, w_1+w_2 den Gleichungen (B) genügen. Das erste Werthsystem liefert reine Longitudinalschwingungen, das zweite reine Transversalschwingungen und das dritte entspricht coexistirenden longitudinalen und transversalen Schwingungen.

Von sechs speciellen möglichen Werthsystemen von u_1, v_1, w_1 genügt nur eins allen Anforderungen, nämlich u_1, $v_1 = w_1 = 0$. Bei reinen Longitudinalschwingungen bewegt sich daher jedes Kugeltheilchen nur in der Richtung des Radius und die auf derselben Kugelfläche liegenden Theilchen erleiden die gleiche Verrückung. Als Knotenflächen treten Kugelflächen auf, und die Schwingungszahlen hängen von beiden Elasticitätsconstanten ab.

Für die reinen Transversalschwingungen hat man $u_2 = 0$, v_2, w_2. Die einzelnen Kugeltheilchen erleiden Verrückungen senkrecht zum Radius. Als Knotenflächen treten im Allgemeinen concentrische Kugelflächen auf, doch sind es bei reinen Torsionsschwingungen Kreiskegelflächen, deren gemeinsame Spitze mit dem Mittelpunkt zusammenfällt. Die Schwingungszahlen hängen nur von einer Elasticitätsconstante (ω_2) ab.

Schliesslich werden der Werth der Volumenänderung und die Werthe der Componenten einer Verrückung des dritten Zustandes aufgestellt. Der eine Theil in diesen Ausdrücken für u, v, w entspricht der longitudinalen, der andere der transversalen Verrückung. Knotenflächen treten nicht auf. Die Schwingungszahlen sind von beiden Elasticitätsconstanten abhängig und verschieden von denen der beiden ersten Schwingungszustände.

Rs.

E. Perry and W. R. Ayrton. On the practical solution of the most general problems in continuous beams. Proc. of London XXIX. 493-505.

Bezieht sich auf die Form der Lösung von Herrn Heppel, die Herr Rankine in den Proc. of London XVIII. p. 178 gegeben hatte. Es wird bemerkt, dass schon Heppel's Lösung eines verhältnissmässig einfachen Falles genügt, um Ingenieure von solchen

Rechnungen abzuschrecken. Dagegen erfordert die in der vorliegenden Arbeit auseinandergesetzte graphische Methode zur Lösung des allgemeinsten Falles nur sehr elementare mathematische Kenntnisse und kann in wenig Stunden vollendet werden, sogar in noch kürzerer Zeit bei Benutzung von Thompson's Integrationsmaschine als einer Art Planimeter. Die Methode wird an einem Beispiel erläutert. Cly. (O.)

G. Pittaluga. Degli assi elastici. Atti di Torino XIV. 707-720.

Entwickelung des Elasticitäts-Ellipsoides und der Elasticitäts-Axen, und Discussion der Fälle, in welchen die Anzahl der letzteren sich auf 2 oder 1 reducirt und unendlich gross wird.

Bn.

Crofton. On self-strained frames of six joints. Proc. L. M. S. X. 13-16.

Um ein aus n Stäben gebildetes Polygon starr zu machen, sind $n-3$ Diagonalstreben erforderlich. Spannungen werden im System erst durch äussere Kräfte hervorgerufen, wie sich aus der Betrachtung der Bedingungsgleichungen ergiebt. Diese als allgemein gültig angesehenen Sätze gelten streng nur für Drei-, Vier- und Fünfecke. Für Sechsecke werden zwei Fälle nachgewiesen, in denen ohne Wirkung äusserer Kräfte die sämmtlichen Stäbe in Spannung sein können (selbstgespannte Polygone). Am Schluss wird noch ein Fall erwähnt, wie ein Achteck in Selbstspannung sein kann, ohne einmal die zur Starrheit erforderlichen Streben vollständig zu besitzen. Bn.

C. Clericetti. Ponti sospesi rigidi. Rend. Ist. Lomb. (2) XII. 274-290.

Schluss der in F. d. M. IX. 1877. p. 702 und X. 1878. p. 606 besprochenen Arbeiten, in welchem die Wirkung der beiden Constructionstheile auf die tragenden Drahtseile untersucht wird,

namentlich die Durchbiegungen, welche durch zufällige Lasten und Temperaturänderungen verursacht werden. Nimmt man das Verhältnis der Länge zur Pfeilhöhe = 10 : 1, so ergiebt sich für Stahldrahtseile als Grenze der Spannweite combinirter Brücken 900 m, was schon Röbling ausgesprochen haben soll.

Bn.

M. Dupuy. Notice sur le viaduc de l'Erdre. Ann. d. P. et d. Ch. XVII. 331-363.

Beschreibung eines kurzen zweigleisigen Viaduktes der Eisenbahn von Nantes nach Chateaubriant, dessen mittlerer Theil eine eiserne Bogenbrücke von 95 m Länge bildet. Die statische Berechnung ist kurz gegeben unter Anwendung der von Bresse und Collignon aufgestellten Formeln. Der formverändernde Einfluss der einseitigen Belastung ist dadurch vermindert, dass der eiserne Bogen zwar am Auflager auf einer Stahlaxe ruht, aber gegen Drehungen durch Auflager geschützt ist. Interessant sind namentlich die in den Tafeln gegebenen Aufzeichnungen der durch die beweglichen Lasten verursachten Bewegungen, welche durch selbstregistrirende Apparate aufgezeichnet sind. Bn.

M. Lalanne. Méthode expéditive pour l'évaluation approchée des volumes des terrassements et des superficies occupées pour un avant-projet de chemin de fer, de route ou de canal. Ann. d. P. et d. Ch. XVIII. 63-76.

M. Lalanne. Note sur une méthode graphique pour la détermination de la distance moyenne de transports des déblais et remblais dans l'exécution des travaux de terrassements. Ann. d. P. et d. Ch. XVIII. 77-95.

Indem das Querprofil des gewachsenen Bodens als horizontal angenommen wird, ergiebt sich der Inhalt der zu bewegen- Erdmassen

$$V = \delta\left[A\left(\frac{y_1+y_n}{2}+\Sigma y\right)+\frac{1}{t}\left(\frac{y_1^2+y_n^2}{2}+\Sigma y^2\right)\right],$$

worin die y die äquidistanten Ordinaten sind, δ ihre Entfernung, t der Böschungscoefficient, A die Kronenbreite, welche im Abtrage noch um die doppelte Breite des Grabenprofils zu vermehren ist. Beispiele aus der Praxis sind beigegeben und die Abweichungen von der genauen Rechnung nachgewiesen. In ähnlicher Weise wird die angenäherte Messung der beanspruchten Landfläche ermöglicht.

Die folgende Abhandlung giebt eine sinnreiche Methode, durch Zeichnung nicht nur die Transportmomente der Erdmassen darzustellen, sondern auch höchst einfach festzustellen, wie viel davon durch Schubkarren oder durch vollkommenere Transportmittel zu bewältigen ist. Die Zeichnung erlaubt auch die richtige Verwendung der Abtragmassen darzustellen. Die numerischen Resultate können entweder mit dem Polarplanimeter oder nach einer einfachen Construction auf einem besonderen Massstabe abgegriffen werden. Bn.

A. Fuhrmann. Ueber Gebäudeformen, welche das Minimum der Mauermasse fordern. Civiling. XXV. 135-174.

Die gestellte Aufgabe besteht in dem Aufsuchen derjenigen Grundrissformen, welche ein Minimum der Mauermasse erfordern, wenn die Stärke der äusseren wie der Zwischenwände gegeben ist. Vom einfachen zum zusammengesetzten fortschreitend betrachtet Verfasser zuerst die Rechteckform ohne, dann mit Zwischenwänden, dann das Rechteck mit angesetzten bez. ausgeschnittenen kleineren Rechtecken, schliesslich noch einige andere Formen. Im ersten Falle ist natürlich die günstigste Form das Quadrat. Indem der Verfasser dann bei gegebenem Inhalt das günstigste Verhältnis der Länge zur Breite ändert, (hier 1), ergiebt sich ein Nachtheil durch Vergrösserung des Umfanges, welcher, als Function der Aenderung dargestellt, die Nachtheilcurve liefert (Hyperbel). Der Nachtheil ist in der Nähe des Minimums, wie natürlich sehr klein, so dass geringe Abweichungen von der günstigsten Form aus ästhetischen Rücksichten keinen erheblichen Mehraufwand erfordern. Beachtenswerth ist, dass die günstigsten Formen bei An-

wendung von Zwischenwänden in den gebräuchlichen Fällen sich sehr wohl verwendbar erweisen. Bn.

J. Gromeka. Theorie der Capillarität. Mosk. Math. Samml. IX. 435-501.

Bw.

G. van der Mensbrugghe. Sur quelques phénomènes curieux observés à la surface des liquides en mouvement. Bull. de Belg. (2) XLVIII. 346-359.

Weitere Anwendungen der Principien des Verfassers auf die Umänderung potentieller Energie in actuelle und umgekehrt, wenn die freie Oberfläche einer Flüssigkeit kleiner oder grösser wird. Mn. (O.)

G. van der Mensbrugghe. Sur une nouvelle application de l'énergie potentielle des surfaces liquides. Mondes (2) XLVIII. 333-338, XLIX. 480-489, 525-531.

Auszug aus der Arbeit: Mém. de Belg. in 4°. XLIII., siehe F. d. M. X. 1878. p. 677. O.

G. van der Mensbrugghe. Nouvelles applications de l'énergie potentielle des surfaces liquides. Bull. de Belg. (2) XLVII. 326-346.

Hauptursache des Wirkungsverlustes bei Wasserfällen. Uebersprung der Bewegungsenergie in Folge von Meereswellen.

Mn. (O.)

A. Reinhold. Beitrag zur Theorie der Capillarität. Grunert Arch. LXIII. 110-112.

Es wird angenommen, dass bei einer vertical in Wasser getauchten Capillarröhre die Anziehung zwischen Glas und Wasser proportional ist der Grösse des Umfanges der Wasser-

säule, und die Wirkung, welche die Schwerkraft auf die gehobene Flüssigkeitssäule ausübt, proportional mit der Grösse des Querschnitts erfolgt. Das Verhältnis der beiden Kräfte zu einander ist dann $\frac{2}{r}$. Weil es also mit der Abnahme von r wächst, so muss, nach dem Verfasser, mit abnehmendem Radius die Wirkung der Anziehung zwischen Glas und Wasser immer mehr die der Schwerkraft auf die gehobene Flüssigkeitssäule überwiegen, wie sich dies in der grösseren Steighöhe zeige. Daraus wird sofort geschlossen, dass bei zwei verschiedenen Haarröhren die Steighöhen sich umgekehrt wie die Radien derselben verhalten.

Der Verfasser benutzt diesen Satz, um die Verhältnisse der Berührungslinien von Glas und Wasser zu der bezüglichen horizontalen Querschnittsfläche der Wassersäule zu bilden, wenn 1) zwei zu einander parallele Glasplatten und 2) drei massive drehrunde, gleich starke, neben einander gestellte Glasstäbe senkrecht in Wasser getaucht werden. Dadurch gewinnt er die Sätze, dass in einem Haarröhrchen die Steighöhe doppelt so gross ist als zwischen zwei parallelen Platten, deren Entfernung gleich dem Durchmesser jenes Röhrchens ist, und dass im zweiten Falle die Steighöhe in dem dreieckigen Raume $h' = 9{,}741\ h$ ist, wenn h die Steighöhe in einem Capillarrohre bezeichnet, dessen Radius gleich dem eines Glasstabes ist.

Auf Grund hiervon hofft der Verfasser, dass man in der Capillaritätstheorie von der Oberflächenspannung wird absehen können. Rs.

G. Poloni. Sopra una superficie di capillarità.

Rend. Ist. Lomb. (2) XII. 391-397.

Die Schraube eines Sphärometers befinde sich vertical über der freien Oberfläche einer in einem Glase befindlichen Flüssigkeit. Man drehe die Schraube so lange, bis die Schraubenspitze die Flüssigkeit berührt. Erhebt man dann die Schraube, so schleppt sie eine Flüssigkeitssäule mit sich, welche nach und nach immer schmäler wird und schliesslich zerreist. Ein Theil der Flüssigkeitssäule fällt in die Flüssigkeit und an der Schrauben-

spitze bleibt ein Tropfen hängen, welcher dort ein sphärisches Segment bildet. Endlich bewege man die Schraube so weit hinab, dass der Tropfen die Flüssigkeit berührt. Der Stand der Schraube in den drei bemerkenswerthen Momenten wird beobachtet; aus den Ablesungen kann man die Höhe des unteren Theiles der Flüssigkeitssäule für den Augenblick des Abreissens angeben. Diese Höhe wurde für destillirtes Wasser von etwa 12 Grad, welches sich in Gefässen von Zink, Messing, Eisen oder Glas befand, und für cylindrische Schraubenspitzen von Zink, Messing, Kupfer, Platin, Elfenbein, Buxbaumholz, Glasstäbe und Glasröhren von Durchmessern von 0,5 bis 2,5 Millimetern bestimmt.

Der Verfasser ist der Ansicht, dass die specifische Cohäsion in Bezug auf eine Flüssigkeit bei diesem Phänomen wie bei dem der Tropfenbildung dargestellt werde durch das Gewicht der abreissenden Flüssigkeitssäule, wenn man dasselbe auf die Einheit des Umfanges bezieht. Die Mittellinie der Säule, welche durch die Spitze geht und vertical steht, sei die y-Axe, die innerhalb eines Meridianschnittes der erhobenen Flüssigkeitssäule und in der horizontalen Oberfläche der Flüssigkeit befindliche Gerade die x-Axe. Dann gilt es die Function $f(x, y)$ zu bestimmen, welche die Meridiancurve der Flüssigkeitssäule darstellt. Um diese Curve kennen zu lernen, wurde die Methode des Professors Felici angewendet. In einer Dunkelkammer ist ein Bündel Sonnenstrahlen horizontal auf die erhobene Flüssigkeitssäule gerichtet und der durch ein System von Linsen 20 bis 40 Mal vergrösserte Schatten der Flüssigkeitssäule wird auf einem gegen das Lichtbündel verticalen Schirme beobachtet, dessen Fläche in Quadratmillimeter getheilt ist. Während der Beobachtung wird die Richtung des Lichtbündels constant erhalten, die Sphärometerschraube langsam bewegt, und die Umrisse der Schatten auf dem Schirm werden in mehr oder weniger benachbarten Phasen bis zum Zerreissen der Säule verzeichnet. So erhält man die Coordinaten der verschiedenen Punkte. Die Vergrösserung wurde aus der des Durchmessers der Spitze, welcher vorher mit dem Sphärometer gemessen war, abgeleitet. Sämmtliche Curven haben ähn-

liche Form; sie sind parabolisch in der Nachbarschaft der Verengung und asymptotisch nach der x-Axe. Die Gleichung für sie wird aufgestellt. Das Integral, welches das Gewicht der Flüssigkeitssäule darstellt, lässt sich aber nicht berechnen.

Die specifische Cohäsion ist die Constante a^2 der allgemeinen Gleichung der Capillaritätsoberfläche

$$(1) \qquad 2y = a^2\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right) + c,$$

wie Professor Betti sie giebt. In ihr stellen R und R_1 die Radien der Hauptkrümmungen im Punkt (x, y) der Oberfläche dar und c eine Constante, welche in unserm Falle 0 ist. Die Krümmungsradien sind beim beobachteten Phänomen variabel. Im Allgemeinen kann man sie daher nicht bestimmen, wohl aber für die Stelle der stärksten Verengung. Indem man in Gleichung (1) die aus den Curven entnommenen Werthe substituirt, wird man für die Constante a^2 verschiedene Werthe für die verschiedenen Phasen erhalten. Dieses a^2 erreicht ein Maximum nahe einer gewissen Phase, welcher eine bestimmte Höhe der Flüssigkeitssäule entspricht. Als bemerkenswerth wird noch erwähnt, dass dieser Maximalwerth sehr nahe den mit ganz anderen Messungsmethoden von Gay-Lussac, Hagen, Quincke, Brunner gefundenen Werthen von a^2 ist. Der Verfasser hofft bald zahlreichere Experimente mit anderen Flüssigkeiten als Wasser machen zu können. Rs.

Capitel 2.

Akustik und Optik.

H. Franck. Ein Problem aus der Wellentheorie. Pr. Oldenburg.

Der Verfasser behandelt, ohne irgend welche neuen Gesichtspunkte aufzustellen, folgende elementare Uebungsaufgabe über

Zusammensetzung von Transversalschwingungen: Die vier Eckpunkte eines Quadrats bilden die Erregungsmittelpunkte von vier Kreiswellensystemen. Die Schwingungen finden nur senkrecht zur Ebene des Quadrats statt. Amplitude, Fortpflanzungsgeschwindigkeit und Wellenlänge sind für alle Systeme gleich; die vier Mittelpunkte sind in gleicher Phase. Gesucht wird die resultirende Bewegung eines beliebigen Punktes der Ebene, ferner die Bauch- und Knotenlinien, welche aus Geraden und Hyperbeln bestehen.

Wn.

J. Hagen. Ueber die Verwendung des Pendels zur graphischen Darstellung der Stimmgabelcurven. Schlömilch Z. XXIV. 285-304.

In mathematischer Hinsicht handelt es sich um die Aufgabe, die Curve zu bestimmen, die ein Punkt beschreibt, der nach zwei zu einander senkrechten Richtungen gleichzeitig Pendelbewegungen von sehr kleiner Amplitude ausführt. Die Componenten der Schwingungen seien

$$x = a\cos\frac{\pi(t-\alpha)}{A}, \quad y = b\cos\frac{\pi(t-\beta)}{B}.$$

Für den Fall $\beta = \alpha$ und $\beta-\alpha = \frac{B}{2}$ führt die Elimination von t auf algebraische Curven. Diese Elimination wird nach einem von Drach (Phil. Mag. XXXIV. 1849) angegebenen Verfahren folgendermassen ausgeführt. Man führe statt der Schwingungsdauer (A, B) die Schwingungszahlen n_a, n_b ein, die als ganze Zahlen vorausgesetzt werden. Dann nehmen für $\alpha = \beta$ die Componenten die Form an

$$x = a\cos(n_a.\mu), \quad y = b\cos(n_b.\mu).$$

Man entwickele $\cos(n_a.n_b.\mu)$ einmal nach Potenzen von $\cos(n_a.\mu$, das andere Mal nach Potenzen von $\cos(n_b.\mu)$; es sei also

$$\cos(n_a.n_b.\mu) = \Sigma A_i\cos^i(n_a.\mu) = \Sigma B_i\cos^i(n_b.\mu),$$

so ist

$$\Sigma A_i\left(\frac{x}{a}\right)^i = \Sigma B_i\left(\frac{y}{b}\right)^i$$

die Gleichung der Schwingungscurve. Aehnlich ist die Ableitung für $\beta - \alpha = \frac{B}{2}$. Einige specielle Fälle werden ausführlich discutirt. Die Resultate lassen sich ohne Weiteres anwenden auf ein Pendel, das aus zwei gleich langen Fäden *ac*, *bc* (mit den Aufhängepunkten *a*, *b*) besteht, die sich in *c* vereinigen, während der Pendelkörper mit *c* durch einen einfachen Faden verbunden ist. Wn.

H. Aron. Zur Theorie des Mikrophons. Pogg. Ann. (2) VI. 403-407.

Das Mikrophon beruht darauf, dass Vibrationen in demselben Aenderungen des Widerstandes hervorrufen; dadurch entstehen weiter Stromschwankungen, die man mittels eines Telephons wahrnimmt. Unter der Voraussetzung, dass die Widerstands- und Stromschwankungen (*w* und *i*) kleine Grössen sind, deren Quadrate zu vernachlässigen, ergiebt sich für *i* eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung, die sich für ein gegebenes *w* unmittelbar integriren lässt. Ist *w* eine gegebene periodische Function der Zeit, so hat *i* dieselbe Periode, aber andere Phase und Amplitude. Aus dem für letztere abgeleiteten Ausdruck folgt, dass, während beim Telephon die Klangfarbe erhöht, dieselbe beim Mikrophon vertieft wird. Durch eine Combination von Telephon und Mikrophon kann man erreichen, dass weder eine Aenderung der Phase, noch der Klangfarbe eintritt.

Wn.

F. Koláček. Ueber den Einfluss des den Schall leitenden Mediums auf in ihm schwingende Tonquellen. Pogg. Ann. (2) VII. 23-44.

Wenn eine Stimmgabel in einer Flüssigkeit statt in Luft schwingt, so erfährt sie bekanntlich eine Tonerniedrigung. Als Grund derselben nimmt der Verfasser den Widerstand an, den die vorwärts schwingende Stimmgabelzinke durch die Verdich-

tung vor ihr und die Verdünnung hinter ihr erfährt. Um diese Erklärung auch rechnend zu verfolgen, wird der einfache Fall behandelt, dass eine Kugel mit festem Mittelpunkte radiale Schwingungen in einer incompressiblen Flüssigkeit vollführt. Die Schwingungen der Flüssigkeit hängen, wenn φ das Geschwindigkeitspotential ist, von der bekannten Gleichung

$$(1) \qquad \frac{\partial^2(\varphi r)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2(\varphi r)}{\partial r^2}$$

ab. Die Randbedingung ist, wenn r_0 der Kugelradius im Ruhezustande, wenn ferner σ die radiale Verschiebung eines Oberflächenelements ist:

$$(2) \qquad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)_{r=r_0} = \frac{\partial \sigma}{\partial t}.$$

Für σ endlich gilt, wenn der Oberflächenpunkt durch die Elasticitätskraft $-k.\sigma$ in die Ruhelage zurückgeführt wird, die Gleichung

$$(3) \qquad m \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = -k.\sigma - p,$$

wobei p den Flüssigkeitsdruck, m die der Oberflächeneinheit entsprechende Masse der Kugel bezeichnet. Der Gleichung (1) wird bekanntlich genügt durch

$$\varphi = \frac{1}{r} F(r - r_0 - at),$$

und für F folgt aus (2) und (3), wenn letztere Gleichung noch nach t differentiirt wird, eine homogene lineare Differentialgleichung dritter Ordnung mit constanten Coefficienten. Das Problem hängt demnach von den Wurzeln einer gewissen Gleichung dritten Grades ab. Die Hauptaufgabe besteht dann in der Discussion dieser Gleichung und der angenäherten Berechnung ihrer Wurzeln.

Zum Schluss wird noch der Fall kurz behandelt, dass die Schwingungen von einer unveränderlichen Kugel erregt werden, die längs einer Geraden (x) translatorische Schwingungen macht. Man hat dann nur an Stelle des obigen Ausdrucks für φ zu setzen

$$\varphi = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left(\frac{1}{r} F(r - at)\right)$$

(cfr. Kirchhoff Mechanik, Vorles. 23), während an Stelle der Gleichungen (2) und (3) die folgenden treten:

$$\left[\frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}F(r-at)\right)}{\partial r^2}\right]_{r=r_0} = \frac{d\xi}{dt},$$

$$m\frac{d^2\xi}{dt^2} = -k.\xi + \int p\cos(nx)\,d\omega.$$

Dabei ist unter ξ die Entfernung der Kugel von der Masse m aus der Ruhelage zu verstehen, und das Integral über die Kugeloberfläche auszudehnen. Die gewöhnliche Differentialgleichung für F wird jetzt von der vierten Ordnung. Wn.

R. Glazebrook. An experimental determination of the values of the velocities of normal propagation of plane waves in different directions in a biaxal crystal, and a comparison of the results with theory. Phil. Trans. CLXX. 287-377.

Der Verfasser hat eine Reihe von Beobachtungen über die Brechung des ordentlichen und des ausserordentlichen Strahles an zwei Prismen aus Arragonit angestellt und diese Beobachtungen mit den Resultaten der verschiedenen Theorien der Brechung in zweiaxigen Krystallen verglichen. In der Green'schen und der Cauchy'schen Theorie enthält die Gleichung der Wellenfläche mehr Constante, als die drei Hauptbrechungsindices. Zur Bestimmung eines Hauptschnitts muss man daher mehr als drei Daten der Beobachtung entnehmen. Kennt man aber von vornherein mehr als drei Punkte eines Hauptschnitts, so lassen sich diese so legen, dass der Unterschied zwischen Theorie und Beobachtung ein verschwindender wird. Ausser den genannten Theorien giebt es zwei, in denen die Wellenfläche nur von drei Constanten abhängt, die Fresnel'sche Theorie und die von Lord Rayleigh (Phil. Mag. (4) XLI. 1871). Der Hauptunterschied zwischen beiden Theorien besteht darin, dass in der letzteren die Hauptschnitte aus einem Kreise und der inversen Curve einer

Ellipse bestehen, in der ersteren aus einem Kreise und einer Ellipse. Die obigen Beobachtungen stimmten nun mit der Rayleigh'schen Theorie gar nicht überein; aber auch die Resultate der Fresnel'schen Theorie zeigten merkliche Abweichungen von den Beobachtungen, wie aus einer bildlichen Darstellung der letzteren sofort zu erkennen ist. Cly. (Wn.)

W. Kohlrausch. Ueber die experimentelle Bestimmung von Lichtgeschwindigkeiten in Krystallen. Pogg. Ann. (2) VI. 86-116, VII. 427-435.

Der Verfasser prüft die Fresnel'sche Theorie der Doppelbrechung, indem er mittels des Totalreflectometers von F. Kohlrausch die Lichtgeschwindigkeiten in verschiedenen Richtungen einer Krystallfläche direct misst, und so experimentell Schnitte der Wellenfläche bestimmt. Eine grosse Zahl von Messungen führt zu dem Resultat, dass die Fresnel'sche Theorie, soweit es die Form der Wellenfläche betrifft, mit den Beobachtungen durchweg in Einklang ist. In mathematischer Beziehung enthält die Arbeit nur eine Zusammenstellung bekannter Formeln, resp. einfache Umformungen solcher. Wn.

O. Böklen. Ueber die Wellenfläche zweiaxiger Krystalle. Schlömilch Z. XXIV. 400-405.

Es wird die bekannte Construction der Wellenfläche, sowie auch ihrer Reciproken, als Apsidalfläche abgeleitet. Daran schliesst sich die Betrachtung der sphärischen Kegelschnitte, in welchen die Wellenfläche von concentrischen Kugeln geschnitten wird. Im Wesentlichen stellt der Verfasser nur bekannte Resultate anders dar. Neu dürfte vielleicht der folgende Satz sein: Zwei Paare sich rechtwinklig schneidender Kegel, deren Focallinien die secundären optischen Axen sind, schneiden aus einem Mantel der Wellenfläche ein Viereck aus, in welchem die Entfernungen von je zwei Gegenecken einander gleich sind.

Wn.

F. F. Fitzgerald. On the electromagnetic theory of the reflection and refraction of light. (Abstract). Proc. of London XXVIII. 236-238.

Die Medien, an deren Oberflächen Reflexion und Brechung stattfinden soll, werden als Nichtleiter der Elektricität angesehen, die aber zugleich einer magnetischen Polarisation fähig sind, und zwar soll in Bezug auf die magnetische Induction Isotropie stattfinden. Im ersten Theile wird nur die elektrische Induction betrachtet, und hier wird das betrachtete Medium als nicht isotrop angesehen, so dass die Resultate der Theorie auch für die Reflexion und Brechung an Krystallflächen gelten. Der Verfasser geht von den Ausdrücken aus, die J. Clerk Maxwell in seinem Buche „Electricity and magnetism" für die elektrostatische und elektrokinetische Energie eines solchen Mediums gegeben haben, und bringt diese Ausdrücke in dieselbe Form, die von McCullagh für die potentielle und kinetische Energie des Aethers aufgestellt ist (vergl. McCullagh: Essay towards a dynamical theory of crystalline reflection and refraction, Trans. of Dublin XXI.) Aus diesen Ausdrücken folgen für die gebrochene und reflectirte Welle dieselben Resultate, die schon McCullagh gefunden; und zwar werden dieselben hier sowohl mittels der Quaternionen, als nebenbei in cartesischen Coordinaten abgeleitet. Der zweite Theil der Arbeit behandelt die Reflexion an der Oberfläche eines magnetischen Mediums, wobei wieder Maxwell's Ausdruck für die kinetische Energie eines solchen Mediums den Ausgangspunkt bildet. Aus den so abgeleiteten Bedingungen für die Oberfläche werden weitere Folgerungen gezogen, hinsichtlich deren auf die Arbeit selbst verwiesen werden muss.

Cly. (Wn.)

E. Ketteler. Zur Theorie der doppelten Brechung; Gleichberechtigung des Strahls und der Normalen als Ausgangsbegriffes. Pogg. Ann. (2) VII. 94-107.

E. Ketteler. Ueber den Uebergang des Lichtes zwischen absorbirenden isotropen und anisotropen Mitteln und

über die Mechanik der Schwingungen in denselben. Pogg. Ann. (2) VII. 107-130.

E. Ketteler. Das Dispersionsgesetz. Pogg. Ann. (2) VII. 658-670.

E. Ketteler. Theorie der absorbirenden anisotropen Mittel. Berl. Monatsber. 1879. 879-920.

Der Verfasser setzt in diesen Aufsätzen seine früheren Untersuchungen über die Refraction und Absorption des Lichtes auf Grundlage der Annahme des Zusammenschwingens der Aether- und Körpertheilchen (cf. F. d. M. VIII. 1876. 652, IX. 1877. 715, X. 1878. 697) fort und bringt sie in dem letzten Aufsatz zu einem gewissen Abschluss. Speciell spricht er die von ihm behandelte Aufgabe folgendermassen aus: Gegeben seien zwei Prismen, die aus irgend welchen trichoitischen und zugleich mit Dispersion der Axen begabten Krystallen beliebig hergestellt sind; beide seien mit einander zu einer beliebig orientirten Combination verbunden. Es sollen dann sämmtliche einem beliebigen Einfallswinkel entsprechende äussere und innere Wellen construirt, die zugehörigen Refractions- und Extinctionscoefficienten für alle Farben bestimmt und endlich die Amplituden und Phasen aller dieser Wellen berechnet werden. Dabei wird vorausgesetzt, 1) dass der intermolekulare Krystalläther sich weder nach Elasticität noch nach Dichtigkeit, noch überhaupt nach Anordnung der Theilchen vom Weltäther unterscheidet, dass er also vor Allem incompressibel ist, 2) dass Aether- und Körpertheilchen, mögen ihre Bahnen geradlinig oder elliptisch sein, stets parallel schwingen. Letztere Voraussetzung, die dem Verfasser jetzt als die natürlichere und mit der Incompressibilität des Aethers einzig verträgliche erscheint, hat derselbe früher nicht gemacht, und dadurch vorzugsweise werden die Resultate und die Behandlung der Aufgabe andere, als in früheren Arbeiten des Verfassers. Die Resultate lassen sich bei der wenig übersichtlichen Darstellung des Verfassers, über die sich Referent schon im vorigen Jahresbericht ausgesprochen (F. d. M. X. 1878. p. 697), nicht in Kürze wiedergeben; es muss in dieser Hinsicht auf die Arbeiten selbst verwiesen

werden. Bemerkt mag noch werden, dass für den Uebergang des Lichtes von einem Medium in's andere wiederum zum Theil andere Grenzbedingungen aufgestellt werden, als in der vorjährigen, oben citirten Arbeit des Verfassers. Wn.

E. LOMMEL. Ueber eine zweiconstantige Dispersionsformel. Pogg. Ann. (2) VIII. 628-634.

Im vorigen Jahre ist über drei grössere Arbeiten des Verfassers, in denen die Umrisse einer Theorie des Lichtes skizzirt waren, ausführlich referirt (cfr. F. d. M. X. 1878. p. 692-696). Eine dort abgeleitete Dispersionsformel wird hier (unter gewissen Vernachlässigungen) auf die einfache Form gebracht:

$$n^2-1=\frac{a}{1-\frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}},$$

wo die Constante λ_0 die Wellenlänge des Absorptionsmaximums ist. Von dieser Formel wird dann gezeigt, dass sie die Beobachtungen mindestens ebenso gut darstellt wie die Christoffel'sche Formel. Wn.

E. HAGENBACH. Das Stokes'sche Gesetz. Pogg. Ann. (2) VIII. 369-400.

In der wesentlich experimentellen Arbeit sind einige mathematische Betrachtungen enthalten, die sich auf die Intensität des Fluorescenzlichtes beziehen. Dem Verfasser ist es hauptsächlich darum zu thun, einige der früher von Lommel abgeleiteten Resultate (cf. F. d. M. IX. 1877. p. 721) zu widerlegen. Er legt zu dem Zwecke, ohne vorläufig auf die Aenderung der Leuchtkraft je nach der Art der Bestrahlung Rücksicht zu nehmen, für das von einer durch Fluorescenz leuchtenden Fläche ausgestrahlte Licht das Lambert'sche Gesetz zu Grunde und kommt durch einfache Betrachtungen zu dem Resultat, dass die Stellung des Beobachtungsapparats zu dem fluorescirenden Körper ohne wesentlichen Einfluss auf die Lichtstärke im Apparate ist. Dies Resul-

tat gilt allerdings nur, wenn die leuchtende Fläche den Oeffnungswinkel des Apparats ganz ausfüllt. Weiter wird der Einfluss der Beleuchtungsart auf die Menge und Farbenmischung des Fluorescenzlichtes erörtert. Die mathematischen Betrachtungen gestalten sich viel elementarer, als bei Lommel, da die Entfernung der fluorescirenden Fläche nach dem Obigen nicht mehr in Frage kommt. Uebrigens wird hier sowohl der Fall behandelt, dass das auffallende Licht in der Beleuchtungsrichtung ausgestrahlt wird, als (wie bei Soret's fluorescirendem Ocular) in der entgegengesetzten. Wn.

M. Lamansky. On Stokes' law. Phil. Mag. (5) VIII. 25-30.

Die Arbeit enthält eine experimentelle Bestätigung des von Stokes entdeckten Gesetzes, dass die Brechbarkeit des bei Fluorescenz ausgestrahlten Lichtes kleiner ist, als die der erregenden Strahlen. Csy. (O.)

E. Lommel. Ueber die Newton'schen Staubringe. Pogg. Ann. (2) VIII. 193-244.

Der Verfasser ist durch Angriffe, die Herr Exner gegen seine Anschauungen gerichtet hat (cfr. F. d. M. X. 1878. p. 718), veranlasst worden, auf einen Gegenstand, den er in einer früheren Arbeit schon einmal behandelt hatte (cfr. F. d. M. VIII. 1876. p. 660) ausführlicher zurückzukommen. Nachdem er die Versuchsresultate kurz auseinander gesetzt, bespricht er die beiden zur Erklärung aufgestellten Theorien; die ältere „Diffusionstheorie", welche annimmt, dass die Ringe durch Interferenz der vor und nach der Spiegelung an demselben Staubtheilchen diffus reflectirten Strahlen entstehen, und die „Beugungstheorie", welche annimmt, dass die Erscheinung verursacht werde durch Interferenz der vor und nach der Reflexion durch die Staubschicht gebeugten Strahlen. Von der Diffusionstheorie wird gezeigt, dass sie von den Thatsachen keine Rechenschaft zu geben vermag, während die Beugungstheorie die Erscheinungen vollständig erklärt. In der

letzteren Theorie betrachtet man die bestäubte Fläche als einen beugenden Schirm, der vor einen Spiegel gestellt ist; statt dessen kann man annehmen, dass keine Reflexion stattfindet und das Licht durch zwei Schirme, von denen der eine das Spiegelbild des andern ist, hinter einander hindurchgeht. Alsdann interferiren sämmtliche am ersten Schirme gebeugte Strahlen, welche in einem Punkte der Bildfläche zusammentreffen, mit allen am zweiten Schirme gebeugten Strahlen, welche in demselben Bildpunkte vereinigt werden. Die aus dem Zusammenwirken der genannten Strahlen resultirende Intensität ergiebt sich auf bekannte Weise in Form der Summe zweier Doppelintegrale. Für den hier betrachteten Fall, wo der Schirm aus einzelnen Staubtheilchen besteht, die durch verhältnismässig grosse freie Zwischenräume getrennt sind, sind die Grenzen dieser Integrale unter sich gleich und unabhängig von der Einfalls- und Beugungsrichtung. Jedes der Integrale ist zu erstrecken über die gemeinschaftliche orthogonale Projection der beiden Schirme auf die Spiegelebene. Es wird dann gezeigt, dass man an Stelle der Resultante aller an einem der Schirme gebeugten Strahlen, was die Phase betrifft, nur einen einzigen Elementarstrahl zu betrachten braucht, und zwar denjenigen, der durch den Schwerpunkt des Schirmes geht. Man hat demnach schliesslich einen Intensitätsausdruck, der durch Zusammenwirken zweier einzelner Strahlen entsteht, und aus dessen Discussion ergeben sich die Erscheinungen, sowohl wenn die bestäubte Platte der Spiegelebene parallel ist, als wenn sie schief zu ihr steht. Wn.

H. F. Weber. Die wahre Theorie der Fresnel'schen Interferenzerscheinungen. Pogg. Ann. (2) VIII. 407-444, Wolf Z XXIV. 39-76.

Die Theorie der Fresnel'schen Interferenzstreifen entspricht in vielen ihrer Folgerungen nicht den wirklichen Erscheinungen. Den Grund dafür findet der Verfasser in Fresnel's ohne jede weitere Begründung gemachten Annahme, dass in seinen Interferenzerscheinungen keine Diffractionswirkungen vorkommen.

Diese Annahme sei unrichtig. Die Fresnel'schen Interferenzerscheinungen seien vielmehr ebenso reine Diffractionserscheinungen, wie die Young'schen; die ersteren würden durch die Combination zweier innerer Diffractionsfransensysteme hervorgebracht, während die letzteren aus dem Zusammenwirken zweier äusserer Diffractionsfransensysteme resultiren. Der Verfasser geht daher, um eine exacte Theorie der Fresnel'schen Interferenzerscheinungen zu entwickeln, auf die Berechnung der Interferenz der von sämmtlichen Punkten der Spiegel (resp. des Doppelprismas) ausgehenden Elementarstrahlen zurück. Um einen bestimmten Fall zu haben, wird das Fresnel'sche Doppelprisma betrachtet. Von einer punktförmigen Lichtquelle, die in Bezug auf das Doppelprisma symmetrisch liegt, gehe eine sphärische Wellenfläche aus. Nach dem Durchgang durch das Prisma tritt dieselbe in Form zweier gleicher, rechteckig begrenzter sphärischer Wellenflächen mit verschiedenen Mittelpunkten hervor. Die auf diesen beiden sphärischen Wellenflächen gelegenen Aethertheilchen haben in jedem Zeitmoment übereinstimmende Bewegungszustände. Nach dem Huygens'schen Princip wird dann die Lichtintensität bestimmt, die durch das Zusammenwirken der von den genannten beiden Wellenflächen ausgehenden Oscillationen in irgend einem Punkte des Raumes hervorgerufen wird. Mit Beschränkung auf entfernte Punkte und auf grosse Radien der sphärischen Wellen lässt sich die zur Bestimmung der Lichtintensität führende Rechnung ganz in der Weise durchführen, wie es bei andern Aufgaben der Diffractionstheorie geschieht. Diese Bestimmung führt auf Doppelintegrale, die sich durch Produkte der Fresnel'schen Integrale

$$\int \cos(mu^2)\, du, \quad \int \sin(mu^2)\, du$$

darstellen lassen. Diese Integrale lassen sich auf folgende Functionen zurückführen:

$$J_{(x)}^{(h)} = \int_0^\pi \cos(h\varphi - x\sin\varphi)\, d\varphi,$$

$$E_{(x)}^{(h)} = \int_0^\pi \sin(h\varphi - x\sin\varphi)\, d\varphi.$$

Ist h eine ganze Zahl, so ist J die gewöhnliche Bessel'sche Function; für beliebige h können diese Functionen als verallgemeinerte Bessel'sche Functionen bezeichnet werden. Von denselben gelten Formeln, welche bekannten Formeln aus der Theorie der Bessel'schen Functionen analog sind. So lässt sich $J_{(x)}^{(h)}$ durch die stets convergente Reihe darstellen

$$J_{(x)}^{(h)} = \frac{\sin(h\pi)}{h}\left\{1 + \frac{x^2}{h^2-2^2} + \frac{x^4}{(h^2-2^2)(h^2-4^2)} + \cdots\right\}$$
$$- \sin(h\pi)\left\{\frac{x}{h^2-1^2} + \frac{x^3}{(h^2-1^2)(h^2-3^2)} + \cdots\right\};$$

in $E_{(x)}^{(h)}$ sind nur die Factoren der beiden Reihen andere. Ferner existiren für diese Functionen auch semiconvergente Reihen; es gelten für sie Recursionsformeln ähnlich denen der Bessel'schen Functionen, endlich genügen sie gewissen Differentialgleichungen. Der früher aufgestellte Ausdruck für die Lichtintensität lässt sich durch die Functionen J und E, deren Index $h = \frac{1}{2}$ ist, vereinfachen. Dabei ergiebt sich noch, dass die obenerwähnten Fresnel'schen Integrale, wenn ihre untere Grenze $= 0$ ist, während die obere so gross ist, dass $\frac{1}{\sqrt{mu^2}}$ gegen 1 verschwindend klein ist, den Werth $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2m}}$ annehmen. Der Helligkeitsausdruck wird nunmehr genauer discutirt, die Lage der Maxima und Minima bestimmt, etc. Es zeigt sich dabei eine vollkommene Uebereinstimmung zwischen den Resultaten der Theorie und den beobachteten Erscheinungen. Namentlich ergiebt sich auch, dass die Intensität nur innerhalb eines gewissen Raumes eine oscillirende, ausserhalb desselben eine constante ist, ein Factum, das in Fresnel's Helligkeitsausdruck nicht enthalten ist. Eines allerdings vermisst Referent an der Arbeit. Strahlen, die von einem Punkte ausgehen, erscheinen nach der Brechung durch ein Prisma nicht mehr als von einem Punkte ausgehend. Die aus dem Prisma austretende Wellenfläche ist daher nicht mehr streng ein Theil einer Kugelfläche. Eine Erörterung des Einflusses, den dieser Umstand auf die Interferenzerscheinungen hat, resp.

der Nachweis, dass dieser Einfluss nur ein verschwindend geringer, wäre erwünscht gewesen. Wn.

J. Fröhlich. Die Bedeutung des Princips der Erhaltung der Energie in der Diffractionstheorie. Pogg. Ann. (2) VI. 414-431.

J. Fröhlich. Berichtigung zu obiger Abhandlung. Pogg. Ann. (2) VIII. 670-671.

Fortsetzung einer Arbeit, über die schon im vorigen Jahre berichtet ist (F. d. M. X. 1878. p. 705). Der Verfasser wendet das Princip der Energie, nach dem die auf den Beobachtungsschirm fallende gesammte Bewegungsenergie der Lichtbewegung gleich der gesammten Energie der durch die leuchtende Oeffnung dringenden Lichtbewegung ist, an zur Berechnung der Intensität in den verschiedenen Punkten eines durch eine parallelogrammförmige Oeffnung entstehenden Beugungsbildes für den Fall, dass die Lichtstrahlen schief auf die Oeffnung fallen. Sodann werden zwei solche Oeffnungen betrachtet und auch hier, sowie für mehr als zwei Oeffnungen gezeigt, dass die Fresnel'sche Art der Zusammensetzung einfacher Schwingungen mit dem Princip der Energie in Uebereinstimmung ist. Weiter wird das Verhältnis der hier benutzten Methode zur Elasticitätstheorie erörtert. Der Verfasser theilt eine Stelle aus einem von Herrn G. Kirchhoff an ihn gerichteten Briefe mit, wonach das Princip der Energie in der hier aufgestellten Form nur eine Anwendung des folgenden Satzes ist: „Eine beliebig geschlossene Fläche begrenze vollständig einen Raum, in dem die Differentialgleichungen der Elasticität gelten. Dann ist die Arbeit, welche die auf die Elemente dieser Fläche wirkenden elastischen Druckkräfte in der Zeit einer Schwingung leisten, gleich Null.“ Und dieser Satz selbst ist nichts als ein specieller Fall des Satzes von der lebendigen Kraft. Für den eben genannten Satz giebt Herr Fröhlich noch eine Ableitung. Wn.

C. S. PEIRCE. On the ghosts in Rutherfurd's diffraction-spectra. Am. J. II. 330-348.

Der Verfasser untersucht, welchen Einfluss kleine periodische Unregelmässigkeiten eines Gitters auf die durch dasselbe hervorgerufenen Beugungserscheinungen bei parallel auffallendem Lichte haben. Die Unregelmässigkeiten seien derart, dass die beiden Grenzen der r^{ten} Oeffnung von einer festen Linie die Abstände haben

$$(r-\tfrac{1}{2}\alpha)w+e\sin(r\theta-\tfrac{1}{2}\theta),\ \text{resp.}\ (r+\tfrac{1}{2}\alpha)w+e\sin(r\theta+\tfrac{1}{2}\theta).$$

Dann ergiebt sich das Resultat, dass die Lage des Hauptspectrums nicht geändert wird, dass ferner in den Nebenspectren die Abstände zwischen den auf einander folgenden Fraunhofer'schen Linien nur eine ganz geringe Aenderung erfahren. Die Ableitung des Resultats geschieht auf dem gewöhnlichen Wege; die Maxima der Intensität werden durch ein Näherungsverfahren bestimmt. Die im Laufe der Rechnung vorkommende Entwickelung von $\cos(\alpha\sin x)$ und $\sin(\alpha\sin x)$ in eine nach Cosinus, resp. nach Sinus der Vielfachen von x fortschreitende Reihe, ist, was der Verfasser nicht erwähnt, längst bekannt. Wn.

W. BUNKOFER. Analytische Untersuchung der durch eine kleine dreieckige Oeffnung erzeugten Beugungserscheinung bei parallel einfallenden Strahlen. Pr. Bruchsal.

Man kann den Aufsatz als eine sorgfältige Ausarbeitung eines bekannten Problems bezeichnen. Neues bietet die Behandlung weder hinsichtlich der Methode, noch der Resultate.

Wn.

A. SCHMIDT. Die Wellenfläche eines nicht homogenen isotropen Mittels. Schlömilch Z. XXIV. 60-62.

Ein Medium sei so beschaffen, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Welle sich von Punkt zu Punkt ändert,

also eine gegebene Function des Ortes ist. Es soll bestimmt werden, welche Aenderung eine zur Zeit $t = 0$ gegebene Wellenfläche bei ihrem Fortschreiten erleidet. Für den allgemeinen Fall wird die partielle Differentialgleichung aufgestellt, von der das Problem abhängt. Falls die Fortpflanzungsgeschwindigkeit eine lineare Function einer Coordinate ist, ist die Wellenfläche der vom Anfangspunkte ausgehenden Wellen eine Kugel, deren Mittelpunkt auf der oben erwähnten Coordinatenaxe fortschreitet. Einige Sätze über die Ausbreitung von Wellen in einem derartigen Medium werden ohne Beweis mitgetheilt. Wn.

H. v. Jettmar. Bestimmung der Bildorte und Wellenform der an ebenen Flächen reflectirten und gebrochenen Lichtstrahlen auf elementarem Wege. Pr. Marburg.

Die bekannten Resultate, dass die von einem leuchtenden Punkte ausgehenden Strahlen nach der Brechung an einer geraden Linie (falls man die Betrachtung auf eine Ebene beschränkt) die Evolute einer Ellipse oder Hyperbel umhüllen, dass ferner die Wellenfläche der gebrochenen Strahlen eine Parallelcurve zur Ellipse oder Hyperbel ist, werden auf elementarem Wege abgeleitet; die Gestalt der Wellenfläche wird auf wenig elegante Weise ausführlich discutirt. In einem Anhang wird dieselbe Betrachtung für Strahlen durchgeführt, die durch eine planparallele Platte gegangen sind. Wn.

P. Zech. Durchgang eines dünnen Strahlenbündels durch ein Prisma. Schlömilch Z. XXIV. 168-180.

Der Verfasser hatte in einer früheren Arbeit (cf. F. d. M. IV. 1872. p. 413) die Eigenschaften dünner Strahlenbündel durch Betrachtung affiner ebener Systeme abgeleitet. Diese Betrachtungen sind aber nur dann anwendbar, wenn die Brennlinien parallel den Grundebenen sind, und insofern sind die dort mitgetheilten Resultate nur von beschränkter Gültigkeit. Um diese

Beschränkung aufzuheben, wird hier das allgemeinste Strahlenbündel untersucht, welches durch seine Axen und irgend zwei diese Axen schneidende Gerade als Brennlinien bestimmt ist, wobei noch eine unendlich kleine Curve als Leitlinie gegeben ist, deren Mittelpunkt auf der Axe liegt. An Stelle der affinen Beziehung ebener Systeme tritt hier eine andere, allgemeinere Beziehung zweier Ebenen, die von Steiner in seinen „systematischen Entwickelungen" (p. 253 ff.) betrachtet ist. Daraus ergiebt sich, dass, wenn man nur die Brennpunkte finden will, die Richtung der Brennlinien beliebig ist. Man erhält immer wieder, bis auf unendlich kleine Grössen, dieselben Brennpunkte. Man kann daher von der Form des Querschnitts absehen und braucht nur drei Strahlen des Bündels zu kennen, genau wie in der früheren Arbeit.

Nachdem dann weiter zwei Hülfssätze für die Brechung an einer Ebene aufgestellt sind, deren erster eine bekannte Construction des gebrochenen Strahles wiederholt, während sich der zweite auf die Lage zweier unendlich naher gebrochener Strahlen bezieht, wird der Durchgang eines Strahlenbündels durch ein Prisma für den verallgemeinerten Fall, wo die Axe nicht senkrecht zur brechenden Kante ist, im Einzelnen verfolgt; es wird die Construction der Brennpunkte des austretenden Strahles angegeben etc. Eine Discussion der so gewonnenen Resultate schliesst die Arbeit. Wn.

Thollon. Minimum de dispersion des prismes; achromatisme de deux lentilles de même substance.
C. R. LXXXIX. 93-96.

Der Verfasser untersucht die Abhängigkeit der Dispersion eines Prismas vom Einfallswinkel. Ist i der Einfalls-, r der zugehörige Brechungswinkel, i_1 der Einfallswinkel an der zweiten Prismenfläche (also im Innern des Prismas), r_1 der Austrittswinkel, A der Prismenwinkel, so ergiebt sich sofort

$$dr_1 = \frac{\sin A}{\cos r \, . \, \cos r_1} dn,$$

wenn n der Brechungsquotient ist. Die Grösse dr_1 repräsentirt die Elementardispersion. Dieselbe und mit ihr die ganze Dispersion ist ein Minimum, wenn $\cos r.\cos r_1$ ein Maximum ist, und dies findet angenähert statt, wenn

$$r = n^2 i_1 = n^2(A-r_1).$$

Es folgen einige kurze Bemerkungen über Anwendungen solcher Prismen, in denen ein Strahl die geringste Dispersion erfährt. Wn.

L. Matthiessen. Die Differentialgleichungen der Dioptrik continuirlich geschichteter Linsen und ihre Anwendung auf die Dioptrik der Krystalllinse. Schlömilch Z. XXIV. 304-316.

Der Verfasser stellt hier zum ersten Male Formeln für solche Linsen auf, bei denen sich Brechungsexponent und Krümmungsradius continuirlich von einem Punkte der Axe zum folgenden ändern. Er geht zu dem Zwecke von den bekannten Formeln für die Berechnung der Cardinalpunkte eines aus einer bestimmten Zahl von centrirten Kugelflächen bestehenden Systems aus und nimmt dann an, dass zu dem System eine neue, unendlich nahe brechende Fläche hinzutritt. Indem er die bekannten Formeln auch auf das neue System anwendet und entwickelt, gelangt er zu Differentialgleichungen erster Ordnung, von denen er zeigt, wie sie zur successiven angenäherten Berechnung der Cardinalpunkte eines „continuirlich geschichteten" Systems dienen können. Die Formeln werden dann speciell auf die Krystalllinse angewandt, wobei über die Aenderung des Brechungsexponenten und des Krümmungsradius specielle Annahmen gemacht werden. In Bezug auf die Einzelnheiten müssen wir auf die Arbeit selbst verweisen. Wn.

R. Pendlebury. Notes on optics. Messenger (2) IX. 26-30.

Der Verfasser zeigt, dass die Punkte, die in den gewöhnlichen englischen Lehrbüchern für den Fall einer einzelnen Linse

als Focalcentren bezeichnet werden, die Gauss'schen Hauptpunkte sind. Nach derselben Methode leitet er dann die Lage der Hauptpunkte im allgemeinsten Falle ab, d. h. für eine Reihe von brechenden sphärischen Flächen mit derselben Axe. Der letzte Theil der Arbeit behandelt die Bedingungen, unter denen ein System von Linsen achromatisch ist. Glr. (Wn.)

T. de Regnon. De la réfraction à travers les lentilles sphériques épaisses. Ann. Soc. scient. Brux. III. B. 181-206.

Herr Bertin hat in einer Arbeit (Ann. d. Chim. et Phys. XIII. 476, s. F. d. M. X. 1878. p. 710) gezeigt, wie man mittels einer einfachen Methode die Theorie der Refraction in dicken Linsen behandeln kann. Der Verfasser der vorliegenden Arbeit führt, indem er diese Untersuchung in die elementare Optik einführt, die Frage dicker Linsen auf einige bekannte Sätze zurück. Er behandelt nach einander den Fall einer ganz in einem oder in zwei verschiedenen Mitteln befindlichen Linse, wenn der leuchtende Punkt auf der Hauptaxe oder ausserhalb derselben liegt. Mn. (O.)

Cramer. Ueber ein stereoskopisches Ocular. Wolf Z. XXIV. 95-105.

Das Referat erfolgt im nächsten Bande. Wn.

Macé de Lépinay. Théorie des télescopes Grégory et Cassegrain. Nouv. Ann. (2) XVIII. 256-260.

Der Verfasser zeigt, wie sich die Theorie der beiden im Titel genannten, aus je zwei sphärischen Spiegeln bestehenden Reflectoren sehr einfach gestaltet, wenn man die bekannte Relation $\varphi \cdot \varphi' = f^2$ zu Grunde legt. Wn.

E. Hess. Ueber ein Problem der Katoptrik. Marb. Ber. 1879. 7-20.

Siehe Abschn. VIII. Cap. 2. p. 366.

Capitel 3.

Elektricität und Magnetismus.

H. Helmholtz. Studien über elektrische Grenzschichten. Pogg. Ann. (2) VII. 337-382, Berl. Monatsber. 1879. 198-200.

Wenn sich zwei Körper berühren und in Folge dessen elektrisch geladen werden, so dass das Potential verschiedene Werthe auf dem einen und anderen Körper zeigt, so folgt bei dem gegenwärtigen Stande der Elektricitätstheorie, dass sich an der Berührungsfläche eine elektrische Doppelschicht bildet. Das Product der Dichtigkeit der positiven Elektricität mit dem Abstand der beiden Schichten bezeichnet der Verfasser als das elektrische Moment der Schicht. Der Abstand der Schichten ist als klein, aber nicht als unendlich klein anzusehen, da sonst die zu ihrer Bildung aufgewandte Arbeit einen unendlich grossen Werth haben müsste. Diese bisher schon für diejenigen Körper, welche durch Contact elektrisch werden, allgemein gemachte Annahme erweitert der Verfasser dahin, dass er die Bildung solcher Doppelschichten bei der Berührung zweier beliebiger Körper annimmt. Es lässt sich daraus zunächst die Elektricitätserregung durch Reibung erklären. Hauptsächlich aber verwendet der Verfasser die zu Grunde gelegte Anschauung zur Erklärung zweier in nahem Zusammenhang stehender Phänomene: der Fortführung von Flüssigkeiten durch enge Röhren in Folge des Durchgangs eines elektrischen Stromes durch dieselben, und der Entstehung elektromotorischer Kräfte, wenn Flüssigkeiten durch hydrostatischen Druck durch solche Röhren getrieben werden.

Die Flüssigkeit befinde sich in einer engen Glasröhre. An der Berührungsfläche beider Körper entsteht dann die Doppelschicht; ε sei die Dichtigkeit des in der Flüssigkeit liegenden Theils. Geht ein constanter elektrischer Strom durch die Röhre, so ist das entsprechende Potential φ eine lineare Function von x (die x-Axe fällt mit der Röhrenaxe zusammen). Es entsteht daher eine auf die Schicht ε wirkende Kraft in der Richtung

der Axe

$$-\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{J \,.\, \sigma}{Q},$$

wo J die Stromstärke, σ den specifischen Widerstand der Flüssigkeit, Q den Querschnitt der Röhre bedeuten. Die Bewegung der Flüssigkeit wird dann gemäss der partiellen Differentialgleichung

$$X - \frac{\partial p}{\partial x} = -k^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

erfolgen, wo p der Druck, u die Geschwindigkeit, k^2 die Reibungsconstante der Flüssigkeit ist. Die Berechnung von u, sowie der ganzen Flüssigkeitsmenge, welche durch den Querschnitt strömt, bietet keine Schwierigkeit. Wird in Folge des Flüssigkeitsstromes auf der einen Seite der Röhre der Druck vergrössert, so tritt nach einiger Zeit ein Gleichgewichtszustand ein, bei welchem die beschleunigende Kraft der Elektricität und der hydrostatische Druck gleich sind. In diesem Fall gilt die Formel

$$\frac{\pi R^2}{2} \cdot P = A(\varphi_i - \varphi_a).$$

Hier bedeuten P den Druck, R den Radius der Röhre, A die elektromotorische Kraft, φ_i und φ_a die Werthe des Potentials im Innern der Röhre und an der Grenze. Aus Versuchen von Quincke und G. Wiedemann lässt sich die Potentialdifferenz $\varphi_i - \varphi_a$ berechnen; sie beträgt stets 1 bis 4 Daniells. Von speciell mathematischem Interesse ist hierbei die Behandlung des Falles, dass ein feiner Glasfaden in der Röhre liegt, die Flüssigkeit also zwischen zwei excentrischen Cylindern sich bewegt.

Wird umgekehrt die Flüssigkeit durch Druck fortgetrieben, so treten die geladenen Grenzschichten in eine ausgedehntere Flüssigkeitsmasse: ihre Elektricität wird frei, während an der Eintrittsstelle der Flüssigkeit stets neue Schichten geladen werden müssen, dort also die entgegengesetzte Elektricität im freien Zustand auftritt. Für die unter dem Druck P strömende Flüssigkeit ergiebt sich dann durch einfache Rechnung die elektromotorische Kraft:

$$A = \frac{\sigma \,.\, P}{4 \pi k^2} (\varphi_i - \varphi_a).$$

Die beschriebenen Vorgänge beziehen sich auf Capillarröhren, bei welchen das Poiseuille'sche Strömungsgesetz gilt. Bei weiteren Röhren kommen an der Stelle, wo der Strom eintritt, complicirtere Bewegungserscheinungen vor, welche zum Schluss noch besondere Berücksichtigung finden. Ok.

G. Mehler. Zur Theorie der Vertheilung der Elektricität in leitenden Körpern. Pr. Elbing. Berlin. J. Dräger.

Der Verfasser giebt eine neue und eigenthümliche Behandlung des Problems der Vertheilung auf zwei leitenden Kugeln, welche sich gegenseitig influenciren, unter der Voraussetzung, dass die äusseren Kräfte symmetrisch um die Centrale der beiden Kugeln herum vertheilt sind. Nimmt man letztere als x-Axe, setzt man ferner

$$\eta = +\sqrt{y^2+z^2},\quad z_1 = x_1 + i\eta_1 \text{ und } R = \sqrt{(z_1-x-i\eta)(z_1-x+i\eta)},$$

so wird zunächst die Bedeutung der Function

$$v = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z_1)\,dz_1}{R}$$

näher untersucht. Die Integration bezieht sich auf eine geschlossene Curve, welche in einer durch die x-Axe gehenden Ebene symmetrisch zu letzterer liegt. Es zeigt sich, dass das Integral alle Eigenschaften des Potentials einer mit Elektricität belegten Rotationsfläche in Bezug auf einen äusseren Punkt x, y, z besitzt, welche entsteht, wenn die betreffende Curve um die x-Axe rotirt. Durch einen ähnlichen Ausdruck kann man das Potential für einen inneren Punkt darstellen. Als Integrationscurve werden dann zwei concentrische Kreise genommen, so dass das System der influencirten Flächen aus zwei concentrischen Kugelschalen besteht. Nachdem für dieselben die Potentialausdrücke in der oben angegebenen Form aufgestellt worden sind, zunächst für den einfachen Fall, dass dieselben Werthe auf den Kugeloberflächen haben, welche den reciproken Entfernungen eines zwischen ihnen liegenden Punktes gleich sind, wird dieses Resultat durch die Methode der reciproken Radien vectoren

auf den Fall erweitert, dass die Kugelschalen nicht concentrisch sind. Schliesslich wird von äusseren Kräften abgesehen, und es werden die Dichtigkeiten berechnet, wenn die Potentiale der einen und anderen Kugel constante Werthe haben, wobei der Fall zweier sich berührender Kugeln noch einer besonderen Discussion bedarf. Die in den erhaltenen Formeln vorkommenden bestimmten Integrale werden dann in Reihenentwickelungen umgewandelt, welche zum Theil mit den auf anderem Wege schon früher von C. Neumann gefundenen Reihen übereinstimmen.

Ok.

J. Delsaux. Sur une propriété des surfaces du second degré dans la théorie de l'électricité statique. Ann. Soc. scient. Brux. III. B. 213-220.

P. Gilbert. Rapport sur ce mémoire. Ann. Soc. scient. Brux. III. A. 80-81.

Wenn man einen isolirten Körper mit Elektricität ladet, so ist die Resultante aller Wirkungen der Elemente der Oberfläche auf einen innern Punkt Null, wo auch der Punkt liege. Ist ferner der Körper ein Ellipsoid, so sind die elementaren Wirkungen der Oberfläche auf einen Punkt, gelegen auf der Geraden, die zwei Elemente verbindet, gleich und von entgegengesetztem Zeichen. Der Verfasser zeigt, dass diese letztere Eigenschaft nur dem Ellipsoid zukommt. Er beweist dann, dass die elektrische Spannung für ein Element der ellipsoidischen Oberfläche nach W. Thomson nur die Hälfte des Werthes hat, den die meisten Physiker annehmen.

Mn. (O.)

A. G. Greenhill. Coefficients of induction and capacity of two electrified spheres. Proc. L. M. S. X. 48-55.

Es sei eine isolirte Kugel A (Radius a) mit Elektricität geladen, bis das Potential den Werth 1 erreicht hat. In der Entfernung c (der Mittelpunkte) befinde sich eine zweite zur Erde abgeleitete Kugel B (Radius b). Diejenige Ladung (q_{aa}) der

Kugel A, welche in Gegenwart von B das Potential 1 bewirkt, wird als Capacitätscoefficient bezeichnet. Die in diesem Fall auf B befindliche Ladung q_{ab} ist der Inductionscoefficient. Es ist q_{bb} der entsprechend zu definirende Capacitätscoefficient von B. Der Verfasser transformirt die in bekannter Weise durch gegenseitige Abbildung erhaltenen Ausdrücke für diese drei Coefficienten und giebt verschiedene Ausdrücke für dieselben. Insbesondere drückt er dieselben aus durch Differentialquotienten des Logarithmus der verallgemeinerten hypergeometrischen Reihe (Heine, Kugelfunctionen II. Aufl. 97) und zeigt zum Schluss, dass diese Formeln sich umwandeln lassen in früher von Poisson gegebene Ausdrücke in Form bestimmter Integrale.

Ok.

A. Seydler. Ueber eine neue Art, die Vertheilung der Elektricität auf zwei leitenden Kugeln zu bestimmen. Prag. Ber. 1878. 331-339.

Nachdem der Verfasser darauf hingewiesen, dass es verhältnismässig wenig allgemeine Methoden giebt, elektrostatische Probleme zu lösen, theilt er einen Versuch mit, die vorhandenen Methoden, speciell die Thomson'sche Theorie der elektrischen Bilder und die ebenfalls von Thomson herrührende Methode der Transformation durch reciproke Radienvectoren fruchtbarer zu machen. Er gelangt dazu, indem er beide Methoden combinirt und zunächst als Beispiel das Problem der zwei Kugeln behandelt. Dabei geht er von zwei concentrischen Kugeln aus und stellt Ausdrücke für das Potential auf, welche auf der einen und auf der anderen Kugelfläche constante Werthe erhalten. Das Potential besteht aus einer Reihe mit abwechselnd positiven und negativen Gliedern, welche leicht nach der Methode der elektrischen Bilder erhalten wird. Wird dann die andere oben erwähnte Transformation benutzt, so gelangt man auf recht einfache Weise zu der Lösung des Problems der beiden einander gegenseitig influencirenden Kugeln. Ok.

H. L. ORCHARD. Solution of a question (5944). Educ. Times XXXI. 97.

Eine sphärische Seifenblase sei so mit Elektricität geladen, dass die Dichtigkeit ϱ_n ist. Vergrössert sich das Volumen im Verhältnis $\frac{n+1}{n}$, so muss die Dichtigkeit eine andere werden, ϱ_{n+1}, falls der innere Druck derselbe bleiben soll. Zwischen ϱ_n und ϱ_{n+1} findet dann die Relation statt

$$\varrho_{n+1}:\varrho_n = n:(n^2-1)^{\frac{1}{3}}.$$

Wn.

A. TÖPLER. Ueber die Vervollkommnung der Influenzmaschine. Berl. Monatsber. 1879. 950-980.

Ohne Zeichnung und genauere Beschreibung der von dem Verfasser getroffenen Anordnungen ist es nicht wohl möglich, die theoretischen Betrachtungen desselben wiederzugeben. Es möge daher die Bemerkung genügen, dass dieselben aus einfachen Anwendungen der Potentialtheorie, speciell der Theorie der Influenz bestehen. Ok.

J. KORS. De potentiaalfunctie van geleidende vlakke platen onder influentie van eene electrische massa. Diss. Groningen.

Diese Schrift schliesst sich an die Untersuchungen Thomson's über die Dichtigkeit der Elektricität auf einem isolirten geladenen Segment an und untersucht auch den Fall, dass dieses Segment von einem elektrischen Punkte in der Nähe influencirt wird. Der Verfasser beginnt mit einer Auseinandersetzung der Berechnungen von Legendre und Laplace über diesen Gegenstand und kommt dann auf die Formeln Thomson's zurück. Indem dann der Halbmesser der Kugel des Segments unendlich genommen wird, geht das Segment in eine kreisförmige Scheibe über; die Resultate, welche auf diesem Wege durch Berechnung erhalten sind, werden durch Experimente bestätigt. Auch einige andere

hiermit zusammenhängende Probleme werden auf übereinstimmende Weise behandelt. Aus der Vergleichung der Resultate der Berechnung und Beobachtung ergiebt sich, dass eine Zu- oder Abnahme des Werthes der Potentialfunction auf beiden zugleich vorkommt. Doch weichen die numerischen Werthe, welche auf beide Arten erhalten werden, sehr von einander ab.

G.

A. Maggi e M. Ascoli. Sull' elettrometro Mascart. Rend. Ist. Lomb. (2) XII. 607-615.

Das betreffende Elektrometer ist aus der Fabrik von Ruhmkorff bezogen und stimmt in seinen Haupttheilen mit dem Thomson'schen Quadrantelektrometer überein. Die Verfasser haben die Genauigkeit der Angaben desselben experimentell untersucht. Aus der allgemeinen Theorie der elektrischen Ansammlungsapparate haben dieselben eine Reihe von Formeln entnommen, welche sie durch einfache Rechnungen so umgestalten, dass sie direct mit den Versuchen verglichen werden können. Die Uebereinstimmung ist eine befriedigende.

Ok.

A. Herwegen. Theorie der stationären elektrischen Strömung. Grunert Arch. LXIII. 62-81.

Der Verfasser behandelt das Problem der elektrischen Strömung in einer dünnen ebenen Platte, welche von Kreisen begrenzt ist. Nachdem er die allgemeinen Bedingungen, welche das Potential in diesem Fall erfüllen muss, aufgestellt hat, geht er von einem Ausdruck für dasselbe aus von der Form

$$V = C + \frac{1}{2\pi k} \Sigma E_n (\log r_n - V_n).$$

Die Anzahl der Summenglieder resp. die Lage der Orte, von denen aus die Entfernungen r_n gerechnet werden, hängt von denjenigen Stellen ab, in denen der Platte Elektricität zu- oder abgeleitet wird. Die Function V_n ist dann so zu bestimmen,

dass für jede Randcurve

$$\frac{\partial V_n}{\partial n} = \frac{\partial \log r_n}{\partial n} + b.$$

Die Bestimmung dieser Function erfolgt durch Einführung einer Reihe von Polarcoordinatensystemen, von denen ein jedes als Anfangspunkt den Mittelpunkt eines der Grenzkreise hat. Die hierauf bezügliche Rechnung wird durchgeführt für den Fall zweier Kreise, von denen der eine ganz im Innern des anderen liegt, so dass die Platte aus einem ringförmigen Streifen von ungleicher Breite besteht. Die Function V_n wird dann durch die Summe $U_{11} + U_{22}$ ersetzt, worin der erste Ausdruck eine Function der Polarcoordinaten des einen Systems, der zweite ein solcher des anderen Systems ist. Durch geometrische Betrachtungen wird der Uebergang aus dem einen in das andere System vermittelt. Die zum Schluss folgenden Specialisirungen, concentrische Kreise, unbegrenzte Platte, zwei Elektroden etc., sind schon früher in anderer Weise behandelt worden. Ok.

J. M. Hill. On steady motion of electricity in spherical current sheets. Quart. J. XVI. 306-323.

Die Strömung der Elektricität in krummen Oberflächen von gleicher sehr kleiner Dicke ist schon mehrfach behandelt worden (vergl. F. d. M. VII. 1875. 665). Der Verfasser bildet zunächst die Fundamentalgleichung des Potentials für den Fall einer dünnen Kugelschale. Einen Ort auf derselben bestimmt er durch die Breite χ und die Länge φ. Im Fall der constanten Strömung muss das Potential V der Gleichung genügen

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \Phi^2} + \cos\chi \frac{\partial}{\partial \chi}\left(\cos\chi \frac{\partial V}{\partial \chi}\right) = 0.$$

Setzt man

$$\mu = \log \frac{1+\sin\chi}{\cos\chi},$$

so erhält man die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \Phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \mu^2} = 0.$$

Dieselbe wird erfüllt durch Ausdrücke von der Form

$$C.\log(e^{a\mu} + e^{-a\mu} + 2\cos a\Phi).$$

Der Verfasser weist nach, dass diese Function geeignet ist, eine ganze Reihe hierhin gehörender Probleme zu lösen. Insbesondere behandelt er die Strömung in einer ganzen Kugelschale und in einer Calotte unter verschiedenen Bedingungen für den Zu- und Abfluss der Elektricität, sowie für die Begrenzung. Ok.

A. J. C. Allen. On some problems in the conduction of electricity. Rep. Brit. Ass. 1879.

Es handelt sich um das Problem der Leitung der Elektricität in einer sphärischen Stromplatte, wo die Elektricität durch eine Reihe von Punkten, die Elektroden genannt werden, eingeführt und fortgeführt wird. Csy. (O.)

C. Niven. On the induction of electric currents in infinite plates and spherical shells. Proc. of London XXX. 113-117.

Die Arbeit wird in den Phil. Trans. in extenso erscheinen. Das Referat wird daher bis dahin verschoben.

Cly. (O.)

N. Umow. Ueber die stationären elektrischen Strömungen in einer gekrümmten leitenden Fläche. Mosk. Math. Samml. IX. 121-127. (Russisch.)

Bw.

F. Auerbach. Ueber die Beziehungen zwischen dem galvanischen Widerstande und der specifischen Wärme. Pogg. Ann. (2) VIII. 474-494.

Bekanntlich haben vor längerer Zeit Matthiessen und Arndtsen nachgewiesen, dass der galvanische Widerstand der Metalle

annähernd proportional der absoluten Temperatur zunimmt. Der Verfasser knüpft an diese Thatsache eine Reihe theoretischer Betrachtungen. Er erörtert zunächst die Frage, in welcher Weise die Temperatur eines sehr dünnen Drahtes wächst, wenn man durch denselben einen galvanischen Strom leitet und auf seine Abkühlung durch Ausstrahlung Rücksicht nimmt. Da die hierbei in Betracht kommenden Grössen, nämlich specifische Wärme, Ausstrahlungsvermögen und galvanischer Widerstand, sämmtlich Temperaturfunctionen sind, so wird die Temperatur im Allgemeinen eine complicirte Function der Zeit sein. Nur in einem besonderen Fall, der specieller untersucht wird, erhält man ein einfaches Erwärmungsgesetz, ausgedrückt durch eine Exponentialfunction der Zeit. In diesem Fall wird man dann auf die oben angegebene Abhängigkeit des Widerstandes von der Temperatur geführt, wenn man noch weitere einfache Voraussetzungen über die Abhängigkeit der specifischen Wärme und des Ausstrahlungsvermögens macht. Da die Annahme des einfachen Erwärmungsgesetzes des Drahtes eine durchaus willkürliche ist, so wird durch die darauf gegründeten Schlüsse eigentlich Nichts bewiesen. Wir halten es daher für unnöthig an dieser Stelle auf die übrigen Betrachtungen einzugehen, welche sich auf den Zusammenhang der specifischen Wärme und des Leitungswiderstandes als Functionen der Temperatur beziehen. Ok.

R. Ferrini. Sul problema della subdivisione della luce elettrica. Rend. Ist. Lomb. (2) XII. 589-595.

Die von einer Stromquelle ausgehende Leitung werde in n Zweige getheilt; in jedem derselben befinden sich m elektrische Lampen. Es entsteht die Frage, wie die Factoren n und m zu wählen sind, wenn die ganze Zahl der in Betrieb zu setzenden Lampen $p = n.m$ gegeben ist, damit man den günstigsten Effect erhält. Es ist damit ein nicht uninteressantes Problem der Maxima und Minima gestellt, welches der Verfasser durch die entsprechenden Methoden löst. Speciell berechnet derselbe noch für den Fall der günstigsten Anordnung das Verhältnis der in

den Lampen in Wärme verwandelten Energie zu der ganzen verbrauchten Energie, welches Verhältnis er als den ökonomischen Coefficienten der Anordnung bezeichnet. Im zweiten Theil der Arbeit wird weiter das Problem behandelt, festzustellen, welches die grösste Zahl von Lampen ist, welche man mit Vortheil durch eine einzige Stromquelle in Betrieb setzen kann. Die Lösung desselben hat nur ein Interesse für die Technik. Ok.

G. Basso. Sull' allungamento dei conduttori filiformi attraversati dalla corrente elettrica. Atti di Torino XIV. 349-373.

Nachdem der Verfasser gezeigt hat, dass die bisherigen Untersuchungen über die besondere Ausdehnung eines Drahtes in Folge des Durchgangs eines galvanischen Stroms noch nicht genügen, um die Existenz derselben zu beweisen, bespricht er die von ihm angestellte Experimentaluntersuchung über diesen Gegenstand. In der Einleitung zu derselben wird der Temperaturzustand des Drahtes berechnet, wenn derselbe von einem elektrischen Strom durchflossen und in Folge dessen erwärmt wird, während er sich gleichzeitig durch Strahlung abkühlt. Hieraus wird die Gesammtverlängerung berechnet. Der Verfasser verglich bei seinen Versuchen die Verlängerungen eines Kupfer- und eines Eisendrahtes. Als Endresultat findet er, dass „die Existenz der rein galvanischen Ausdehnung eines von einem Strom durchflossenen Drahtes unwahrscheinlich ist“. Ok.

H. Herwig. Ueber Extraströme in linearen Leitern. Pogg. Ann. (2) VII. 488-494.

Der Verfasser hat zunächst das Potential einer cylindrischen Spirale auf sich selbst berechnet. Ist der Radius des Cylinders r, der Abstand zweier Windungen a, so findet er für das Potential derselben die angenäherte Formel

$$\iint \frac{\cos(ds\,ds_1)\,ds\,ds_1}{\varrho} = 4r\pi\left(\lg\frac{8r}{a}-2\right).$$

Hieraus ergiebt sich für eine Spirale von n Windungen das entsprechende Potential zu

$$2r\pi n^2\left(2\lg\frac{8r}{n.c}-1\right),$$

wo c die Entfernung je zweier Windungen von einander repräsentirt. An einer bestimmten Spirale wird diese Formel mit Versuchen verglichen. Weiter erörtert der Verfasser die Frage, ob bei Drähten von grösserer Dicke oder auch bei Kupferbändern die einfachen Formeln für lineare Leiter angewandt werden dürfen. Nach seinen Versuchen kann diese Frage bejaht werden.

Ok.

R. Colley. Ueber die Polarisation in Elektrolyten.

Pogg. Ann. (2) VII. 206-241.

Wird ein Leiter zweiter Classe in einen Stromkreis eingeschaltet, dessen elektromotorische Kraft kleiner ist als die elektromotorische Kraft der Polarisation, so geht der Strom entweder gar nicht oder nur kurze Zeit durch den Leiter. Werden die Elektroden nach Ausschaltung der Kette für sich verbunden, so liefern dieselben einen Entladungsstrom in entgegengesetzter Richtung. Das Verhalten des Elektrolyten ist also vergleichbar mit demjenigen eines Condensators. Hierbei sind noch zwei verschiedene Auffassungen möglich. Entweder die beiden Elektroden werden als die Belegungen aufgefasst; die Flüssigkeit als Dielektricum oder Isolator; oder jede Elektrode bildet mit der an ihr haftenden Gasschicht für sich einen Condensator; die Flüssigkeit ist dann als Leiter anzusehen, welcher die zweite Belegung des ersten Condensators mit der ersten des zweiten verbindet.

Die Untersuchung des Verfassers hat den Zweck, zwischen beiden Anschauungen eine Entscheidung zu treffen. Zu dem Ende muss zunächst das Problem gelöst werden, die Veränderungen der Potentiale auf den Belegungen der Condensatoren nach der einen oder anderen Anschauung zu berechnen, wenn die elektromotorische Kraft der Kette als Function der Zeit gegeben ist. Der Verfasser wendet verschiedene Beobachtungs-

methoden an, auf deren Einzelheiten ebensowenig eingegangen werden kann, wie auf die dazu gehörenden Rechnungen. Auf Grund derselben entscheidet sich der Verfasser zum Schluss für die zweite Auffassung. Ok.

W. H. Preece. The electric light. Phil. Mag. (5) VII. 29-34.

In dieser Arbeit wird gezeigt, dass die Wärmemenge, die in jedem der Widerstände einer geschlossenen Kette erzeugt wird, umgekehrt proportional ist dem Quadrat der Zahl der Zweige. Es wird innerhalb gewisser Grenzen gezeigt, dass, sobald der Strom durch eine dynamische Maschine erzeugt wird, das gesammte von n Lampen ausgesendete Licht, wenn sie nach einander verbunden werden, verringert wird um $\frac{1}{n}$ und das von jeder Lampe um $\frac{1}{n^2}$. Sind sie dagegen nebeneinander verbunden, so wird die gesammte Lichtmenge verringert um $\frac{1}{n^2}$ und bei jeder Lampe um $\frac{1}{n^3}$. Im letzteren Fall kommt die schnelle Verringerung in dem ausgesandten Licht davon her, dass die Wärme in der Maschine selbst entwickelt wird, statt in den äusseren Widerständen. Csy. (O.)

A. Oberbeck. Untersuchungen über schnell wechselnde elektrische Ströme. Pogg. Ann. (2) VI. 210-241.

Die Untersuchung will feststellen, ob das Ohm'sche Gesetz seine Gültigkeit behält, wenn die elektrischen Ströme von sehr kurzer Dauer sind resp. ihre Richtung sehr schnell wechseln. Solche Ströme erhält man, wenn man das eine Ende einer Inductionsspirale mit einem Condensator, das andere Ende mit der Erde verbindet. Die Versuchsanordnung ist im Wesentlichen dieselbe, welche Schiller bei einer früheren Gelegenheit (Pogg. Ann. CLII.) benutzt hat. Ist p das Potential der Spirale auf sich selbst, c die Capacität des Condensators, so ist die Schwingungs-

dauer der elektrischen Ströme durch die Formel gegeben

$$T = \pi \sqrt{p \cdot c}.$$

Die Abhandlung besteht aus zwei Haupttheilen. In dem ersten müssen die elektrischen Ströme durch eine leitende Flüssigkeit gehen. Der Widerstand derselben kann bestimmt werden. Es entsteht die Frage, ob derselbe constant ist, wie gross auch die Anzahl der Stromwechsel in der Sekunde genommen werden mag. Die Theorie dieser Versuche wird mit Berücksichtigung aller hierbei in Betracht kommender Umstände entwickelt. Sie führt auf ein System simultaner Differentialgleichungen erster Ordnung. Für das Potential der freien Elektricität am isolirten Ende der Spirale ergiebt sich dann der Ausdruck

$$\omega = a \cdot c^{\frac{-\lambda t}{T}} \cdot \sin\left(\pi \frac{t}{T}\right),$$

in welchem λ und T durch die Rechnung gefunden, andererseits durch Versuche festgestellt werden können. Insbesondere kann aus dem Dämpfungsfactor λ der Flüssigkeitswiderstand berechnet werden. Derselbe ist nicht constant, sondern nimmt schnell ab, wenn die Anzahl der Schwingungen in der Sekunde wächst. Flüssigkeiten, welche durch den Strom zersetzt werden, zeigen also einen kleineren Widerstand bei schnell wechselnden Strömen. Bei den in dem zweiten Theil besprochenen Versuchen wurden zwei Spiralen in verschiedener Weise combinirt und in dem System Schwingungen erregt. Bei dieser Anordnung finden Interferenzerscheinungen der elektrischen Schwingungen statt. Dieselben werden experimentell und theoretisch untersucht. Ihre Gesetze lassen sich aus Systemen simultaner linearer Differentialgleichungen ableiten. Benutzt man zwei verschiedene Rollen ohne Condensator, so kann man dieselben entweder „hintereinander" oder „nebeneinander" combiniren. Im ersten Fall erhält man eine Summe zweier Schwingungen verschiedener Dauer, im zweiten Fall eine Schwingungsbewegung und eine aperiodische Bewegung. Die Ergebnisse der Theorie werden durch die Versuche bestätigt. Ok.

L. LORENZ. Ueber die Fortpflanzung der Elektricität. Pogg. Ann. (2) VII. 161-193.

Für Drähte von mässiger Länge, wie sie bei den Versuchen in Laboratorien vorkommen, ist die Fundamentalgleichung für die Fortpflanzung der Elektricität von der Form

$$ri = V - C\frac{di}{dt}.$$

In derselben bedeuten i die Stromstärke, V das Potential, r den Widerstand, C die „elektrodynamische Constante" des Drahtes. Hierbei ist die Masse der Elektricität, wie gewöhnlich, als unendlich klein angenommen. Wäre dies nicht der Fall, so würde dadurch die Constante C bei Versuchen sich grösser ergeben, als aus ihrer Berechnung. Eine genaue Vergleichung beobachteter und berechneter Werthe von C ist deshalb von grossem Interesse. Dieselbe wird in dem ersten Theil der vorliegenden Abhandlung ausgeführt. Ohne hier auf Einzelheiten der Versuche einzugehen, mag nur bemerkt werden, dass der Verfasser die Anordnung der Wheatstone'schen Brücke benutzt und dabei das Galvanometer durch ein Telephon ersetzt hat. Die Formeln zur Berechnung der Constanten C werden ohne Ableitung mitgetheilt. Die Versuche geben genau die berechneten Werthe.

Der zweite Theil der Abhandlung enthält eine Wiederholung der Versuche Feddersen's, bei welchen durch Beobachtung der Funkenbilder einer oscillirenden Entladung die Schwingungsdauer derselben gefunden werden kann.

Letztere kann aus der Capacität des Condensators berechnet werden. Auch hier stimmt Beobachtung und Theorie soweit überein, als es bei der ziemlich unsicheren Berechnung der Capacitäten möglich ist.

Zum Schluss werden noch ältere Versuche über die Fortpflanzung der Elektricität in Telegraphenleitungen besprochen. Hierbei ist zunächst zu berücksichtigen, dass das Eisen beim Durchgange des Stromes transversal magnetisch wird. Dies bedingt eine Vergrösserung der elektrodynamischen Constante. Ferner kommen die in der Erde inducirten Ströme in Be-

tracht, deren Einfluss durch einfache Rechnungen festgestellt wird. Ok.

H. F. Weber. On the inductions that occur in the telephon. Phil. Mag. (5) VII. 34-39.

Uebersetzung der Arbeit, über die F. d. M. X. 1878. p. 742 berichtet worden ist. O.

V. Wietlisbach. Ueber die Anwendung des Telephons zu elektrischen und galvanischen Messungen. Berl. Monatsber. 1879. 278-283.

Von Interesse bei diesen Versuchen ist besonders die Bestimmung des Leitungswiderstandes und der Polarisation von Flüssigkeiten. Hierbei wurde in der Wheatestone'schen Brückencombination das Galvanometer durch ein Telephon ersetzt. In einem der Zweige befand sich die Flüssigkeit. Die Stromquelle lieferte Ströme von periodisch wechselnder Richtung. Dabei stellte sich als vortheilhaft heraus, harmonische elektrische Schwingungen zu benutzen.

Im Allgemeinen lässt sich dann keine Stelle des Messdrahtes bestimmen, bei welcher der Ton im Telephon vollständig verschwindet. Wohl aber ist dies möglich, wenn hinter der Flüssigkeit eine Spirale eingeschaltet wird. Dies Resultat wird durch die Theorie erklärt, wie aus den einfachen mitgetheilten Rechnungen hervorgeht. Ok.

F. Niemöller. Ueber die Anwendung des Telephons zu Widerstandsmessungen. Pogg. Ann. (2) VIII. 656-661.

Bei ganz ähnlicher Versuchsanordnung wie die in dem vorigen Referat beschriebene kommt der Verfasser zu ähnlichen Resultaten. Die Stromquelle war hier ein Inductionsapparat. Grosse Flüssigkeitswiderstände konnten ziemlich genau bestimmt werden, wenn man diejenige Stelle des Messdrahtes aufsuchte, bei welcher

der Ton im Telephon ein Minimum war. Bei Berechnung des Vorgangs unter der Voraussetzung, dass die elektrodynamische Constante des Inductionsapparats sehr gross gegen diejenigen der Brückenzweige ist, ergiebt sich, dass die Proportion der vier Widerstände auch hier angenähert richtig ist, wie sie bei einer constanten Stromquelle genau bestehen muss. Ok.

L. Boltzmann. Ueber das Mitschwingen des Telephons. Wien. Anz. 1879. 71-73.

Im Anschluss an die vor Kurzem besprochenen (F. d. M. X. 1878. 742-743) theoretischen Untersuchungen über das Telephon theilt der Verfasser einige Resultate einer Experimentaluntersuchung von Klemenčič mit, welche die Verzögerung der Entstehung des Magnetismus in den Eisenkernen betreffen.

Ok.

J. Fröhlich. Das kugelförmige Elektrodynamometer. Pogg. Ann. (2) VIII. 563-584.

Bei demselben ist die feste Drahtrolle ersetzt durch ein System paralleler Windungen, welche gleichmässig eine Hohlkugel bedecken. Die bewegliche Rolle, welche sich im Innern dieser Kugel befindet, ist mit einer zweiten Rolle verbunden, durch welche der Strom in entgegengesetzter Richtung fliesst, so dass dieselben in Bezug auf den Erdmagnetismus ein astatisches System bilden. Die Einwirkung der Kugelwindungen auf die innere Rolle ist leicht zu berechnen, da der innere Hohlraum ein homogenes magnetisches Feld ist. Schwieriger ist die Berechnung der Wirkung auf die äussere Rolle. Der Verfasser geht hierbei von dem Satze aus, dass die Kugelwindungen nach Aussen wirken, wie ein sehr kurzer Magnetstab in ihrem Mittelpunkt. Das Potential eines solchen Magnets auf eine Drahtrolle wird dann allgemein entwickelt und daraus endlich durch eine etwas umständliche Rechnung die Gesammtwirkung der festen Kugelrolle auf das System der beiden beweglichen Rollen berechnet.

Ok.

E. H. Hall. On a new action of the magnet on electric currents. Am. J. II. 287-292.

Ein von einem Strom durchflossener Leiter wird bekanntlich durch die Wirkung magnetischer Kräfte auf den Strom beeinflusst und, wenn er beweglich ist, verschoben. Ist der Leiter selbst fest, so kann man die Frage stellen, ob die einzelnen Stromfäden in ihrer Lage innerhalb des Leiters gestört werden. Der Verfasser stellt hierüber zunächst den folgenden Versuch an. Eine Spirale von Neusilberdraht wurde zwischen die Pole eines starken Magnets gebracht, und ihr Widerstand vor und nach der Erregung des Magnets bestimmt. Es gab sich keine Veränderung zu erkennen. Eine solche hätte eintreten müssen, wenn eine merkliche Verschiebung der Stromfäden innerhalb des Drahtes stattgefunden hätte. Dagegen führte folgendes Experiment zu dem erwarteten Resultat. Ein Goldblättchen, auf Glas geklebt, wurde ebenfalls zwischen die Magnetpole gebracht, ein Strom senkrecht gegen die Kraftlinien hindurchgeleitet und zwei Punkte des Blättchens mit einem Galvanometer verbunden, welche auf einer Linie gleichen Potentials lagen. Nach Erregung des Elektromagnets ging ein constanter Strom durch das Galvanometer, ein Zeichen, dass das System der Stromlinien, sowie der Linien gleichen Potentials eine Verschiebung erfahren hatte. Ok.

J. Stefan. Ueber die Abweichungen der Ampère'schen Theorie des Magnetismus von der Theorie der elektromagnetischen Kräfte. Wien Anz. 1879. 110-111, Wien. Ber. LXXIX. 659-680.

Das elektromagnetische Grundgesetz, gewöhnlich als Biot-Savart'sches Gesetz bezeichnet, giebt bekanntlich eine Kraftwirkung des Stromelementes auf den Magnetpol und eine entgegengesetzt gleiche des Magnetpols auf das Stromelement, beide senkrecht zur Ebene: Verbindungslinie-Stromelement, so dass bei fester Verbindung beider ein Kräftepaar resultirt. Ersetzt man den Magnetpol durch das Ende eines unendlich langen Solenoids und berechnet die Wirkung nach der Ampère'schen elektrodyna-

mischen Formel, so sind zwar die Kräfte der Richtung und Grösse nach dieselben, der Angriffspunkt der beiden Kräfte fällt aber in das Stromelement, so dass kein Kräftepaar entsteht. Diese Differenzen der beiden Theorien erläutert der Verfasser an zwei einfachen Beispielen, nämlich an der Wirkung eines Stromelementes auf einen sehr kleinen Magneten und an der Theorie der Tangentenbussole. Dann geht derselbe zu der Erörterung der Frage über, ob zwischen der erweiterten elektrodynamischen Theorie, welche er selbst im Jahre 1869 entwickelt hat (F. d. M. II. 798-799) und der elektromagnetischen Theorie eine Uebereinstimmung durch passende Bestimmung der dort willkürlich gebliebenen Constanten möglich ist. Die Vergleichung bezieht sich einmal auf die Kräfte, sodann auf die Kräftepaare. In ersterer Beziehung ist Uebereinstimmung mit allen denjenigen Theorien, welche das Princip der gleichen Wirkung und Gegenwirkung benutzen. In der Vergleichung der Kräftepaare stimmen sie aber nicht überein. In letzterer Beziehung steht die elektromagnetische Theorie mit der Grassmann'schen in Uebereinstimmung, während hier wieder Abweichungen in den Ausdrücken für die Kräfte vorkommen.

Ok.

Trève. Sur les courants d'Ampère. C. R. LXXXIX. 301-302, 350-351.

Mittheilung einiger Versuche, nach welchen es wahrscheinlicher sein soll, dass die Ampère'schen Molecularströme stets im Eisen vorhanden sind und in verschieden gerichteten Ebenen fliessen, als dass dieselben bei der Magnetisirung entstehen und verschwinden.

Ok.

M. Margules. Ueber Theorie und Anwendung der elektromagnetischen Rotation. Pogg. Ann. (2) VI. 59-72, Wien. Ber. LXXVII.

Der Verfasser untersucht eine Reihe von Fällen der Wechselwirkung elektrischer Ströme und Magnetpole, bei welchen es nicht zulässig ist, die Wirkung des Stromes durch eine trans-

versal magnetische Fläche zu ersetzen. Insbesondere bespricht derselbe die Möglichkeit, durch die bei der unipolaren Induction erregten Inductionsströme die magnetische Vertheilung in einem Stahlmagneten zu bestimmen. Beachtenswerth ist speciell die in Abschnitt 3) vorgeschlagene Methode, bei welcher ein Hohlcylinder als Magnet benutzt wird. Dieselbe ist wohl theoretisch einwurfsfrei, scheint aber nach einigen Versuchen des Verfassers mit grossen experimentellen Schwierigkeiten verbunden zu sein.

Ok.

O. Chwolson. Ueber das Problem der magnetischen Induction auf zwei Kugeln. Schlömilch Z. XXIV. 40-54.

Die von Aussen auf die beiden Eisenkugeln wirkenden magnetisirenden Kräfte werden als symmetrisch um die Centrale der Kugeln herum angenommen. Nach der Poisson'schen Theorie der Induction von Magnetismus für Eisenkugeln ist es erforderlich, eine Potentialfunction V so zu bestimmen, dass die Gleichung

$$(1+2k)\frac{V}{R}+(2+k)\frac{dV}{dn_a}+3k\frac{dF}{dn_i}=0$$

für jede Kugeloberfläche erfüllt wird. Hierin bedeutet F das Potential der äusseren Kräfte. Der Verfasser löst die Aufgabe für zwei Kugeln, indem er nach dem Vorgang von C. Neumann (Allgemeine Lösung des Problems über den stationären Temperaturzustand von zwei Körpern, der von zwei nichtconcentrischen Kugelflächen begrenzt wird, Halle 1862) dipolare Coordinaten einführt. Die beiden Kugelflächen werden mit Massen belegt angenommen, welche durch Reihen nach Kugelfunctionen ausgedrückt werden, deren Coefficienten noch zu bestimmen sind. Die Potentiale dieser Massen müssen dann an jeder Kugeloberfläche die oben gestellte Bedingung erfüllen. Man erhält zwei complicirte Gleichungssysteme zur Bestimmung der erwähnten beiden Reihen von Constanten. Nachdem der Verfasser angedeutet hat, wie dieselben allgemein zu berechnen sind, geht er auf den besonderen Fall näher ein, dass die Kugeln sich in einem homo-

genen magnetischen Felde befinden. Wenn dann noch angenommen wird, dass die Radien der Kugeln einander gleich sind, und die Entfernung T ihrer Mittelpunkte $\frac{17}{4}R$ beträgt, so ergiebt sich, dass das magnetische Moment jeder Kugel durch Anwesenheit der anderen um 2,7 Procent vergrössert wird. Ok.

L. Boltzmann. Magnetisirung eines Eisenringes. Wien. Anz. 1878. 203-205, Pogg. Beibl. III. 372-373.

A. v. Ettingshausen. Ueber die Magnetisirung von Eisenringen. Pogg. Ann. (2) VIII. 554-562; Wien. Anz. 1879. 184-190.

In der ersten Notiz ist ohne Ableitung eine Formel mitgetheilt, welche eine Lösung des folgenden Problems giebt: Ein Eisenring, dessen Mittellinie einen Kreis mit dem Radius R bildet, hat einen kreisförmigen Querschnitt mit dem Radius g. An einer Stelle ist derselbe von einem kreisförmigen Draht umschlungen, dessen Radius s beträgt. Eine zweite Umwindung in einem Winkelabstand ϑ habe den Radius r. Wird durch den ersten Draht der Strom J geleitet und plötzlich umgekehrt, so wird in dem andern ein Strom inducirt, dessen Gesammtintensität p heisse. Letztere lässt sich nach der folgenden Formel berechnen

$$\frac{p}{q} = 1 + 2\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{P(\gamma)P'(\gamma).\sigma Q(\sigma)\varrho Q'(\varrho)}{1+4\pi k\gamma.Q(\gamma)P''(\gamma)} \cos n\vartheta.$$

P und Q sind Functionen, welche Kirchhoff (Crelle J. XLVIII.) berechnet hat. Ferner ist

$$\gamma = n^2\left(\frac{g}{2R}\right)^2, \quad \varrho = n^2\left(\frac{r}{2R}\right)^2, \quad \sigma = n^2\left(\frac{s}{2R}\right)^2;$$

q endlich ist das Mittel der zu den verschiedenen Werthen von ϑ gehörenden Function p dieser Grösse. Die Anwendung mehrerer Windungen an Stelle der einzelnen bedingt eine kleine Aenderung der Formel. Ettingshausen hat der besprochenen Anordnung gemäss ähnliche Versuche angestellt, wie im Jahre 1878 Oberbeck (Habilitationsschrift. Halle 1878). Aus der Formel er-

giebt sich das Verhältnis der grössten zur kleinsten Induction ($\vartheta = 0$, $\vartheta = 180$) = 2,09, welches annähernd auch aus den Versuchen sich ergab. Es schliessen sich hieran noch weitere Versuche, deren Einzelheiten übergangen werden müssen. Erwähnt mag noch werden, dass die Verhältnisse $p_0 : p_{90}$ und $p_{90} : p_{180}$ wesentlich von der Stärke des primären Stromes abhängen und sich bei stärkeren Strömen, ganz wie auch Oberbeck schon gefunden, der Einheit mehr und mehr nähern. Ok.

E. Riecke. Zur Lehre von den Polen eines Stabmagnets. Pogg. Ann. (2) VIII. 299-325.

Nachdem der Verfasser auseinandergesetzt hat, dass die gewöhnliche Definition der Pole eines Magnets als Angriffspunkte paralleler Kräfte, welche auf die nord- resp. südmagnetischen Massen wirken, eine experimentelle Bestimmung derselben nicht zulässt, setzt er an deren Stelle ein anderes Punktepaar, welches er als äquivalente Pole bezeichnet. Dieselben sind von ihm bei einer früheren Gelegenheit (F. d. M. IV. 1872. 554-555) genauer definirt und in einigen Fällen berechnet worden. Es entsteht nun die Frage, ob diese letzteren Pole sich von den Polen nach der gewöhnlichen Definition in ihrer Lage erheblich unterscheiden. Nachdem zunächst der Nutzen der Einführung dieser Pole an der Theorie der Wechselwirkung zweier Magnetnadeln im Anschluss an Gauss gezeigt worden ist, wird für eine Reihe von Magneten die Lage der Schwerpunkte und der äquivalenten Pole berechnet. Im Allgemeinen fallen dieselben nicht zusammen. Es folgen dann Betrachtungen über den Fall, wo der Polabstand imaginär wird, sowie Anwendung auf die Theorie der magnetischen Messinstrumente. Ok.

J. Perry and W. E. Ayrton. A new theory of terrestrial magnetism. Phil. Mag. (5) VII. 401-411.

Durch Versuche von Helmholtz ist festgestellt worden, dass ein bewegter Körper mit einer bestimmten elektrischen Ladung

gleich einem Strom einen Magneten ablenken würde. Betrachtet man nun die Erde als elektrisirt, so muss die Elektricität auf die Oberfläche beschränkt sein. Die Punkte auf der Oberfläche haben aber in Folge der Rotation verschiedene Geschwindigkeiten. Als unmittelbare Folge aus den Resultaten von Helmholtz ergiebt sich daher, dass das Innere der Erde ein magnetisches Feld ist, das ganz unabhängig von der inneren Constitution ist. Durch ganz ähnliche Schlüsse findet der Verfasser, dass es auch ausserhalb der Erdoberfläche ein magnetisches Feld geben wird. Der Verfasser zeigt, dass das elektromagnetische Potential, das von der Rotation der Elektricität auf der Oberfläche der Erde herrührt, im Innern der Erde

$$\frac{4\pi}{3} 2\sigma\omega r \cos\theta_1$$

und ausserhalb der Erde

$$\frac{4\pi}{3} 2\sigma\omega \frac{1}{r^2} \cos\theta_1$$

ist. Darin ist ω die Winkelgeschwindigkeit der Erde um ihre Axe, r die radiale Entfernung eines Punktes vom Mittelpunkt der Erde, θ_1 das Complement der Breite des Orts, $4\pi\sigma$ endlich die gesammte auf der Oberfläche der Erde vertheilte Elektricitätsmenge. Diese Resultate stimmen mit denen von Biot und Gauss überein.

Csy. (O.)

H. A. Rowland. On Prof. Ayrton and Perry's new theory of the earth's magnetism. Phil. Mag. (5) VII. 102-106.

Enthält eine Kritik der obigen Arbeit, in der der Verfasser zeigt, dass sowohl in den Rechnungen wie in den Schlüssen der Herren Ayrton und Perry sich Fehler finden.

Csy. (O.)

Capitel 4.

Wärmelehre.

O. J. LODGE. An attempt at a systematic classification of the various forms of energy. Phil. Mag. (5) VIII. 277-286.

Csy.

W. THOMSON. On thermodynamic motivity. Phil. Mag. (5) VII. 348-352.

Die Arbeit enthält die Erläuterung eines neuen terminus technicus in der mechanischen Wärmetheorie, den der Verfasser in dieselbe einführt. Vor einigen Jahren hatte er mit Professor Tait den Mangel eines Wortes empfunden, um die Arbeitsfähigkeit der Wärme in einem gegebenen Magazin auszudrücken, einen Ausdruck also für den Besitz dessen, dessen Fehlen man „dissipation" nennt. Der Verfasser meint nun, dass das Wort „motivity" diesem Mangel abhelfen könne. Csy. (O.)

P. G. TAIT. On the dissipation of energy. Phil. Mag. (5) VII. 344-346.

Die Arbeit enthält einen Brief an Sir W. Thomson betreffs des Integrals $\int\frac{dq}{t}$, welches in der mechanischen Wärmetheorie vorkommt, und welches von Clausius anders als von Tait und Thomson interpretirt ist. Diese beiden Herren sagen, dass

$$t_0\int\frac{dq}{t}$$

ein Ausdruck sei für den Wärmeverlust in einem Kreisprocess, während Clausius dies nur bei umkehrbaren Processen für richtig hält. Csy. (O.)

M. Planck. Ueber den zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie. München.

In dem ersten Theil der vorliegenden Specialabhandlung giebt der Verfasser eine Ableitung des genannten Satzes, welche ohne complicirte Rechnungen zu dem vorgesetzten Ziel führt. Es würde hier zu weit führen, den ganzen Gedankengang des Verfassers zu reproduciren. Es mag daher nur bemerkt werden, dass derselbe zunächst die Existenz einer Function, der Entropie, annimmt, durch deren Veränderung die Zustandsänderungen eines Körpers charakterisirt sind, sodann den Werth derselben für ein vollkommenes Gas, sowie für mehrere Gase bestimmt und endlich für die Veränderungen eines beliebigen Körpersystems die Function ermittelt, indem er dasselbe in Verbindung gesetzt denkt mit Wärmereservoiren, bei welchen die Träger der Wärme vollkommene Gase sind. Durch diesen Kunstgriff wird der Beweis des Satzes in seiner allgemeinen Form wesentlich erleichtert. Der zweite Abschnitt enthält eine Besprechung der sogenannten Aequivalenzwerthe der Verwandlungen, besonders um den Begriff der „Compensation" festzustellen, welcher in dem Clausius'schen Fundamentalsatze von dem Uebergange der Wärme von einem Körper niedrigerer Temperatur zu einem Körper höherer Temperatur eine wichtige Rolle spielt. Ok.

F. Crotti. Dimostrazione meccanica del secondo principio di termodinamica. Rend. Ist. Lomb. (2) III. 333-337.

Wirken auf ein elastisches System von Punkten beliebige Kräfte R, nennt man dr die Projectionen kleiner Verschiebungen der Angriffspunkte auf die Kraftrichtungen, so soll nach Angabe des Verfassers die Gleichung bestehen

$$\Sigma dR\,\delta dr = \Sigma dr.\delta dR,$$

wo δ das Zeichen für unendlich kleine Variationen der betreffenden Grössen ist. Der Verfasser giebt keinen Beweis dieses Satzes, sondern nur einige Anwendungen zunächst auf den Fall zweier Punkte, sodann auf ein Problem, welches auf eine

Formel führt, die bei gewissen Annahmen den zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie liefert. Ok.

R. Pictet. Démonstration théorique et expérimentale de la définition suivante de la température: La température est représentée par la longueur de l'oscillation calorifique des molécules d'un corps. C. R. LXXXVIII. 855-857.

Der Verfasser geht von der Annahme aus, dass die Ausdehnung der Körper durch die Wärme eine Folge von der Vergrösserung der Amplituden der Wärmeschwingungen ist. Bezeichnet man die Durchschnittswerthe dieser Amplituden für 0° und 100° mit l_0 und l_{100}, so ergiebt sich die einfache Beziehung

$$l_{100} - l_0 = \frac{\alpha}{\sqrt[3]{\frac{d}{p}}},$$

wo α der Ausdehnungscoefficient, d die Dichtigkeit, p das Atomgewicht des betreffenden Körpers ist. Schmilzt ein fester Körper, so erreichen die erwähnten Amplituden einen Maximalwerth, von welchem der Verfasser annimmt, dass er derselbe ist für alle festen Körper. Hieraus würde folgen, dass die nach der oben erwähnten Formel berechneten Amplituden mit der Schmelztemperatur umgekehrt proportional oder dass die Producte

$$\frac{\alpha . t}{\sqrt[3]{\frac{d}{p}}}$$

constant sind. Der Verfasser giebt eine Tabelle für einige Metalle, bei welchen diese Producte zwischen den Grenzwerthen 3,27 und 3,84 liegen. Ok.

H. Willote. Essai théorique sur la loi de Dulong et Petit. Cas des gaz parfaits. C. R. LXXXIX. 540-543.

Der Verfasser sucht zu beweisen, dass die mittlere lebendige Kraft der Molecularbewegung zweier Gase bei gleicher Tempe-

ratur gleich sein muss. Bezeichnet man mit A und A' ihre Moleculargewichte, mit B und B' die mittleren Geschwindigkeiten der fortschreitenden Bewegung der Molecüle, so soll $AB^2 = A'B'^2$ sein. Zu dem Zweck denkt sich der Verfasser ein Gemisch beider Gase bei gleicher Temperatur hergestellt, in welchem n Molecüle des einen und n' des andern sich befinden. Die lebendige Kraft ist dann

$$nAB^2 + n'A'B'^2.$$

Wird n und n' verändert, während $n + n'$ constant bleibt, so behält der oben angeführte Ausdruck nur dann denselben Werth, wenn $AB^2 = A'B'^2$.

Der weitere Uebergang zu dem im Titel angeführten Gesetz ist nur kurz angedeutet. Ok.

J. C. Maxwell. On Boltzmann's theorem on the average distribution of energy in a system of material points. Trans. of Cambr. XII. 549-570.

Boltzmann hat in seinen „Studien über das Gleichgewicht der lebendigen Kraft zwischen bewegten materiellen Punkten" (Wien. Ber. LVIII. 1868. s. F. d. M. I. p. 78) die allgemeine Lösung des Problems über das Gleichgewicht der kinetischen Energie zwischen einer endlichen Anzahl materieller Punkte gegeben. Watson hat dann in seinem: „Treatise on the kinetic theory of gases" die Untersuchung über die Vertheilung von Energie zwischen einem System von Theilchen entwickelt, von denen vorausgesetzt wird, dass sie aufeinander nur in sehr kleinen Entfernungen wirken. Aber es war bei beiden festgesetzt, dass die Zeit, während welcher ein Theilchen auf andere Theilchen wirke, sehr klein sei im Vergleich mit der Zeit, während welcher keine Wirkung zwischen den Theilchen stattfindet, ferner auch, dass die Zeit, während welcher ein Theilchen sich gleichzeitig in der Entfernung der molecularen Wirkung von mehr als einem Theilchen befindet, vernachlässigt werden kann. Herr Maxwell behandelt in dieser Arbeit den Boltzmann'schen Satz ohne solche Beschränkungen. Die materiellen Punkte können

aufeinander in allen Entfernungen wirken und nach einem beliebigen Gesetz, welches mit der Erhaltung der Energie verträglich ist, und es können auch beliebige äussere Kräfte auf das System wirken, vorausgesetzt nur, dass sie wieder mit jenem Gesetz verträglich sind. Die einzige für den directen Beweis nothwendige Annahme ist die, dass das System, wenn es sich in einem wirklichen Zustande der Bewegung selbst überlassen bleibt, früher oder später alle Phasen durchmachen muss, welche mit der Gleichung der Energie verträglich sind. Der Fall, in dem das System in einem festen Gefäss eingeschlossen ist, wird speciell betrachtet, sodann der eines freien Systems.

Glr. (O.)

J. C. Maxwell. On stresses in rarefied gases arising from inequalities of temperature. Phil. Trans. CLXX. 231-256.

Der Verfasser hat die Methode verfolgt, die er in seiner Arbeit: „On the dynamical theory of gases“ Phil. Trans. 1867. p. 49 gegeben hat. Er hat gezeigt, dass, wenn in einem Gase Ungleichheiten existiren, der Druck in einem gegebenen Punkt nicht in allen Richtungen derselbe ist, und dass die Differenz zwischen dem Maximum und Minimum des Druckes in einem Punkte von einer beträchtlichen Grösse sein kann, wenn die Dichtigkeit des Gases klein genug ist, und wenn die Temperaturunterschiede durch kleine Körper hervorgebracht werden, die von höherer oder niederer Temperatur sind, als das Gefäss, welches das Gas einschliesst.

Die Theorie nimmt auch Rücksicht auf die Zusammenstösse zwischen den Molecülen des Gases. Die dynamische Methode wird dabei verlassen und die statische angewandt. Statt den Weg eines einzelnen Molecüls zu betrachten und die Wirkungen jedes Zusammenstosses auf ihre Geschwindigkeitscomponenten und ihre Combinationen zu bestimmen, wird die Aufmerksamkeit auf ein besonderes Volumentheilchen gelenkt, und so wird versucht, die Veränderungen in dem mittleren Werthe solcher Com-

bination von Componenten zu bestimmen für alle die Molecüle, welche in einem gegebenen Augenblick sich in dem Element befinden. Es wird aber in dieser Arbeit kein Versuch gemacht, die Bedingungen auszudrücken, welche von einem Gase in Berührung mit einem festen Körper erfüllt werden müssen. Der Verfasser hat aber in einem im Mai 1879 hinzugefügten Appendix in Beziehung auf diese Frage einige Rechnungen gegeben, welche zu demselben Grade der Annäherung geführt sind, wie die für das Innere des Gases. Cly. (O.)

O. E. Meyer. Ueber einen Beweis des Maxwell'schen Gesetzes für das Gleichgewicht von Gasmolekülen. Pogg. Ann. (2) VII. 317-321.

L. Boltzmann. Erwiderung auf die Bemerkung des Herrn O. E. Meyer. Pogg. Ann. (2) VIII. 653-655.

In seinem Buch über „die kinetische Theorie der Gase" (§ 120) hat Herr Meyer einen Beweis des Maxwell'schen Gesetzes für die Geschwindigkeitsvertheilung auf die einzelnen Molecüle einer Gasmasse zu geben versucht. Die Richtigkeit dieses Beweises hat Herr Boltzmann (Wien. Ber. LXXVI. 1877) angefochten, worauf Herr Meyer denselben in der ersten Mittheilung zu rechtfertigen sucht, während Herr Boltzmann seinen Einwurf in der zweiten Notiz ausführlicher wiederholt. Es handelt sich dabei um die Bestimmung einer Function der Geschwindigkeitscomponenten (u_n, v_n, w_n) einer sehr grossen Zahl von Gastheilchen. Von dieser Function P, die Wahrscheinlichkeit der betreffenden Vertheilung repräsentirend, soll nachgewiesen werden, dass sie ein Maximum ist, wenn für P eine bestimmte, eben die Maxwell'sche, Function genommen wird. Herr Meyer begnügt sich zu zeigen, dass in diesem Fall

$$\delta P = 0$$

ist bei Berücksichtigung der Bedingungsgleichungen zwischen den einzelnen Geschwindigkeitscomponenten. Herr Boltzmann weist aber nach, dass in diesem Fall P überhaupt constant ist, also

nicht allein $\delta P = 0$, sondern auch die höheren Variationen verschwinden, so dass ein Maximum gar nicht stattfindet.

Ok.

P. C. F. Frowein. Eene bekende formule van Clausius. Nieuw Arch. V. 191-197.

Der Verfasser erhebt Einwände gegen die Formel von Clausius, welche sich in dessen Abhandlungen über die mechanische Wärmetheorie findet

$$l = \frac{3}{4}\frac{\lambda^3}{\pi\varrho^2},$$

wo l den mittleren Weg vorstellt, welchen ein Molecül durchläuft ohne gegen ein anderes zu stossen, λ die Entfernung zweier Molecüle und ϱ den Radius der molecularen Wirkungssphäre. Statt obenstehender Formel giebt er die folgende

$$l = \frac{\lambda^3}{\log\text{nat}\left(\frac{\lambda^2}{\lambda^2-\pi\varrho^2}\right)},$$

welche jedoch bei numerischer Berechnung keine von jener sehr verschiedene Werthe liefert.

G.

O. Reynalds. On certain dimensional properties of matter in the gaseous state. Phil. Trans. CLXX. 727-845.

Theil I. Experimentelle Untersuchungen über thermale Transpiration von Gasen durch poröse Platten, und über die Gesetze der Transpiration und Impulsion, einschliesslich eines experimentellen Beweises dafür, dass Gas kein continuirliches Plenum ist.

Theil II. Ueber eine Ausdehnung der dynamischen Gastheorie, welche auch den tangentialen und normalen Druck berücksichtigt, der durch einen veränderlichen Zustand des Gases verursacht wird, nebst einer Erläuterung der Erscheinungen der Transpiration und Impulsion. Der zweite Theil (p. 779-840) enthält die mathematische Untersuchung. Die Bezeichnung ist die, welche

Maxwell in seiner Arbeit: „On the dynamical theory of gases" (Phil. Trans. 1867) benutzt hat. Aber der Verfasser bemerkt, dass dieselbe, so reich wie sie ist, für seine eigenen Untersuchungen nicht ausreicht. Er hat gewisse bis dahin nicht in Betracht gezogene Grössen zu Hülfe nehmen müssen. So hat er z. B. Symbole haben müssen, um jede von 24 partiellen oder zusammensetzenden Grössen zu bezeichnen, die sich aus einer bisher ungetheilt betrachteten Grösse ergeben. Cly. (O.)

G. F. Fitzgerald. On the mechanical theory of Crooke's force. Phil. Mag. (5) VII. 22-29.

Die Fundamentalhypothese in dieser Arbeit ist folgende: „Wenn sich zwei Flächen mit verschiedenen Temperaturen nahe bei einander mit einem Gase zwischen sich befinden, so existirt eine Kraft, welche sie zu trennen strebt." Die Annahme dieser Kraft erläutert eine grosse Zahl von Erscheinungen, einschliesslich der Bewegung in Crooke's Radiometer und des sogenannten „sphäroidischen Zustands der Flüssigkeiten". Eine andere Hypothese ist die, dass die Kraft von ungleichem Druck in dem Gas zwischen den beiden Flächen herrührt. Die einzige Art, in der ein Zustand mit anderem als gleichförmigem Druck in einem Gase existiren kann, ist die durch Vertheilung der mittleren Geschwindigkeiten, und wenn die Zahl der Molecüle in verschiedenen Richtungen verschieden ist. Lange vorher wurde von Clausius und Maxwell bewiesen, dass die Vertheilung nicht gleichförmig ist, wenn Wärme durch ein Gas geleitet wird. Die vorliegende Arbeit zeigt, dass die Vertheilung so beschaffen ist, dass sie eine solche Kraft, wie die Crooke'sche entwickelt. Csy. (O.)

G. J. Stoney. On the curve of polarization stress as determined by Mr. Crooke's measures with the radiometer. Rep. Brit. Ass. 1879

Csy.

G. J. Stoney. On complete expansion for the conduction of heat and the polarization stress in gases. Rep. Brit. Ass. 1879.

Csy.

A. Ritter. Untersuchungen über die Höhe der Atmosphäre und die Constitution gasförmiger Weltkörper. Pogg. Ann. (2) VI. 135-144, VII. 304-317, VIII. 157-183.

Die erste dieser Abhandlungen enthält Zusätze und Ergänzungen zu den früher gefundenen Resultaten des Verfassers (F. d. M. X. 1878. 758-759) von ziemlich zweifelhaftem Werth. In der zweiten Abhandlung kehrt derselbe zu der ursprünglichen Annahme des indifferenten Gleichgewichtszustandes der Atmosphäre zurück und stellt die Frage, ob derselbe nicht mehr als eine blosse Annahme ist, d. h. ob derselbe nicht stets mit Nothwendigkeit eintreten muss. Geht man von den Vorstellungen der neueren Gastheorie aus, nach welchen alle Luftmolecüle in fortschreitender Bewegung sich befinden, so zeigt der Verfasser, dass unter der Voraussetzung des vollkommenen Gaszustandes für die ganze Atmosphäre (eine Annahme, welche übrigens der Verfasser selbst in seinen ersten Abschnitten als unzulässig bezeichnet), der indifferente Gleichgewichtszustand nothwendig eintreten muss.

In der letzten Abhandlung werden wieder die Zustände von Gaskugeln unter verschiedenen Voraussetzungen behandelt, mit specieller Anwendung auf die als Gaskugel anzusehende Erde, bei welcher das von Laplace angenommene Gesetz der Dichtigkeitsveränderung benutzt wird.

Endlich werden auch Bewegungszustände solcher Gaskugeln besprochen, welche aus periodischen Pulsationen bestehen, wenn Ausstrahlung und Wärmeverlust (in Folge dessen Contraction und Temperaturerhöhung) eintritt.

Ok.

C. Wittwer. Ueber die Abhängigkeit der specifischen Wärme der Körper von der Temperatur. Schlömilch Z. XXIV. 193-206.

Diese Abhandlung schliesst sich an frühere Entwickelungen des Verfassers an, welche theils in einer besonderen Arbeit desselben, den „Moleculargesetzen" (s. F. d. M. III. 1871. p. 500), theils in andern Arbeiten (Schlömilch Z. XIII., XIV., XV., XVII., XVIII., XX., XXIII., s. F. d. M. I. 1868. p. 349, II. 1870. p. 762, 770, 819, IV. 1872. p. 569, V. 1873. p. 583, VII. 1875. p. 616, X. 1878. p. 761), zu finden sind. Das Endresultat ist eine Formel für die specifische Wärme, in welche der Ausdehnungscoefficient der Substanz, derselbe als Temperaturfunction betrachtet, eingeht. Ok.

A. Walter. Ueber Berechnung des specifischen Volumens und der Verdampfungswärme. Pr. Tarnowitz.

Der Verfasser stellt hypothetische Formeln auf für die specifische Wärme des gesättigten Dampfes einer Flüssigkeit und für das specifische Volumen desselben, wobei beide Grössen als Temperaturfunctionen angesehen werden. Mit Hilfe derselben lässt sich durch einfache Rechnung ein Ausdruck für die Verdampfungswärme r einer Flüssigkeit finden. Bezeichnet man mit t die absolute Temperatur, so lautet derselbe für niedrigere Temperaturen

$$r = J(K - nt - \varkappa t \log t);$$

hierin ist J das mechanische Wärmeäquivalent, K, n, $\varkappa$ sind Constanten. Diese Formel giebt, bei passender Bestimmung der letzteren, Werthe für r, welche, wenigstens beim Wasserdampf, mit den beobachteten gut harmoniren. Ok.

J. Moutier. Sur la dilatation sous volume constant. Soc. Phil. Paris (7) III. 5-10.

Neue Einwürfe von rein physikalischem Interesse gegen die so vielfach angegriffenen Betrachtungen von M. Lévy (s. F. d. M. X. 1878. p. 753-756). Ok.

J. W. GIBBS. On the vapour densities of peroxide of nitrogen, formic acid, acitic acid and perchloride of phosphorus. Amer. J. XVIII. 277-283, 371-387.

Der Verfasser sucht durch theoretische Betrachtungen die Thatsache zu erklären, dass die Dichtigkeit der Dämpfe der oben aufgeführten Substanzen sehr erheblich mit der Temperatur veränderlich ist. Zunächst nimmt er an, dass die Dämpfe als Gemische zweier verschiedener Modificationen derselben Substanz zu betrachten sind, denen z. B. im Fall der Untersalpetersäure die Formeln NO_2 und N_2O_4 zukommen. Diese Dampfgemische verändern mit der Temperatur ihre Zusammensetzung (gas mixtures of convertible components). Bei einer früheren Gelegenheit (F. d. M. X. 1878. 759) hat der Verfasser Ausdrücke für die Energie und Entropie derselben berechnet, welche bei zwei Componenten von den Gewichten m_1 und m_2 die folgende Form haben

$$m_1(c_1 t + E_1) + m_2(c_2 t + E_2)$$

und

$$m_1\left(H_1 + c_1 \log t - a_1 \log \frac{m_1}{v}\right) + m_2\left(H_2 + c_2 \log t - a_2 \log \frac{m_2}{v}\right).$$

Hier bedeuten c_1, c_2 die specifischen Wärmen, E, H, a Constanten der Dämpfe, v Volumen, t Temperatur derselben. Der Verfasser stellt nun die Bedingung, dass die Entropie ein Maximum sein soll, während gleichzeitig die Energie constant bleibt. Es sind also die Grössen m die unabhängigen Veränderlichen. Bei Ausführung der Rechnung und nach einigen Transformationen erhält man dann die folgende Formel für die Dichtigkeit D des Dampfes als Function der Temperatur

$$\log \frac{D_1(D-D_1)}{(2D_1-D)^2} = -A' - B' \log t + \frac{C}{t} + \log p_1.$$

Diese Formel wird mit den bis jetzt vorliegenden Bestimmungen der Dampfdichte bei den oben angegebenen Säuren verglichen.

Ok.

J. Moser. Methode und Apparat zur Bestimmung geringer Dampfspannungen. Berl. Monatsber. 1878. 868-875.

Der Verfasser beschreibt einen einfachen Apparat, mit welchem es möglich ist, die Spannkraftsveränderungen des Dampfes zu messen, welche der Zusatz eines Salzes zu Wasser bei einer bestimmten Temperatur bewirkt. Die mit verschiedenen Salzlösungen angestellten Versuche haben den Zweck, die vor kurzem veröffentlichte Theorie von Helmholtz (vergl. F. d. M. X. 1878. 737-739) mit der Erfahrung zu vergleichen. Für eine einprocentige Salzlösung folgt aus jener Theorie die Formel

$$\frac{p_0-p}{p_0} = 0{,}0067819 \frac{1}{M.\eta}.$$

In derselben bedeuten p_0 die Spannkraft des Wasserdampfes über Wasser, p diejenige über der Salzlösung, M das Moleculargewicht des Salzes, η eine für jede Lösung besonders zu bestimmende Constante. Die durch den Versuch gefundenen Werthe $\frac{(p_0-p)}{p_0}$ stehen in guter Uebereinstimmung mit der aus der Theorie gefolgerten Formel. Ok.

G. F. Fitzgerald. On the tension of vapours near curved surfaces of their liquid. Phil. Mag. (5) VIII. 382-384.

Herr W. Thomson hat in den Proc. of Edinb. 1870 bewiesen, dass die Maximumspannung eines Dampfes an der gekrümmten Oberfläche seiner Flüssigkeit, wenn sie convex, grösser war als wenn sie eben, und kleiner, wenn sie concav war. In der vorliegenden Arbeit wird mathematisch bewiesen, dass die Differenz an Grösse proportional ist der Summe der Krümmungen der Oberfläche. Csy. (O.)

J. J. Walker. Solution of a question (5664.) Educ. Times XXXI. 93.

Die grösste Menge mechanischer Wirkung, welche man bei einem System gleicher und ähnlicher Massen erhalten kann,

deren specifische Wärme nicht mit der Temperatur variirt, ist proportional dem Ueberschuss des arithmetischen Mittels über das geometrische Mittel ihrer absoluten Temperaturen.

O.

H. STREINTZ. Beiträge zur Kenntnis der elastischen Nachwirkung. Wien. Anz. 1879. 190-192.

Kurze Uebersicht der Resultate einer Experimentaluntersuchung, welche hauptsächlich die von dem Verfasser im Jahre 1874 entdeckte Erscheinung der Accomodation betrifft.

Ok.

M. JÜLLIG. Zur Theorie der Metallthermometer. Wien. Anz. 1879. 67-69, Wien. Ber. LXXIX. 349-375.

Diejenige Vorrichtung, welche bei den Metallthermometern die Temperaturänderung anzeigt, besteht bekanntlich aus zwei an einander gelötheten Metallstreifen von verschiedenen Wärmeausdehnungscoefficienten. Der Verfasser berechnet die Deformation, welche ein solcher Streifen erleidet, wenn die Temperatur sich ändert, indem er dabei von ähnlichen Voraussetzungen ausgeht, wie bei der Theorie der Biegung eines elastischen Stabes. Der Endzweck der complicirten und umfangreichen Rechnungen besteht in der Feststellung der Lage der deformirten Theile des Streifens, besonders in der Berechnung des Krümmungsradius der Mittellinie desselben. Ok.

F. NIEMÖLLER. Deformation einer unendlich dünnen kreisförmigen Platte durch die Wärme. Schlömilch Z. XXIV. 270-276.

Der Verfasser geht von den allgemeinen Gleichungen der Elasticitätstheorie aus, wie dieselben von Kirchhoff in seinen Vorlesungen über mathematische Physik aufgestellt worden sind. Er nimmt dann an, dass die Deformation des Körpers ausschliesslich dadurch hervorgebracht worden ist, dass derselbe ungleich

erwärmt ist, speciell dass die Temperatur einer kreisförmigen Platte nur eine Function der Entfernung vom Mittelpunkt ist. Für diesen Fall berechnet er die bei der eingetretenen Deformation geleistete Arbeit. Die Variation dieser Function giebt dann die Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts. Es zeigt sich dabei, dass, wenn die Platte in der Mitte eine höhere Temperatur hat als am Rande, zwei Gleichgewichtslagen möglich sind, von denen die eine labil, die andere stabil ist. Dadurch erklärt sich die bekannte Erscheinung, dass Platten bei der Erwärmung oft mit knackendem Geräusch aus der einen in die andere Gleichgewichtslage übergehen. Ok.

C. Niven. On the conduction of heat in ellipsoids of revolution. Proc. of London XXIX. 98-102.

Auszug. Die Arbeit ist in extenso abgedruckt in Phil. Trans. CLXXI. 1880. p. 117-151. Das Referat wird daher im folgenden Bande gegeben werden. Cly. (O.)

Escary. Sur les fonctions introduites par Lamé dans la théorie analytique de la chaleur, à l'occasion des ellipsoïdes de révolution. C. R. LXXXVIII. 1027-1029.

Setzt man in der identischen Gleichung

$$\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{A+iB\cos\vartheta+iC\sin\vartheta},$$

$$A = \operatorname{tang} h\beta - ti . \operatorname{tang}\gamma,$$

$$B = \sqrt{1-\operatorname{tang}^2 h\beta}.\cos\omega - t.\cos\omega'\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\gamma},$$

$$C = \sqrt{1-\operatorname{tang}^2 h\beta}.\sin\omega - t.\sin\omega'\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\gamma}$$

und entwickelt auf beiden Seiten nach Potenzen von t, so sind die bestimmten Integrale auf der rechten Seite identisch mit denjenigen Functionen, welche Lamé bei der Behandlung der Wärmeprobleme für Rotationsellipsoide eingeführt hat. Der Beweis hierfür wird durch eine neue Substitution geführt, nach welcher sich ergiebt, dass die betreffenden Functionen aus Summen von

Producten von je zwei Factoren bestehen, von denen jeder den Differentialgleichungen genügt, welche Lamé für seine Functionen aufgestellt hat. Man kann für A, B, C noch ähnliche Substitutionen machen und kommt auch für diese Entwickelung zu demselben Resultat. Ok.

A. Oberbeck. Ueber die Wärmeleitung der Flüssigkeiten bei Berücksichtigung der Strömungen in Folge von Temperaturdifferenzen. Pogg. Ann. (2) VII. 271-292.

Wird eine Flüssigkeit derart erwärmt, dass ihre Temperatur an verschiedenen Punkten ungleiche Werthe hat, so ist auch ihre Dichtigkeit verschieden, und in diesem Fall bringt die Schwere Bewegungen in der Flüssigkeit hervor. Bei denselben muss selbstverständlich die Reibung der Flüssigkeit berücksichtigt werden. Ferner wird ein Theil der Temperaturunterschiede fortdauernd durch Wärmeleitung ausgeglichen. Da die einzelnen Processe nach bekannten Gesetzen vor sich gehen, so ist es nicht schwer, das allgemeine System von Differentialgleichungen aufzustellen, welches den beschriebenen Erscheinungen entspricht. Bezeichnet man mit ϑ, u, v, w die Temperatur und die Geschwindigkeitscomponenten nach den drei Axen im Punkte x, y, z, so lautet die allgemeine Differentialgleichung der Wärmeleitung

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial t}+u\frac{\partial\vartheta}{\partial x}+v\frac{\partial\vartheta}{\partial y}+w\frac{\partial\vartheta}{\partial z}=\frac{\lambda}{c.\varrho}\Delta\vartheta.$$

Zu derselben kommen die vier hydrodynamischen Differentialgleichungen zur Bestimmung der fünf Grössen u, v, w, p, ϑ. Die Aufgabe vereinfacht sich wesentlich für den Fall stationärer Processe. Ferner wird angenommen, dass die Dichtigkeit der Flüssigkeit sich durch die einfache Formel

$$\varrho=\varrho_0(1-\alpha\vartheta)$$

darstellen lässt. Der Verfasser führt dann für die vorkommenden fünf Unbekannten Reihen nach Potenzen von α ein, indem er setzt

$$\vartheta=\vartheta_0+\alpha\vartheta_1+\alpha^2\vartheta_2+\cdots$$
$$u=\alpha u_1+\alpha^2u_2+\cdots \quad .$$

Zur Bestimmung der einzelnen Glieder erhält man neue Gleichungssysteme. Dieselben werden für das folgende Problem gelöst: Die Flüssigkeit befinde sich zwischen zwei concentrischen Kugelschalen, von denen die innere auf einer höheren, die äussere auf einer niedrigeren Temperatur erhalten wird. Dann geht durch Leitung ein stationärer Wärmestrom durch die Flüssigkeit, während gleichzeitig stationäre Strömungen innerhalb derselben stattfinden. Für letztere lassen sich die Glieder erster Ordnung in den Reihen der Componenten vollständig berechnen. In der horizontalen Mittelebene ruht die Flüssigkeit auf einem Kreise, um welchen herum eine Wirbelbewegung stattfindet. Die Strömungscurven der Flüssigkeit sind durch Zeichnungen dargestellt. In den folgenden Abschnitten wird dann die Veränderung der Flächen gleicher Temperatur durch die Strömung, sowie die durch letztere übergeführte Wärmemenge berechnet. Ferner zeigt sich bei der Discussion dieser Ausdrücke, dass die vorgenommenen Reihenentwicklungen, wie zu erwarten war, nur in gewissen besonderen Fällen anzuwenden sind. Ein specielles Interesse beansprucht die übergeführte Wärmemenge; dieselbe ist unter sonst gleichen Umständen proportional mit dem Ausdruck

$$\frac{\varrho^4 . c^2}{\lambda . \mu^2},$$

wo ϱ die Dichtigkeit, c die specifische Wärme, μ den Reibungscoefficienten, λ das Wärmeleitungsvermögen der Flüssigkeit bedeuten. Mit Hilfe dieser Beziehung gelingt es, die Erklärung für eine von Kundt und Warburg experimentell gefundene Thatsache bei ihrer Untersuchung der Wärmeleitung der Gase zu geben.

Ok.

H. F. Weber. Untersuchungen über das Wärmeleitungsvermögen der Flüssigkeiten. Wolf Z. XXIV. 252-298.

Nachdem der Verfasser darauf hingewiesen hat, dass die bisherigen Untersuchungen über das Wärmeleitungsvermögen der Flüssigkeiten Werthe ergeben haben, welche ganz bedeutende Unterschiede zeigen, beschreibt derselbe die von ihm benutzte

sehr sinnreiche Methode zur Bestimmung dieser Constanten nach absolutem Mass (cm, Minute).

Auf eine Kupferplatte von 200 □cm Fläche wird eine zweite ebenso grosse Platte gelegt, von der ersten durch einige kleine und dünne Stücke von Glas oder von einer anderen schlecht leitenden Materie getrennt. Der Zwischenraum zwischen den Platten wird mit der zu untersuchenden Flüssigkeit ausgefüllt. Die capillare Oberflächenspannung verhindert das seitliche Ausfliessen der Flüssigkeit. Nachdem das ganze System die constante Temperatur der Umgebung angenommen hat, wird dasselbe auf einen Eisblock von 0° gelegt und in einen Raum gebracht, dessen Wände ebenfalls auf 0° erhalten werden. Die untere Platte nimmt dann nach sehr kurzer Zeit die Temperatur des Eises an. Die obere giebt ihre Wärme ab, sowohl durch die leitende Flüssigkeit an die untere Platte als durch Strahlung an die Hülle. Ihre sinkende Temperatur wird mit Hilfe eines Thermoelementes beobachtet. Die mathematische Theorie der Wärmeleitung wird benutzt, um zunächst den Nachweis zu führen, dass die Temperatur der oberen Kupferplatte sehr bald nach Beginn des Versuches an allen Punkten denselben Werth annimmt. Zu dem Zweck wird das Integral der partiellen Differentialgleichung der Wärmeleitung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k_1}{\varrho_1 c_1} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right\}$$

in der Form benutzt

$$u = \{A \cos qx + B \sin qx\} J^0_{(mr)} e^{-\frac{k_1}{\varrho_1 c_1}(q^2 + m^2)t},$$

aus welchem eine Summe zu bilden ist, wenn man für q die Wurzeln einer transcendenten Gleichung nimmt. Die weitere Discussion dieser Lösung führt zum Beweis der oben ausgesprochenen Behauptung. Bei Berücksichtigung des Wärmeflusses durch die Flüssigkeit lässt sich dann weiter zeigen, dass dieselbe Temperatur die folgende einfache Function der Zeit wird

$$u = U'_1 e^{-\frac{k}{\varrho . c} q_1^2 t}.$$

Die Abnahme dieser Temperatur wird beobachtet und aus dem logarithmischen Decrement $\frac{k}{\varrho . c}$ berechnet. Ok.

J. Stefan. Ueber die Beziehung zwischen der Wärmestrahlung uud der Temperatur. Wien. Anz. 1879. 87-89, Wien. Ber. LXXIX. 391-429.

Der Verfasser discutirt die Versuche von Dulong und Petit über die Abkühlungsgeschwindigkeit, um aus denselben den Zusammenhang zwischen der Wärmestrahlung und Temperatur eines Körpers zu ersehen. Zunächst wird durch einfache Rechnung der Einfluss der Wärmeleitung der Luft eliminirt. Ferner ersetzt der Verfasser die von Dulong und Petit benutzte Exponentialformel durch eine andere Formel, nach der die Wärmestrahlung eines Körpers der vierten Potenz der absoluten Temperatur proportional sein soll. Die neue Formel wird mit neueren Versuchen über die Wärmestrahlung verglichen. Zum Schluss folgt eine Anwendung dieser Betrachtungen auf die Berechnung der Temperatur der Sonne. Ok.

G. Röllinger. Vertheilung der Sonnenwärme auf der Erdoberfläche. Pr. Augsburg.

Die Arbeit enthält eine ausführliche Behandlung der genannten Aufgabe, unter Vernachlässigung der atmosphärischen Refraction und Absorption. Hervorzuheben ist die Discussion der Abweichungen der wirklichen Wärmevertheilung von einer gleichförmigen, sowie die Discussion der Vertheilung der Maxima und Minima. B.

Chr. Wiener. Ueber die Stärke der Bestrahlung der Erde durch die Sonne in ihren verschiedenen Breiten und Jahreszeiten. Schlömilch Z. XXII. 341-368. 1877.

Der Herr Verfasser geht aus von dem bekannten Strahlungsgesetz

$$(1.)\qquad dw = W.\cos\varepsilon\frac{dt}{2\pi},$$

worin W die Menge der Sonnenstrahlen ist, die innerhalb eines ganzen Tages gegen ein Element gestrahlt würden, wenn dies Element stets senkrecht gegen die auffallenden Strahlen stände, dw die in der Zeit dt auftreffende Strahlenmenge für den Einfallswinkel ε. Die Zeit ist dabei durch den Stundenwinkel ausgedrückt. Da

$$(2.)\qquad \cos\varepsilon = \sin\delta\sin\beta + \cos\delta\cos\beta\cos t,$$

(δ die Declination der Sonne, β die Breite des betrachteten Ortes), so ergiebt sich unmittelbar die Aenderung der Bestrahlung eines bestimmten Ortes mit der Tageszeit. Integrirt man nach t über die Dauer eines Tages (wobei die Declination als während des Tages unveränderlich angesehen wird) und multiplicirt noch, da für die verschiedenen Tage die Entfernung Sonne — Erde eine verschiedene ist, mit $\frac{a^2}{r^2}$ (a die mittlere Entfernung, r die am betrachteten Tage), so kann man die Bestrahlung desselben Ortes an verschiedenen Tagen vergleichen. Die Resultate sind in einer ausführlichen Tabelle, wie auch graphisch dargestellt.

Um weiter die relative Stärke der Bestrahlung eines Ortes während eines gewissen Zeitabschnittes zu ermitteln, wird nicht ein einzelner Ort in's Auge gefasst, sondern das Mittel für alle Punkte eines Parallelkreises genommen. Diese mittlere Bestrahlung während der Zeit dt ist gleich der vorher berechneten Bestrahlung während eines ganzen Tages mal $\frac{dt}{2\pi}$. Indem nun weiter die Tageslänge und die Declination der Sonne durch die Länge λ der Sonne ausgedrückt wird, ebenso dt durch $d\lambda$, indem endlich auch r mittels des ersten Kepler'schen Gesetzes eliminirt wird, ergiebt sich für die mittlere Bestrahlungsstärke di eines Flächenelements während der Zunahme von λ um $d\lambda$ einer der folgen-

den beiden Ausdrücke:

$$(3.)\quad di = \frac{Jd\lambda}{2\pi^2\sqrt{1-e^2}}\Big\{\sin\beta\sin\sigma\sin\lambda\, arc\cos\Big(\frac{-\operatorname{tg}\beta\sin\sigma\sin\lambda}{\sqrt{1-\sin^2\sigma\sin^2\lambda}}\Big) + \sqrt{\cos^2\beta-\sin^2\sigma\sin^2\lambda}\Big\}$$

oder

$$(3a.)\quad di = \frac{Jd\lambda}{2\pi\sqrt{1-e^2}}\sin\beta\sin\sigma\sin\lambda.$$

Hierbei bezeichnet e die Excentricität der Erdbahn, σ die Schiefe der Ekliptik, β die Breite des betrachteten Parallelkreises und J die Stärke der Sonnenbestrahlung eines Flächenelements in einem Jahre im Abstande a bei stets senkrecht auffallenden Sonnenstrahlen. Von den beiden obigen Ausdrücken für di gilt der zweite für 24-stündige Tageshelle, der erste für nicht 24-stündige Tageshelle. Die Integration des Ausdrucks (3) führt auf elliptische Integrale aller drei Gattungen. Mit Hülfe dieser hat der Herr Verfasser $\frac{i}{J}$ berechnet für die geographischen Breiten 0, $\pm 10^\circ$, $\pm 20^\circ$, ... $\pm 90^\circ$ und für die astronomischen Vierteljahre, die zwischen den Werthen der Sonnenlänge λ von 0°, 90°, 180°, 270°, 360° liegen, und andererseits für die Abschnitte jener Zeiträume, in denen λ die Werthe 45°, 135°, 225°, 315° besitzt. (Die letzteren Abschnitte nennt der Verfasser im Gegensatz zu den astronomischen die meteorologischen Vierteljahre.) Dieser Abschnitt besonders ist in ausgedehnterer Weise behandelt, als es von früheren Autoren geschehen ist; namentlich ist die Wahl auch anderer Abschnitte des Jahres, als die von den Tag- und Nachtgleichen und den Sonnenwenden begrenzten, neu und von besonderem Interesse. Die Resultate sind auch hier in ausführlichen Tabellen und graphisch mitgetheilt.

Zum Schluss wird noch die gesammte Bestrahlung je einer Erdhälfte bestimmt. Unter Voraussetzung der Kugelgestalt der Erde ist die auf die nördliche Erdhälfte auffallende Strahlenmenge während der Zeit, wo sich λ um $d\lambda$ ändert,

$$\frac{3h^2}{4\sqrt{1-e^2}}\,d\lambda(1+\sin\sigma\sin\lambda),$$

wobei h der Erdradius. Aus dieser Formel werden einige Folgerungen gezogen und sodann die Aenderungen angegeben, die durch die Abweichung von der Kugelgestalt entstehen.

Die Zahlenrechnungen ergeben eine grosse Menge interessanter Einzelresultate, auf die näher einzugehen der Raum verbietet. Wn.

Zwölfter Abschnitt.

Geodäsie und Astronomie.

Capitel 1.

Geodäsie.

MEISSEL. Aus einem Schreiben an den Herausgeber. Astr. Nachr. XCV. No. 2261, 68-74.

MEISSEL. Beitrag zur Sphärik. Astr. Nachr. XCVI. No. 2289, 140-141.

Es seien a, b, c die Seiten, α, β, γ die gegenüberliegenden Winkel in einem sphärischen Dreieck, ferner

$$\frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma} = k, \quad \Delta^2 = 1-k^2\sin^2\varphi,$$

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta}, \quad \frac{2K}{\pi}x = \int_0^{\alpha} \frac{d\varphi}{\Delta},$$

endlich q der Modulus der hierzugehörigen Thetafunctionen und

$$f(q) = \frac{4\sqrt{q}}{1+q},$$

so hat man, wie gezeigt wird,

$$\alpha = x+\sum_1^\infty f(q^{2n})\frac{\sin 2nx}{2n},$$

$$a = \sum_1^\infty f(q^{2n-1})\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$$

Die drei auf diese Weise auftretenden Hülfsgrössen x lassen sich stets als Winkel eines ebenen Dreiecks ansehen. Die Anwendung dieser eleganten Formeln führte den Verfasser zur Auflösung des sphärischen Dreiecks für den Fall, dass entweder

$$a-\alpha,\quad b-\beta,\quad c-\gamma,$$

oder

$$a+\alpha,\quad b+\beta,\quad c+\gamma$$

bekannt sind. B.

J. K. Franke. Die Grundlehren der trigonometrischen Vermessung im rechtwinkligen Coordinatensystem. Leipzig. Teubner.

Helmert. Die geodätische Uebertragung geographischer Coordinaten. Astr. Nachr. XCIV. No. 2252, 313-320.

Anknüpfend an eine Arbeit von Herrn Winterberg (Astr. Nachr. No. 2119), betreffend die geodätische Uebertragung von Länge, Breite und Azimuth, zeigt der Verfasser, wie man auf elementare Weise ohne Benutzung der elliptischen Functionen zu Endformeln gelangen könne, welche mit den l. c. mitgetheilten identisch werden, sobald man für das in den elliptischen Functionen auftretende Jacobi'sche q eine andere Hülfsgrösse einführt. Ferner wird discutirt, wie sich die beiden Formen der Endgleichungen in Bezug auf die Bequemlichkeit für numerische Rechnung verhalten. B.

E. Adan. Attractions locales. Correction des éléments de l'ellipsoide osculateur. Mém. in 8° de Belg. XXIX.

E. Adan. Comparaison entre les coordonnées réelles et les coordonnées théoriques d'un lieu de la terre. Déviation ellipsoidale. Mém. in 8° de Belg. XXIX.

E. Adan. Mémoire sur l'ellipsoide unique. Mém. in 8° de Belg. XXIX.

Der Zweck des Verfassers ist, die geodätischen Elemente des Erdellipsoids so zu verbessern, dass die Resultate der geodätischen Rechnungen mit der directen Bestimmung der astronomischen Coordinaten für einen gegebenen Ort übereinstimmen. Die geodätischen Coordinaten unterscheiden sich von den astronomischen nicht nur, weil diese durch locale Einflüsse beeinflusst sind, sondern auch, weil sie von dem osculirenden Ellipsoid abhängen, das in jedem Lande zur Ausführung der Rechnungen angenommen ist. Mn. (O.)

R. Hoppe. Fragen aus der mathematischen Geographie zur Uebung. Grunert Arch. LXIII. 331-334.

Die Erde wird als Rotationsellipsoid vorausgesetzt. Es finden sich sieben Fragen nebst Antworten, zu deren Charakterisirung wir die erste anführen. Wie gross ist der Abstand zweier Orte von gleicher Breite, deren Mittage um eine Minute differiren, längs dem Parallelkreis? O.

M. Sadebeck. Hülfstafel für die Differenz zwischen dem sphäroidischen und dem sphärischen Längenunterschied zweier Punkte auf der Erdoberfläche. Astr. Nachr. XCV. No. 2270, 207-220.

B.

G. Petrosemolo. Dimostrazione e discussione del metodo di Ivory per la determinazione della latitudine e longitudine. Riv. Marit. XII. 127-136.

Winterberg. Ueber die geodätische Linie. Astr. Nachr. XCV. No. 2271, 223-228; No. 2272, 239-250; No. 2274, 271-280.

Im Anschlusse an seine früheren Aufsätze (F. d. M. 1877. IX. 776) behandelt der Verfasser zunächst die Aufgabe, für einen geodätischen Bogen von bekannter Länge aus dem Längenunter-

schiede und einer Breite alle übrigen Stücke zu finden. Daran schliessen sich Betrachtungen über die allgemeine Auflösung sphäroidischer Dreiecke. B.

C. LÜDECKE. Die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate in der niederen Geodäsie. Z. f. Verm. VIII. 438-456.

Enthält eine elementare Herleitung der Rechnungsvorschriften nebst Beispiel für den Fall, dass ein Punkt beim Vorwärts- oder Rückwärtseinschneiden mehrfach bestimmt ist. B.

J. B. J. LIAGRE. Calcul des probabilités et théorie des erreurs avec des applications aux sciences d'observations en général et à la géodésie en particulier. Deuxième édition par C. Peny.

Siehe Abschn. IV. p. 157.

H. SEELIGER. Ueber die Vertheilung der Vorzeichen der nach einer Ausgleichung übrig bleibenden Fehler. Astr. Nachr. XCVI. No. 2284, 49-62.

Als Kriterium, ob die interpolatorische Darstellung einer Beobachtungsreihe als erschöpfend anzusehen ist, benutzt man, abgesehen von der Grösse der nach der Ausgleichung übrigbleibenden Fehler, die Häufigkeit der positiven und negativen Vorzeichen, sowie die Häufigkeit der Zeichenwechsel und Zeichenfolgen. Die vorliegende Arbeit enthält nun eine Begründung des zuletzt genannten, in der Regel als selbstverständlich hingenommenen Kriteriums, indem die Ausdrücke für die Wahrscheinlichkeit aufgesucht werden, dass bei einer in bestimmter Weise angeordneten Beobachtungsreihe die Häufigkeit der Zeichenwechsel zwischen bestimmten Grenzen liege. Hierbei gestalten sich die Resultate und der Beweisgang ganz ähnlich wie für das Bernoull'sche Theorem in der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

B.

A. Favaro. Procedimento grafico per la riduzione degli angoli al centro di stazione. Ing. V. 1-8.

Graphische Lösung der Aufgabe der Winkelcentrirung, reproducirt aus „Tulla, Annäherungs-Constructionen etc. Karlsruhe 1832“. B.

W. Seibt. Genauigkeit geometrischer Nivellements. Civiling. XXV. 353-382.

Nach Besprechung der hierhergehörigen Arbeiten von Hagen und Jordan theilt der Verfasser in extenso eine Beobachtungsreihe mit, welche speciell zu dem Zwecke angestellt wurde, für eine bestimmte Methode unter normalen Verhältnissen den mittleren Fehler einer Stationsbeobachtung und seine Abhängigkeit von der Zielweite zu ermitteln. Daran schliesst sich die Discussion dieser Beobachtungen, sowie Betrachtungen über die zweckmässigsten Zielweiten und über die erreichbare Genauigkeit. B.

Lindemann. Directe trigonometrische Berechnung der Aufgabe der unzugänglichen Entfernung. Z. f. Verm. VIII. 196-197.

Firmenich. Directe trigonometrische Berechnung der Aufgabe der unzugänglichen Entfernung. Z. f. Verm. VIII. 254-255.

B.

F. Zrzavý. Hülfstafel zur Berechnung der Höhenunterschiede aus gemessenen Zenithdistanzen. Prag. Ber. 1879. 483-489.

Inhalt durch den Titel gegeben. B.

Capitel 2.

Astronomie.

A. Sawitsch. Abriss der praktischen Astronomie vorzüglich in ihrer Anwendung auf geographische Ortsbestimmung. Nach der zweiten russischen Original-Ausgabe herausgegeben von C. F. W. Peters. Leipzig. Roncke. 8°.

Im ersten Abschnitt sind die zu Ortsbestimmungen gebräuchlichen Instrumente behandelt; die Bestimmung der Breite und der Zeit durch die Messung von Zenithdistanzen erfolgt im zweiten, mittels des Durchgangsinstrumentes im dritten, und im vierten die Bestimmung des Azimuths. Der fünfte Abschnitt behandelt die Längenbestimmungen. Eine eingehende Besprechung findet sich Schlömilch Z. XXIV. Hl. A. 170-172. O.

Klinger. Beiträge zur mathematischen Geographie. Grunert Arch. LXIII. 337-368.

Herleitung von Parallaxenformeln unter der Annahme, dass die Gestalt der Erde ein Rotationsellipsoid ist. O.

A. de Gasparis. Nuove serie relative al moto de' pianeti nella ellisse. Rend. di Nap. XVIII. 67-68.

F. Kühnert. Folgerungen aus v. Oppolzer's neuer Methode für die Bearbeitung späterer Oppositionen. Astr. Nachr. XCV. No. 2266, 143-150; No. 2269, 203-206.

Die genannte Methode (cf. F. d. M. X. 1878. p. 776) beruht darauf, dass die rechtwinkligen Coordinaten der Planeten sich in der Form

$$x = ax_0 + b\xi_0, \quad y = ay_0 + b\eta_0, \quad z = az_0 + b\zeta_0$$

darstellen lassen, wo die $x_0\, y_0\, z_0$ die Coordinaten, und die $\xi_0\, \eta_0\, \zeta_0$ die Componenten der Geschwindigkeit für die Zeit $t = t_0$ bedeuten, während a und b Functionen aller dieser Grössen sind, die sich jedoch durch eine Drehung des Axensystems nicht ändern. Wenn es sich nun um die Verbesserung der Bahnelemente aus mehreren Oppositionen handelt, so reichen die von Herrn v. Oppolzer gegebenen Reihenentwicklungen zur Berechnung von a, b und deren Ableitungen nach den $x_0\, \xi_0 \dots$ nicht aus; deshalb werden in dem vorliegenden Aufsatze die geschlossenen Ausdrücke für a und b aufgesucht und zur Herleitung der erforderlichen Hülfsgrössen benutzt. B.

A. DE GASPARIS. Sul valore inverso del cubo della distanza variabile di due pianeti, espresso con una serie ordinata secondo le potenze del tempo. Rend. di Nap. XVIII. 80-83.

A. DE GASPARIS. On some formulae expressing the value of the excentric anomaly in terms of the mean anomaly. Monthl. Not. XXXIX. 386-387.

Ausdrücke für die excentrische und wahre Anomalie, den Radiusvector, die heliocentrischen Coordinaten etc. als Functionen der mittleren Anomalie. Glr. (O.)

A. DE GASPARIS. Sulla variazione degli elementi ellittici nelle orbite planetarie. Rend. di Nap. XVIII. 282-287.

E. NEISON. On the general solution of the problem of disturbed elliptic motion. Monthl. Not. XXXIX. 149-161.

Nach einem Resumé über die Methoden der gestörten Elemente und gestörten Coordinaten bemerkt der Verfasser, er habe lange geglaubt, dass es durch Wahl passender Coordinaten und

eine eigenthümliche Art der Transformation der Differentialgleichungen möglich sein würde, eine vollständige und allgemeine Lösung des Problems der gestörten elliptischen Bewegung zu erhalten, d. h. eine Lösung, welche so weit allgemein sein würde, dass es möglich wäre, die Störungen n^{ter} Ordnung der störenden Kräfte bestimmt aufzustellen und welche unabhängig wäre von speciellen Werthen der Elemente. Eine solche Lösung könnte man erhalten, wenn es möglich wäre, einen einfachen Ausdruck für die vollständigen Störungen von der Ordnung der n^{ten} Potenz der störenden Kräfte zu bilden. Dem Verfasser ist es geglückt, einen sehr einfachen Ausdruck dieser Art zu finden. In der vorliegenden Arbeit giebt er nun einen kurzen Bericht über seine Resultate.

Glr. (O.)

H. Gyldén. Ueber die Bahn eines materiellen Punktes, der sich unter dem Einflusse einer Centralkraft von der Form $\mu_1 r^{-2} + \mu_2 r$ bewegt. Öfv. v. Stockh. XVII. 1-67.

Die Lösung dieser bereits von Legendre behandelten und auf elliptische Functionen führenden Aufgabe wird mit aller Ausführlichkeit entwickelt und ist von Interesse als eines der vorläufig noch nicht sehr zahlreichen passenden Beispiele für die Anwendung jener Transcendenten. Ferner verdienen die Betrachtungen hervorgehoben zu werden, welche der Verfasser, anknüpfend an die gefundenen Resultate, über die Bewegungen in extraplanetaren Räumen anstellt. B.

A. Weiler. Ueber die Differentialgleichungen der Bewegung in dem Problem der drei Körper. Astr. Nachr. XCVI. No. 2291, 161-176; No. 2292, 177-182.

Es genügt die Bemerkung, dass in dieser Arbeit die Bewegungsgleichungen des Dreikörperproblems durch Einführung von Polarcoordinaten auf ein System 7^{ter} Ordnung reducirt werden.

B.

Th. Bredichin. Mouvement de la matière cométaire sur une hyperbole convexe vers le soleil. Astr. Nachr. XCIV. No. 2241, 143.

Formeln für die Bewegung eines Punktes, der von einem festen Centrum umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung abgestossen wird. B.

A. Hall. On a theorem of Lambert. Analyst VI. 171-173.

Der Verfasser reproducirt einen Satz von Lambert über die scheinbare Bahn eines Cometen, veröffentlicht in den Memoiren der Berliner Akademie 1771. p. 352, mit Lambert's eigenem Beweise. Glr. (O.)

H. Seeliger. Aus einem Schreiben an den Herausgeber. Astr. Nachr. XCIV. No. 2248, 253-256.

Mit Hülfe der Gauss'schen Sätze über die Saecularstörungen wird auf einfache Weise das Theorem von Lagrange bewiesen, dass nämlich die Durchschnitte je zweier Planetenbahnen sich auf diesen selbst mit constanter Geschwindigkeit rückläufig bewegen, sobald man ihre gegenseitige Neigung constant lässt.
B.

A. de Gasparis. Schreiben an den Herausgeber. Astr. Nachr. XCIV. No. 2251, 301; No. 2256, 384; XCV. No. 2270, 221-222.

Anfangsglieder für Reihenentwickelungen nach Potenzen der Zeit resp. der mittleren Anomalie für einige Ausdrücke, welche in der Theorie der Planetenbewegung auftreten. B.

---

v. Oppolzer. Entwickelung der Differentialquotienten der wahren Anomalie und des Radiusvector nach der Excentricität in nahezu parabolischen Bahnen. Astr. Nachr. XCV. No. 2257, 13-16.

Auszug aus einer bereits F. d. M. X. 1878. p. 781 besprochenen Arbeit. B.

A. DE GASPARIS. Formules relatives à la théorie des perturbations planétaires. C. R. LXXXVIII. 413-414; Rend. di Nap. XVIII. 34.

A. DE GASPARIS. Formules relatives aux perturbations des planètes. C. R. LXXXVIII. 637-638; Rend. di Nap. XVIII. 136-141.

A. DE GASPARIS. Sur le calcul des perturbations. C. R. LXXXVIII. 908-909; Rend. di Nap. XVIII. 227-232.

Enthält die Anfangsglieder der Reihen, zu denen man kommt, wenn man im Dreikörperproblem die Coordinaten nach Potenzen der Zeit entwickelt. B.

O. CALLANDREAU. Sur les moyens employés par M. Gyldén pour régler la convergence des développements trigonométriques représentant les perturbations. C. R. LXXXVIII. 960-963.

An einem Beispiele wird ein von Gyldén angegebener Kunstgriff erläutert, der die Convergenz trigonometrischer Reihen, welche nur für ein Halbkreisintervall des Arguments gebraucht werden, zu vergrössern gestattet. B.

A. DE GASPARIS. Sulla espressione di uno dei termini della correzione delle coordinate ellittiche nella teoria delle perturbazioni planetarie. Acc. R. d. L. (3) III. 92.

A. DE GASPARIS. Sopra alcuni elementi ellittici in funzione dell' anomalia media espressa in parti del raggio. Acc. R. d. L. (3) III. 111.

A. de Gasparis. Sul valore inverso del cubo del raggio vettore di un pianeta espresso con una serie ordinata secondo le potenze del tempo. Acc. R. d. L. (3) III. 144-146, Rend. di Nap. XVIII. 80-83.

A. de Gasparis. Extract of a letter to Mr. Sylvester. Am. J. II. 99-100.

Für die in der Störungstheorie auftretenden Bestimmungsstücke werden Reihenentwickelungen nach Potenzen der mittleren Anomalien gegeben. B.

F. Tisserand. Sur le développement de la fonction perturbatrice dans le cas où, les excentricités étant petites, l'inclinaison mutuelle des orbites est considérable. C. R. LXXXVIII. 97-103, 137-142, 201-205, 1229-1234; LXXXIX. 553-558, 585-587.

Der im Wesentlichen aus Formelentwickelungen bestehende Inhalt dieser interessanten Arbeit lässt eine auszugsweise Wiedergabe nicht zu; die behandelte Aufgabe ist folgende: Es ist der Ausdruck

$$\{a^2+a'^2+2aa'(\mu\cos x+\nu\cos y)\}^{-\frac{1}{2}}$$

nach den Vielfachen von x und y in eine trigonometrische Reihe zu entwickeln, wenn

$$\mu=\cos^2\tfrac{1}{2}J,\quad \nu=\sin^2\tfrac{1}{2}J.$$

Die Coefficienten werden unendliche Reihen, in denen jedes Glied das Product aus einer Function der a und a' in eine Function von μ resp. ν ist. Die in den vier ersten Artikeln befolgte Methode benutzt die Resultate einer Arbeit von Jacobi (Crelle J. XV.) über die Entwickelung von

$$(l+2l'\cos\varphi+2l''\cos\varphi')^{-n},$$

während in den letzten beiden Artikeln die Aufgabe nach einem zweiten sehr eleganten Verfahren erledigt wird, und zwar durch Entwickelung von

$$\frac{\sin(2n+1)V}{\sin V}$$

nach den Vielfachen von x und y in eine trigonometrische Reihe, wo

$$\cos V = \mu\cos x + \nu \sin x.$$

B.

E. Mathieu. Mémoire sur la théorie des perturbations des mouvements des comètes. Liouville J. (3) V. 379-405.

Der Grundgedanke der Methode besteht darin, dass in den Formeln für die Elementenstörungen statt der Zeit als unabhängige Variable eine Grösse n eingeführt wird, wo n^2 gleich der Differenz „Radiusvector des Cometen minus Periheldistanz“ ist. Die zu integrirenden Ausdrücke werden dann nach Potenzen von n entwickelt. Der Inhalt der Abhandlung besteht in der Entwickelung der hieraus resultirenden Rechnungsvorschriften.

B.

E. Sourander. Sur l'équation dont dépendent les inégalités séculaires des planètes. Liouville J. (3) V. 195-209.

Nach einer gedrängten Uebersicht über die bisherigen Arbeiten, welche die genannte, viel behandelte algebraische Gleichung zum Gegenstande haben, giebt der Verfasser einen neuen Beweis dafür, dass die Discriminante jener Gleichung sich als eine Summe von Quadraten darstellen lässt. B.

A. Hall. The motion of a satellite. Analyst VI. 131-139.

Das Problem ist, die scheinbare Bewegung eines Satelliten zu bestimmen, unter der Voraussetzung, dass die Bahn desselben um seinen Hauptkörper bekannt ist und dass seine Bewegung rein elliptisch ist. Bessel's und Murth's Lösungen dieses Problems werden vollständig auseinandergesetzt. Der

Verfasser leitet dann Correctionsformeln für die Elemente der Bahn des Satelliten durch Vergleichung mit den Beobachtungen ab.

Glr. (O.)

Abel Souchon. Note sur une inégalité du quatrième ordre qui existe dans les moyens mouvements des satellites Titan et Japhet de Saturne. Astr. Nachr. XCV. No. 2263, 97-102.

Die Ungleichung, deren angenäherte Berechnung hier mitgetheilt wird, besitzt das Argument fünfmal Titan minus Japetus.

B.

E. Neison. On a general method of treating the lunar theory. Mem. of R. Astr. Soc. XLIV. 1-49.

Die Arbeit enthält die theoretische Grundlage, auf der der Verfasser eine vollständige analytische Entwickelung der Mondtheorie aufgebaut hat. Ohne neue Principien aufzustellen, besteht doch die Methode, durch welche die Entwickelung bewirkt wird, aus einer ganz neuen Anwendung bekannter Processe. In dem System von Plana, Pontécoulant und Delaunay ist jedem Gliede ein specifischer algebraischer Coefficient gegeben, so dass, wenn in einem Gliede ein Fehler entdeckt wird, es nöthig ist, ihn durch jeden folgenden Schritt zu verfolgen und jeden von ihnen zu verbessern, um die Wirkung des Fehlers fortzuschaffen. Bei des Verfassers Methode wird jedes Argument durch ein festes Symbol dargestellt, welches nicht allein seine Entstehung zeigt, sondern auch die Art, in der es in die Theorie eintritt. Jeder Schritt geschieht mit diesen allgemeinen Symbolen, und das Endresultat stellt sich als eine explicite Function dieser allgemeinen Symbole dar. Es ist dann nur nothwendig, für diese Symbole ihre speciellen Werthe zu substituiren und die resultirenden Coefficienten auf ihre einfachsten Glieder zu reduciren, wenn der vollständige Werth gebraucht wird. Die Ent-

wickelung ist bis zur siebenten Ordnung und in gewissen Gliedern bis zur achten Ordnung getrieben.

Glr. (O.)

J. J. Åstrand. Two short and easy methods for correcting lunar distances. Monthl. Not. XXXIX. 425-428.

Der Verfasser giebt zwei Methoden zur Correction von Monddistanzen, welche in der Genauigkeit mit denen von Mendoza y Rios und Witchell übereinstimmen, aber beträchtlich kürzer und bequemer sind. Glr. (O.)

P. Puiseux. Sur l'accélération séculaire du mouvement de la Lune. Ann. de l'Éc. N. (2) VIII. 361-444.

Da der wesentliche Inhalt der Arbeit von einem umfangreichen Formelapparate gebildet wird, so muss sich Referent auf die Angabe beschränken, dass der Verfasser nach einer historischen Uebersicht den Ausdruck für die Säculargleichung der Mondlänge herleitet, soweit dieser von der Aenderung der Erdexcentricität abhängt. Die Methode ist die der Variation der Elemente in einer Gestalt, welche 1833 von Poisson gegeben wurde. Das numerische Resultat (6,3″) entfernt sich nur unerheblich von den Werthen, die Adams und Delaunay gefunden haben.

B.

H. Gylden. Démonstration, au moyen des fonctions elliptiques, d'un théorème dans la théorie de la libration de la Lune. C. R. LXXXIX. 932-933.

Beweis des von Laplace aufgestellten Satzes, dass die mittlere Umlaufs- und Umdrehungsdauer des Mondes einander gleich bleiben müssen, so bald diese Gleichheit ursprünglich innerhalb gewisser Grenzen angenähert stattfand. B.

G. H. DARWIN. A tidal theory of the evolution of satellites. Observatory III. 79-84.

Allgemeiner Bericht über des Verfassers Untersuchungen hinsichtlich der Entstehung der Satelliten unter der Voraussetzung, dass der Planet zähflüssig ist. Die Arbeit wird ausführlich in den Publicationen der Royal Society erscheinen.

Glr. (O.)

G. H. DARWIN. On the bodyly tides of viscous and semi-elastic spheroids and on the ocean tides on a yielding nucleus. Phil. Trans. CLXX. 1-36.

G. H. DARWIN. On the precession of a viscous spheroid and on the remote history of the earth. Phil. Trans. CLXX. 447-538.

G. H. DARWIN. Problems connected with the tides of a viscous spheroid. Phil. Trans. CLXX. 539-593.

Der allgemeine Inhalt dieser Reihe von Arbeiten ist durch die Titel genügend gekennzeichnet. Es mögen hier nur die in der dritten Arbeit behandelten Probleme erwähnt werden. 1) Säculare Veränderungen des Sphäroids und gewisse Fluthen zweiter Classe. 2) Vertheilung der Wärme, erzeugt durch innere Reibung, und säculare Abkühlung. 3) Wirkungen der Trägheit in den Oscillationen zäher, flüssiger und elastischer Sphäroide. Am Schluss jeder Arbeit wird ein Resumé der Schlüsse gegeben, zu denen die Arbeiten gelangt sind. Diese sind aber sehr lang und wären besser in abgekürzter Form gegeben.

Cly. (O.)

M. VODUŠEK. Neue Methode für die Berechnung der Sonnen- und Mondesparallaxe aus Planetenvorübergängen und Sonnenfinsternissen. Pr. Laibach.

Die „neue Methode“ läuft auf die Combination gleichartiger Contactbeobachtungen an verschiedenen Orten hinaus. Ein näheres Eingehen erscheint überflüssig, da die Bemerkungen und Vorschläge des Verfassers eine fast naive Unbekanntheit mit den eigentlichen Schwierigkeiten der Aufgabe verrathen.

B.

T. N. Thiele. Castor. Calcul du mouvement relatif et critique des observations de cette étoile double. Festkr. Kjöb.

Was in dieser übrigens rein astronomischen Arbeit den Mathematiker interessiren kann, sind ausser der zur Kritik der Beobachtungen und namentlich zur Erforschung der systematischen Fehler der verschiedenen Beobachter angewandten Methode auch die folgenden Interpolationsformeln

$$r.10^{a(R-P)} = c(t-u), \quad r.10^{(P-R)} = c(v-t),$$

welche zur Berechnung von Doppelsternbahnen besonders geeignet sind.

Gm.

M. Hall. Determination of the solar parallax from the opposition of Mars 1877. Mem. of R. Astr. Soc. XLIV. 51-121.

Die Arbeit enthält wesentlich Daten, die aus Beobachtungen abgeleitet sind, zugleich aber auch einige Untersuchungen über mathematische Formeln, die mit dem Gegenstande in Verbindung stehen.

Glr. (O.)

E. Neison. On the determination of the solar parallax from the parallactic inequalities in the longitude of the moon and on the correction to Hansen's coefficient of the annual coefficient. Monthl. Not. XXXIX. 394-402.

Die Arbeit bezieht sich auf die Herleitung der Sonnenparallaxe aus der parallactischen Ungleichheit in der Mondtheorie.

Glr. (O.)

A. Hall. Stellar parallax. Analyst VI. 33-40.

Bericht über die zur Bestimmung der Sternparallaxe angewandten Methoden.

Glr. (O.)

H. Gyldén. Sur la théorie mathématique des changements d'éclat des étoiles variables. C. R. LXXXIX. 598-600.

Kurze Andeutungen über die Lösung der Aufgabe: Die scheinbare Helligkeit eines Sternes von ungleichartiger Oberflächenbeschaffenheit zu berechnen, wenn derselbe frei um seinen Schwerpunkt rotirt.

B.

J. A. C. Oudemans. Sur l'orbite annuelle que les étoiles fixes semblent décrire au ciel par suite de l'aberration de la lumière. Arch. Néerl. XIV. 143-154.

Siehe F. d. M. X. 1878. p. 790.

G.

R. v. Sterneck. Ueber die Aenderungen der Refractionsconstante und die Störungen der Richtung der Lothlinie im Gebirge. Wien. Ber. LXXX. 1-37.

Der Verfasser hat in den Jahren 1876/77 auf einer Reihe von Bergspitzen in Steiermark, Oberösterreich und Böhmen in Höhen bis zu 2500 m Polhöhenbestimmungen ausgeführt, welche auf Circummeridianzenithdistanzen von Süd- und Nordsternen beruhen. Bei der Anordnung der Beobachtungen giebt jede Reihe ausser der Polhöhe auch noch einen Werth der Refractionsconstante, gültig für das Mittel aus den Ständen der meteorologischen Instrumente während der Reihe. Die Vergleichung dieser Werthe mit der Bessel'schen Refraction lässt Abweichungen

übrig, welche eine sehr bemerkenswerthe Abhängigkeit von der psychrometrischen Differenz zeigen; allerdings ist der Betrag dieser Abhängigkeit erheblich grösser als sich mit den sonstigen Erfahrungen verträgt. Gleichwohl sind die Untersuchungen geeignet, das bisherige Axiom von der Einflusslosigkeit der Feuchtigkeit zu erschüttern. Den Schluss bildet eine Vergleichung der beobachteten Polhöhen mit den geodätisch übertragenen, bei der recht ansehnliche Lothablenkungen übrig bleiben. B.

A. Dorna. Sullo strumento dei passagi tascabile di Steger e sulle equazione fondamentali da cui dipende l'uso di esse e degli strumenti dei passagi in generale. Atti di Torino XIV. 564-573.

A. Dorna. Sulla determinazione del tempo collo strumento dei passaggi trasportabile. Atti di Torino. XIV. 761-767.

Die erste Note enthält die Beschreibung eines Durchgangsinstruments mit horizontalem Fernrohr und total reflectirendem Objectivprisma, ferner die Aufstellung der Grundgleichungen für den Gebrauch desselben; die zweite Note giebt eine Methode der Auflösung jener Gleichungen zur Zeitbestimmung.

B.

Oswald Meyer. Kirkens Paaskeregning. Kjbhvn. Forh. 1879. 195-234.

Der Verfasser meint, die bisher gemachten Versuche, die Richtigkeit der von Gauss 1800 und 1816 veröffentlichten Formel zur Berechnung des Eintreffens des Osterfestes zu beweisen, seien nicht hinlänglich umfassend. Er giebt deshalb hier eine neue Darstellung der Entwickelung dieser Formel und zeigt, dass das Gauss'sche Verfahren in gewissen Punkten modificirt werden kann, namentlich so, dass die Division mit sieben überflüssig wird. Ferner giebt er an, wie die Formel zur Lösung des umgekehrten Problems, die Bestimmung des Jahres, in

welchem der Ostertag auf einen gegebenen Monatstag fällt, verwendet werden kann. Gm.

H. A. Newton. On the direct motion of periodic comets of short period. Rep. Brit. Ass. 1879.

Der Verfasser will in der Arbeit zeigen, dass die rechtläufige Bewegung periodischer Cometen kein genügender Grund ist, um eine Entstehung derselben anzunehmen, die von der anderer verschieden ist. In der That, die rechtläufige Bewegung kann aus der Annahme hervorgehen, dass die Cometen durch die Wirkung von Jupiter und der anderen Planeten in ihre Bahnen geworfen sind. Der Verfasser meint, dass die Asteroiden einen ausserhalb liegenden Ursprung haben, und ähnlich verhalte es sich mit den kleineren Satelliten.

Csy. (O.)

C. Lagrange. De l'origine et de l'établissement des mouvements astronomiques: Deuxième partie. Mém. cour. de Belg. XLII.

G. v. d. Mensbrugghe et F. Folie. Rapports sur ce mémoire. Bull. de Belg. (2) XLVII. 4-15.

Anwendung der im ersten Theil (s. F. d. M. X. 1878 p. 620) auseinandergesetzten Principien. Der Inhalt ist folgender: Man kann einen Anfangszustand des Sonnensystems begreifen unter dem Einfluss anziehender und abstossender Kräfte. Die Massen, welche es zusammensetzen, befinden sich in den im ersten Theil auseinandergesetzten Bedingungen. Sie haben also Rotationsbewegungen annehmen können. Die Revolutionen derselben, sowie wir sie beobachten, haben sich herstellen können auf Kosten dieser Rotationsbewegungen, wenn man ein interplanetares widerstehendes Mittel voraussetzt. Der Verfasser setzt nicht mehr, wie in seiner ersten Arbeit voraus, dass die Rotation der Sonne eine Wirkung der Planeten sei. Er muss jetzt den

Einfluss anderer Sterne zu Hülfe nehmen. Nach ihm sind übrigens die Planeten Kugeln, unabhängig von der Sonne entstanden, ausserhalb ihrer Atmosphäre. In einer Note, die der Hauptabhandlung folgt, antwortet der Verfasser auf verschiedene Einwürfe des Herrn Folie, in Bezug auf die Thermodynamik, indem er sich auf eine eigenthümliche Ansicht hinsichtlich der Auffassung der Materie stützt. Nach ihm ist das Universum voll. Die gewöhnliche Materie besitzt eine constante Anziehung; eine andere Materie, die alle Zwischenräume zwischen der ersten erfüllt, besitzt eine abstossende Wirkung, die Null werden kann (Absolutes Null der Temperatur). Die Atome sind kleine sphärische Körper, ganz erfüllt von anziehender Materie, die anfänglich sich in endlichen Entfernungen von einander befanden.

Mn. (O.)

SOUILLART. Mouvements relatifs de tous les astres du système solaire, chaque astre étant considéré individuellement. Mém. cour. de Belg. XLII.

E. CATALAN. Rapport sur ce mémoire. Bull. de Belg. (2) XLVIII. 96-102.

In dieser Abhandlung umfasst der Verfasser die Gesammtheit der Rotations- und Translationsbewegungen aller Sterne, jeden individuell betrachtet. Er behandelt die allgemeinsten Fragen, mit denen sich die Himmelsmechanik beschäftigt. Der erste Paragraph ist der Berechnung eines angenäherten Werthes des Potentials zweier Massen gewidmet, der zweite und dritte den allgemeinen Bewegungsgleichungen für Translation und Rotation der Planeten und Satelliten; der vierte behandelt störende Functionen, welche weit complicirter sind, als sie sonst in der Himmelsmechanik auftreten, wo man Vereinfachungen gemacht hat. Der letzte und längste Paragraph endlich hat zum Titel: „Équations relatives aux déplacements des plans des orbites et des équateurs“ und enthält den folgenden Satz, dessen Beweis der Verfasser als den Hauptgegenstand seiner Arbeit betrachtet.

„Wenn man die Glieder vernachlässigt, die vom dritten Grade in Beziehung auf die Excentricitäten und die Neigungen sein würden, so hängen die säculären Verrückungen der Bahn- und der Aequatorialebenen aller Gestirne, die das Sonnensystem bilden, ab von einem System linearer Gleichungen, ganz ähnlich dem, das man gewöhnlich erhält, um die säculären Verrückungen der Bahnebenen der Planeten zu bestimmen."

Mn. (O.)

Anhang.

Encyklopädie der Naturwissenschaften. Herausgegeben von G. Jäger, A. Kenngott, Ladenburg, v. Oppolzer, Schenk, Schlömilch, G. C. Wittstein, von Zech. I. Abth. II. Theil. Handbuch der Mathematik, herausgegeben von Schlömilch unter Mitwirkung von Reidt und Heger. I. Bd. Lief. 1., 2., 3. Breslau. Trewendt.

Ein Referat über das vorliegende Sammelwerk wird erst möglich sein, wenn dasselbe in seiner Gesammtheit vollendet ist. Wir verschieben daher den Bericht bis zu diesem Zeitpunkt. Die im Jahre 1879 erschienenen drei Lieferungen enthalten: 1) Arithmetik und Algebra, p. 1-166, von F. Reidt; 2) Planimetrie, p. 167-384, von F. Reidt; 3) Stereometrie p. 385 von F. Reidt.

O.

F. Reidt. Die Elemente der Mathematik, ein Hülfsbuch für den mathematischen Unterricht an höheren Lehranstalten. Erster Theil: Allgemeine Arithmetik und Algebra. 3. Aufl. Zweiter Theil: Planimetrie. 4. Aufl. Berlin. Grote.

Der 1te Theil umfasst die sieben Operationen, die Gleichungen und einiges von den Reihen, Kettenbrüchen, Combinationen, Wahrscheinlichkeitsrechnung, sowie den binomischen Lehrsatz. Die Methode ist die rein arithmetische. Die Beweise für erweiterten

Zahlbegriff werden dem Schüler überlassen. Der correcten Abfassung ist sichtlich Fleiss zugewandt. Die vulgäre falsche Erklärung vom Rechnen steht freilich auch hier; doch richtet sich der Verfasser selbst nicht darnach: er bildet nicht neue Zahlen, sondern transformirt die gegebenen. Der Inhalt des 2ten Theils ist sehr reichhaltig; doch ist alles, was das Nothwendige überschreitet, in besonderen Anhängen gegeben; hierzu gehören z. B. die Kegelschnitte. Eigenthümlich ist die Ansicht des Verfassers, nach der die Aehnlichkeit vor der Flächengleichheit behandelt werden soll; so ist auch die Anordnung. Der Parallelentheorie ist auch der Grundsatz vorausgeschickt, dass durch einen Punkt nur eine Parallele möglich ist, die Behandlung aber reflectirt nicht darauf. H.

F. J. Studnička. Algebra für die oberen Classen der Mittelschulen. (Böhmisch.)

Bildet einen neuen Versuch, das vorgeschriebene Pensum in zweckentsprechender Form zu absolviren, wobei zum Unterschied von den bisherigen Schulbüchern ein grösseres Gewicht auf die complexen Grössen und Determinanten, denen je ein umfangreicheres Kapitel gewidmet ist, gelegt wird. Std.

F. Hromádko, A. Strnad. Sammlung von Aufgaben aus der Algebra für die oberen Classen der Mittelschulen. (Böhmisch.)

Enthält auch Aufgaben aus der Determinantenlehre.

Std.

N. Niewenglowski. Algebra. Erster Theil. Die Elemente. (Polnisch.) Paris. Dzialynski.

Dieses Lehrbuch enthält auf 893 Seiten in 8° die Elemente der Algebra in folgenden Capiteln: Erklärungen, algebraische Operationen, Gleichungen 1ten Grades, Gleichungen 2ten Grades,

Maxima und Minima, Progressionen und Logarithmen, Combinationen und binomischer Lehrsatz.

Die Behandlung ist im Allgemeinen klar und gemeinfasslich, aber durch übergrosse Ausführlichkeit überhebt sie den Leser jeder Selbstthätigkeit. Das Buch empfiehlt sich durch die gute Auswahl zahlreicher Aufgaben und Beispiele, aber die Erklärung mancher fundamentaler Begriffe, die Einführung negativer Zahlen und der Operationen mit ihnen, sind nach des Referenten Meinung der wissenschaftlichen Methode wenig entsprechend.

Dn.

De Campou. Théorie des quantités négatives. Paris. Gauthier-Villars. 8°.

Nach einem in den Nouv. Ann. (2) XVIII. p. 369-370 befindlichen Referate enthält das Buch die Herleitung der ersten Operationen und behandelt sodann, nachdem der Begriff der negativen Grösse eingeführt ist, einige Aufgaben und die Grundbegriffe der Trigonometrie, analytischen Geometrie und Mechanik.

O.

S. Kramsztyk. Kaufmännische Arithmetik. Allgemeiner Theil. Anwendung der Arithmetik auf kaufmännische Rechnung. (Polnisch) Verlag der Warschauer Handelsschule. Warschau.

Das gut geschriebene und nützliche Lehrbuch enthält folgende Capitel: 1) Das metrische System. 2) Die Abkürzungen in den vier arithmetischen Operationen. 3) Angenäherte Multiplication und Division. 4) Rechnung mit benannten Zahlen. 5) Regeldetri. 6) Kettenregel. 7) Procentrechnung. 8) Zinsrechnung. 9) Gesellschaftsregel. 10) Mischungsregel. 11) Mittlerer Zinsfuss und mittlerer Zahlungstermin. Im Anhange: Die Masse und Gewichte verschiedener Länder.

Dn.

W. Jung. Ueber die geometrische Bedeutung verschiedener Logarithmenmoduln. Casopis VIII. 119-121. (Böhmisch).

Std.

F. G. Gauss. Fünfstellige vollständige logarithmische und trigonometrische Tafeln. 11[te] Aufl. Zeitz und Leipzig. Strien.

Die vorliegende Auflage der bereits rühmlichst bekannten und vielgebrauchten Tafeln ist unverändert. O.

G. Dostor. Méthodes expéditives pour l'extraction de la racine cubique des nombres entiers ou décimaux. Grunert Arch. LXIV. 321-332.

Reproduction einer Methode zur schnellen Cubikwurzelausziehung, die der Verfasser bereits 1850 in seinem „Nouveau système d'arithmétique“ (Paris, Hachette) publicirt hatte.

O.

W. W. Johnson. Note on the „15“ puzzle. Am. J. II. 397-404.

W. E. Story. Note on the „15“ puzzle. Am. J. II. 397-404.

Das „Boss Puzzle“-Spiel, welches um Ostern 1880 auch Deutschland als Eintagsfliege durchschwirrte, verlangt bekanntlich, in einem quadratischen Kästchen, welches für 16 Steine Platz hat, aber nur 15 mit den Zahlen 1 bis 15 beschriebene Steine enthält, diese Steine, wenn sie beliebig liegen, durch blosses Verschieben parallel den Seiten des Quadrats so zu ändern, dass die 15 Zahlen in die natürliche Reihenfolge kommen, und der leere Platz unten rechts erscheint. Die Verfasser der vorliegenden Noten geben nun an, warum dies nicht immer möglich ist, und Herr Story hebt hervor, dass die Sache bei einem Rechteck mit a mal b Plätzen ganz dieselbe bleibt. Die Entscheidung, ob eine Stellung der Steine des Boss Puzzle in eine an-

dere Stellung, bei welcher der leere Platz wieder an derselben Stelle, wie vorher ist, durch Verschieben übergeführt werden kann oder nicht, lässt sich am kürzesten so angeben. Man führe die alte Stellung in die angestrebte neue Stellung dadurch über, dass man auf irgend welche Weise immer je zwei beliebige Steine mit einander vertauscht. Ist dann die Zahl der vorgenommenen Vertauschungen eine grade, so ist die alte Stellung in die neue auch durch Verschieben überführbar, ist jene Zahl ungrade, so ist eine Ueberführung der einen Stellung in die andere durch Verschieben unmöglich. Scht.

W. Thomson. On a machine for the solution of simultaneous linear equations. Proc. of London XXVIII. 111-113.

Die Maschine zur Lösung von n Gleichungen besteht aus n Körpern, deren jeder auf einer festen Axe befestigt ist, und die durch ein System von Seilen und Rollen verbunden sind. Auf den Seilen werden beim Gebrauch gleichzeitig oder successive n gegebene Längen abgeschnitten, die durch dieselbe Anzahl von Ringen gehen. Die Winkel, um welche die Körper bewegt werden, sind die geforderten Werthe der unbekannten $x_1, x_2, \dots x_n$, die den gegebenen Gleichungen genügen. Es ist dies die praktische Ausführung einer werthvollen Maschine zur Berechnung von 8 bis 10 Unbekannten, die keinerlei Schwierigkeit oder weitere Arbeit erfordert und bei successiver Näherung einen beliebigen Grad von Genauigkeit zu erreichen gestattet. Cly. (O.)

Reitz. Mittheilung über seinen verbesserten Seeweg-integrator. Hamb. math. Ges. 1879. 213-215.

H. Schubert. Construction der Fadencurve des verbesserten Seewegintegrator. Hamb. math. Ges. 1879. 215-219.

Aufstellung der Bedingungsgleichung für die Construction der bei dem Apparat auftretenden Spiralen, dem die Ableitung

der Gleichung derselben durch H. Schubert in Punkt- und Liniencoordinaten folgt. O.

J. Krejčí. Krystallographie. II. Aufl. (Böhmisch.).

Enthält in mathematischer Hinsicht vielfach neue Ableitungsmethoden und verwendet nach Bedarf auch Determinanten, namentlich bei der Darstellung der Zonenflächen. Std.

W. A. Whitworth. A phenomenon of the kalendar. Messenger (2) IX. 90-92.

Der Verfasser bemerkt, es sei falsch anzunehmen, wie es öfter in Wahrscheinlichkeitsfragen geschehe, dass der Weihnachtstag (oder ein anderer bestimmter Tag in einem bestimmten Monat) gleich oft auf jeden Tag der Woche falle. In 400 Jahren fällt der Weihnachtstag 58 Mal auf Sonntag, Dienstag und Freitag, 57 Mal auf Mittwoch und Donnerstag und 56 Mal auf Montag und Sonnabend. Glr. (O.)

A. Kurz. Aus der Schulmappe. Bair. Bl. XV. 158-163, 318-324.

Fortsetzung der bekannten Miscellen des Verfassers. 65) Das terrestrische Okular mit vier Linsen. Dasselbe kann passend mit dem Systeme verglichen werden, welches aus unserem Auge und einer davor befindlichen Loupe zusammengesetzt ist. 66) Newton's Farbenringe. Schulversuche, welche darthun, wie beim Nachlassen des auf das Glas ausgeübten Druckes das Ringcentrum verschiedene Farben annimmt. 67) Volumenbestimmung durch Wasserwägung. Berichtigung der in Kohlrausch's „Leitfaden der praktischen Physik" (S. 30) zu diesem Zwecke gegebenen Formel. 68) Specifische Gewichtsbestimmung. Entwickelung einer Formel, welche gleichmässig dem Luftauftrieb des abzuwägenden Körpers, jenem der Gewichtstücke, dem eigenen, von 1 abweichenden specifischen Gewichte des angewendeten Wassers und der Längendifferenz der Wagebalken Rechnung tragen soll. 69) Das

elastische Pendel mit Längenschwingungen. Berechnung der Schwingungsdauer eines solchen nach einem neuen Verfahren. 70) Das Torsionspendel. Mit Hülfe des soeben erwähnten Ausdrucks wird für dieses Pendel die Schwingungsdauer

$$t = 2\pi \sqrt{\frac{2lT}{\pi G r^4}}$$

bestimmt, wo $\frac{1}{2}\pi r^4$ das Trägheitsmoment des Drahtes, T jenes der angehängten schweren Masse, l die Drahtlänge, G den Torsionsmodul bedeuten. T ist gleich $\frac{3}{8}E$ zu setzen, unter E den gewöhnlichen Elasticitätsmodul verstanden. 71) Ueber elastische Nachwirkung. Für dieselbe gilt noch immer die Gauss-Weber'sche Formel

$$l = l_0 + \frac{a}{b+t};$$

dieselbe besagt, dass, sowie man einen gespannten Draht entlastet, derselbe sich zunächst auf die Länge $l_0 + \frac{a}{b}$ zusammenzieht (a und b empirische Constante); nach der Zeit t nimmt er die angegebene Länge l an. Aber auch bei der Torsion ist diese elastische Nachwirkung sorgfältig zu beachten, wie der Verfasser kürzlich in Carl's Repertorium gezeigt hat. 72) Masse und Gewicht. Zusammenstellung des „absoluten" mit dem sogenannten „irdischen" System nach Pfaundler. 73) Der Luftpumpenhahn von Babinet. Berechnung der Verdünnungsgrenze, welche bei Anwendung dieses Hahnes erreicht werden kann. 74) Zweite Hälfte und Schluss des ersten Capitels der Physik. Angabe der Materien, welche nach Ansicht des Verfassers in dieses Capitel gehören. Ein Theil derselben findet sich bereits in Miscelle 53; hier werden noch nachgetragen: Trägheitsmoment, mechanische Grundbegriffe, Stoss, Reibung, Theorie der Wage. 75) Das zweite Capitel der Physik. Es soll enthalten: Elasticität, Festigkeit, soweit sie elementarer Behandlung zugänglich ist, Stoss elastischer Körper, Hydrostatik, Barometer, Mariotte's Gesetz sammt Anwendung auf Höhenmessung, Luftpumpe, Capillarität, Grundzüge der Hydro- und Aerodynamik. 76) Wellenbewegung und Akustik.

Zugleich drittes Capitel der Physik; wesentlicher Inhalt: Fortpflanzungsgeschwindigkeit, Gleichung der Wellenlinie, Wellentheorie, Tonleiter, Pfeifentöne, Bestimmung der Tonhöhe, Longitudinalschwingungen in ihren Beziehungen zur Fortpflanzung des Schalles, eventuell auch Interferenz und Doppler'sches Princip. Eine weitere Fortsetzung dieser hodegetischen Betrachtungen wird für die Zukunft vorbehalten. Gr.

Namenregister.